ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ”

Μεταπτυχιακή εργασία

π-SPECIAL ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ

Μιχαήλ Γκίκας του Παναγιώτη

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Μαρία Λουκάκη

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
2009

UNIVERSITY OF CRETE
FACULTY OF SCIENCES & ENGINEERING
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Master Thesis

π-SPECIAL CHARACTERS

Michail P. Gkikas

Supervisor: Maria Loukaki

HERAKLION
2009

Την επιτροπή αξιολόγησης της παρούσας εργασίας αποτέλεσαν :

- Θεόδουλος Γαρεφαλάκης
- Μαρία Λουκάκη (επιβλέπουσα)
- Εμμανουήλ Λυδάκης

Ευχαριστίες

Κατ' αρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω την τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της παρούσας εργασίας και, ιδιαιτέρως, την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Μαρία Λουκάκη, για την εμπιστοσύνη και την καθοδήγησή της κατά τη διάρκεια της συγγραφής.

Ακόμη, θα ήθελα από καρδιάς να ευχαριστήσω την Κατερίνα, για τη συντροφικότητα, την υπομονή και τη στήριξη που μου παρέχει όλο αυτό τον καιρό.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το χρωστώ στην οικογένεια μου, για τη στήριξη, την αγάπη καθώς και την πίστη τους σε μένα, που μου χάρισαν και μου χαρίζουν απλόχερα όλα αυτά τα χρόνια. Την εργασία αυτή την αφιερώνω ολόψυχα στους γονείς μου, Παναγιώτη και Δέσποινα.

Μιχάλης Γκίκας
Ηράκλειο, 2009

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση ορισμένων βασικών αποτελεσμάτων από την θεωρία των π-special χαρακτήρων. Οι εν λόγω χαρακτήρες είναι ανάγωγοι πάνω από το $\mathbb{C}$ και έχουν πολλές εφαρμογές σε προβλήματα της θεωρίας αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων. Αναπτύχθηκαν, ως γενίκευση των χαρακτήρων Brauer, από τους Isaacs και Gajendragadkar, στα άρθρα [Is2] και [Ga], αντιστοίχως. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνονται όλες οι απαιτούμενες έννοιες από την θεωρία αναπαραστάσεων και χαρακτήρων. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε τους χαρακτήρες Brauer και μελετούμε κάποια βασικά αποτελέσματα για αυτούς. Τέλος, το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τις βασικές ιδιότητες των π-special χαρακτήρων καθώς και ορισμένες αριθμητικές εφαρμογές σε επιλύσιμες ομάδες.

Λέξεις κλειδιά: π-special χαρακτήρες, πεπερασμένες ομάδες, χαρακτήρες Brauer.

Abstract

In this master thesis we present some results from the theory of π-special characters. These characters are irreducible over $\mathbb{C}$ and have many applications to problems of representation theory of finite groups. They were first developed, as a generalization of Brauer characters, by Isaacs (see [Is2]) and Gajendragadkar (see [Ga]). The first chapter of this thesis includes all the preliminaries from representation and character theory. The second chapter deals with the notion of Brauer characters. Finally, in the third chapter we define π-special characters and give their basic properties along with some arithmetical applications in solvable groups.

Keywords: π-special characters, finite groups, Brauer characters.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

1.1 Άλγεβρες και Modules

Ορισμός 1.1.1. Έστω F ένα σώμα και A ένας F - διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Εάν το A είναι επιπλέον δακτύλιος (με μοναδιαίο στοιχείο), τέτοιος ώστε

$$(ra)b = r(ab) = a(rb),\ \forall\, r \in F \text{ και } a, b \in A,$$

τότε το A λέγεται **F - άλγεβρα.** Μια F - άλγεβρα καλείται **απλή** όταν δεν διαθέτει γνήσια ιδεώδη. Εάν τα A, B είναι δυο F - άλγεβρες, τότε ο ομομορφισμός δακτυλίων $\phi : A \to B$ είναι ένας **ομομορφισμός F - αλγεβρών** όταν είναι επιπροσθέτως μια F - γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει $\phi(1_A) = 1_B$.

Ορισμός 1.1.2. Έστω A μια F - άλγεβρα και V ένας F - διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ας υποθέσουμε ότι ορίζεται δεξιά πολλαπλασιασμός

$$v\alpha \in V \text{ , για κάθε } v \in V \text{ , } \alpha \in A, \tag{1.1}$$

έτσι ώστε το V να καθίσταται δεξί A - module (όπου τώρα το A θεωρείται ως δακτύλιος). Εάν επιπλέον ισχύει ότι

$$(rv)\alpha = r(v\alpha) = v(r\alpha) \text{ ,} \forall\, r \in F \text{ , } v \in V \text{ και } \alpha \in A,$$

τότε το V καλείται **A - module**. Εάν το V είναι ένα A - module και $W \subseteq V$ μια υποομάδα του, τότε το W είναι ένα **A - submodule** του V όταν

$$w\alpha \in W, \text{ για κάθε } w \in W \text{ , } \alpha \in A.$$

Στην περίπτωση αυτή, το πηλίκο V/W καθίσταται A - module, μέσω της πράξεως

$$(v + W)\alpha = v\alpha + W, \text{ για κάθε } v \in V \text{ , } \alpha \in A.$$

Ορισμός 1.1.3. Ένα A - module $V \neq 0$ καλείται **ανάγωγο**, όταν τα μοναδικά A - submodules του είναι το τετριμμένο και το ίδιο το V.

Ορισμός 1.1.4. Έστω V ένα A - module. Μια **συνθετική σειρά** του V είναι μια αλυσίδα A - submodules

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{n-1} \supset V_n = 0 ,$$

τέτοια ώστε, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, το V_{i-1}/V_i να είναι ανάγωγο A - module. Τα V_{i-1}/V_i καλούνται **παράγοντες** της συγκεκριμένης σειράς.

Σημείωση 1.1.5. Αποδεικνύεται ότι κάθε A - module διαθέτει (τουλάχιστον) μία συνθετική σειρά καθώς και ότι δύο συνθετικές σειρές του ίδιου A - module διαθέτουν τους ίδιους παράγοντες μέχρις ισομορφισμού.

Ορισμός 1.1.6. Έστω A μια F - άλγεβρα και V, W δυο A - modules. Η απεικόνιση $\phi : V \to W$ καλείται **A - ομομορφισμός** όταν είναι προσθετική και επιπλέον ισχύει

$$\phi(v\alpha) = \phi(v)\alpha, \text{ για κάθε } v \in V, \alpha \in A. \tag{1.2}$$

Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι ο πυρήνας $\ker(\phi)$ και η εικόνα $\mathrm{Im}(\phi)$ ενός A - ομομορφισμού $\phi : V \to W$ αποτελούν A - submodules των V και W, αντιστοίχως. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των A - ομομορφισμών από το V στο W με $\mathrm{Hom}_A(V, W)$. Ειδικότερα, συμβολίζουμε το σύνολο $\mathrm{Hom}_A(V, V)$ όλων των A - ενδομορφισμών του V με $\mathrm{End}_A(V)$.

Παρατήρηση 1.1.7. Το $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ αποτελεί έναν F - διανυσματικό χώρο, μέσω του πολλαπλασιασμού

$$\big(r\phi\big)(v) = r\phi(v), \ \forall\, r \in F \text{ και } \phi \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$$

και της συνήθους προσθέσεως $\big(\phi+\theta\big)(v) = \phi(v)+\theta(v)$. Ειδικότερα, το $\mathrm{End}_A(V)$ αποτελεί μια F - άλγεβρα, μέσω της πράξεως

$$\phi\theta(v) = \phi\big(\theta(v)\big), \ \forall\, v \in V \text{ και } \phi\,,\, \theta \in \mathrm{End}_A(V).$$

Ορισμός 1.1.8. Έστω $F \supseteq K$ μια επέκταση σωμάτων. Ένα στοιχείο $\alpha \in F$ καλείται **αλγεβρικό πάνω από το** K όταν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $f \in K[x]$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$. Η $F \supseteq K$ καλείται **αλγεβρική επέκταση** όταν κάθε στοιχείο του F είναι αλγεβρικό πάνω από το K (στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι το σώμα F είναι αλγεβρικό πάνω από το K).

Ορισμός 1.1.9. Ένα σώμα F ονομάζεται **αλγεβρικώς κλειστό** όταν κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f \in F[x]$ διαθέτει μια ρίζα στο F. Το F είναι αλγεβρικώς κλειστό εάν και μόνον εάν δεν έχει γνήσιες αλγεβρικές επεκτάσεις $E \supsetneqq F$.

Το παρακάτω καθορίζει πλήρως τους ενδομορφισμούς ενός αναγώγου A - module, όταν το σώμα F είναι αλγεβρικώς κλειστό.

Λήμμα 1.1.10 (Schur). *Έστω A μια F - άλγεβρα και V, W δυο ανάγωγα A - modules. Τότε κάθε μη μηδενικός A - ομομορφισμός $f \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$ διαθέτει αντίστροφο εντός του $\mathrm{Hom}_A(W, V)$. Ειδικότερα, όταν το σώμα F είναι αλγεβρικώς κλειστό, ισχύει ότι $\mathrm{End}_A(V) = F$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$ μη μηδενικός. Ως γνωστόν, τα $\ker(\phi)$ και $\mathrm{Im}(\phi)$ αποτελούν A - submodules των V και W, αντιστοίχως. Επειδή τα V και W έχουν υποτεθεί ανάγωγα και το f μη μηδενικός ομομορφισμός, έχουμε κατ' ανάκην $\ker(\phi) = 0_V$ και $\mathrm{Im}(\phi) = W$. Επομένως το f είναι αμφίρριψη και διαθέτει πράγματι αντίστροφο εντός του $\mathrm{Hom}_A(W, V)$. Ας υποθέσουμε τώρα επιπλέον ότι το σώμα F είναι αλγεβρικώς κλειστό. Το V είναι εξ ορισμού ένας F - διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, οπότε, εάν $f \in \mathrm{End}_A(V)$ μη μηδενικός, υπάρχει κάποια ιδιοτιμή $\lambda \in F \setminus \{0_F\}$, έτσι ώστε το $f - \lambda 1_V \in \mathrm{End}_A(V)$ να μην είναι αντιστρέψιμο $\big($εντός του $\mathrm{End}_A(V)\big)$. Βάσει των προηγουμένων, κατ' ανάγκην $f - \lambda 1_V = 0_V$, οπότε

$$f = \lambda 1_V \in F \cdot 1_V := \{a 1_V \ : \ a \in F\} \,.$$

Επειδή το F είναι σώμα, προφανώς μπορούμε να ταυτίσουμε το $F \cdot 1_V$ με το F, οπότε $\mathrm{End}_A(V) \subseteq F$ και τελικά $\mathrm{End}_A(V) = F$. □

Σημείωση 1.1.11. Έστω V ένα ανάγωγο A - module. Μια άμεση απόρροια του λήμματος του Schur 1.1.10 είναι ότι η F - άλγεβρα $\mathrm{End}_A(V)$ αποτελεί ένα διαιρετικό δακτύλιο[1].

Ορισμός 1.1.12. Έστω A μια F - άλγεβρα και V ένα A - module. Ορίζουμε το υποσύνολο του (δακτυλίου) A :

$$\mathrm{ann}(V) := \{\alpha \in A \ : \ v\alpha = 0 \,, \forall\, v \in V\} \subseteq A.$$

Το $\mathrm{ann}(V)$ αποτελεί προφανώς ένα ιδεώδες του δακτυλίου A το οποίο και καλούμε **annihilator** του V.

Ορισμός 1.1.13. Έστω A μια F - άλγεβρα και V ένα A - module. Για κάθε $\alpha \in A$ ορίζουμε τον F - ενδομορφισμό $\alpha_V \in \mathrm{End}_F(V)$:

$$\alpha_V : V \to V \ , \ v \mapsto v\alpha$$

που επάγεται από τον δεξιά πολλαπλασιασμό (1.1) του A - module V. Η απεικόνιση

$$A \to \mathrm{End}_F(V) \ , \ \alpha \mapsto \alpha_V \tag{1.3}$$

[1] Ένας δακτύλιος R καλείται **διαιρετικός δακτύλιος** όταν πληροί όλα τα αξιώματα ενός σώματος πλήν της μεταθετικότητας της πολλαπλασιαστικής πράξης.

είναι ένας ομομορφισμός F - αλγεβρών, η εικόνα του οποίου συμβολίζεται με $A_V := \{\alpha_V \ : \ \alpha \in A\}$. Σημειωτέον ότι ο πυρήνας της παραπάνω απεικόνισης είναι ακριβώς το $\mathrm{ann}(V)$, ο annihilator του A - module V.

1.2 Semisimple άλγεβρες και το θεώρημα του Wedderburn

Ορισμός 1.2.1. Ένα A - module καλείται **completely reducible** (συντομ. c.r.), όταν είναι το ευθύ άθροισμα κάποιων αναγώγων A - submodules του.

Προτού εισάγουμε την έννοια της semisimple άλγεβρας, ας μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των c.r. A - modules καθώς και την έννοια του ριζικού Jacobson μιας F - άλγεβρας.

Πρόταση 1.2.2. *Έστω V ένα A - module τέτοιο ώστε $V = \sum_i V_i$, για κάποια ανάγωγα A - submodules του. Τότε το V είναι το ευθύ άθροισμα κάποιων εξ αυτών.*

Απόδειξη. Επειδή το V διαθέτει εξ ορισμού πεπερασμένη διάσταση, μπορούμε να θεωρήσουμε κάποιο A - submodule $W \subseteq V$, το οποίο να είναι μεγιστοτικό στοιχείο[2] ως προς την ιδιότητα να είναι ευθύ άθροισμα κάποιων εκ των V_i. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $W \subsetneqq V = \sum_i V_i$. Τότε υπάρχει κάποιο μη τετριμμένο V_j τέτοιο ώστε $V_j \nsubseteq W$. Επειδή το V_j είναι εξ υποθέσεως ανάγωγο A - submodule έχουμε κατ' ανάγκην $W \cap V_j = 0$. Επομένως

$$W \subsetneqq W + V_j = W \oplus V_j \ ,$$

πράγμα άτοπο από την επιλογή του W. Συνεπώς $V = W$ και το V είναι το ευθύ άθροισμα κάποιων εκ των V_i. □

Πρόταση 1.2.3. *Έστω A μια F - άλγεβρα και V ένα A - module. Τότε το V είναι c.r. εάν και μόνον εάν, για κάθε A - submodule $U \subseteq V$ υπάρχει κάποιο A - submodule $W \subseteq V$, τέτοιο ώστε $V = U \oplus W$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω V ένα c.r. A - module. Βάσει της προτάσεως 1.2.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V = \sum_i V_i$, για κάποια ανάγωγα A - submodules V_i του V. Έστω ακόμα U ένα τυχόν A - submodule του V. Όπως και στην απόδειξη της προτάσεως 1.2.2, μπορούμε να θεωρήσουμε κάποιο A - submodule $W \subseteq V$, το οποίο να είναι μεγιστοτικό στοιχείο ως προς την ιδιότητα $U + W = U \oplus W$. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $U + W \subsetneqq V$. Τότε υπάρχει κάποιο μη τετριμμένο V_j τέτοιο ώστε $V_j \nsubseteq U + W$. Επειδή το V_j είναι εξ υποθέσεως

[2] Ως προς τη σχέση του εγκλεισμού των A - submodules του V.

ανάγωγο A - submodule έχουμε κατ' ανάγκην $(U+W)\cap V_j = 0$. Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι $U \cap (W+V_j) = 0$. Τότε $W \subsetneqq W + V_j$ και ακόμα

$$U + (W+V_j) = U \oplus (W+V_j) \ ,$$

πράγμα άτοπο από την επιλογή του W. Συνεπώς $V = U + W = U \oplus W$.
($\Leftarrow$) Έστω U ένα A - submodule του V, το οποίο να είναι μεγιστοτικό ως προς την ιδιότητα να είναι άθροισμα κάποιων αναγώγων A - submodules του V. Εξ υποθέσεως, υπάρχει κάποιο A - submodule $W \subseteq V$ τέτοιο ώστε $V = U \oplus W$. Εάν το W ήταν μη τετριμμένο, τότε θα μπορούσαμε να βρούμε κάποιο ανάγωγο A - submodule W_0 του V τέτοιο ώστε $W_0 \subseteq W$. Επομένως θα είχαμε $U \subsetneqq U + W_0$, πράγμα άτοπο από την επιλογή του U. Συνεπώς $W = 0$ και $V = U$. Βάσει της προτάσεως 1.2.2, το U (άρα και το V) είναι το ευθύ άθροισμα κάποιων αναγώγων A - sumbmodules του, οπότε είναι εξ ορισμού c.r. □

Πρόταση 1.2.4. *Έστω V ένα c.r. A - module και $U \subseteq V$ ένα A - submodule. Τότε τα U και V/U είναι c.r.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικά τον ισχυρισμό για το U. Επειδή το V είναι εξ υποθέσεως c.r. η πρόταση 1.2.2 μας πληροφορεί ότι $V = \sum_i V_i$, για κάποια ανάγωγα A - submodules V_i του V. Επομένως

$$U = V \cap U = \left(\sum_i V_i \right) \cap U = \sum_i \big(V_i \cap U \big) \ . \tag{1.4}$$

Ωστόσο τα V_i είναι ανάγωγα, οπότε κατ' ανάγκην, για κάθε δείκτη i, τα $V_i \cap U$ είτε είναι τετριμμένα είτε είναι ίσα με το V_i. Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (1.4), το U είναι το (ευθύ) άθροισμα κάποιων εκ των V_i και ο πρώτος ισχυρισμός είναι αληθής. Ως προς τον ισχυρισμό για το V/U, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι επειδή το V είναι c.r., σύμφωνα με την πρόταση 1.2.3 ισχύει ότι $V = U \oplus W$, για κάποιο A - submodule W του V. Επομένως $V/U \cong W$ και, βάσει των προηγουμένων, το W (άρα και το V/U) είναι c.r. □

Ορισμός 1.2.5. Έστω A μια F - άλγεβρα. Ορίζουμε το **ριζικό Jacobson** της άλγεβρας A ως την τομή

$$\mathrm{Jac}(A) := \bigcap_V \mathrm{ann}(V) \ ,$$

όπου το V διατρέχει όλα τα ανάγωγα A - modules. Σημειωτέον ότι το ριζικό Jacobson αποτελεί ένα ιδεώδες του (δακτυλίου) A.

Ορισμός 1.2.6. Εάν το A είναι μια F - άλγεβρα, τότε το ίδιο το $V = A$ αποτελεί ένα A - module, μέσω του δεξιά πολλαπλασιασμού του δακτυλίου. Μάλιστα, καλείται **κανονικό** A **- module** και συμβολίζεται με A°. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι τα A - submodules του A° είναι ακριβώς τα δεξιά ιδεώδη του A και κατ' επέκτασιν ότι *τα ανάγωγα* A *- submodules του δεν είναι τίποτα άλλο από τα ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη του* A.

Πρόταση 1.2.7. *Έστω* A *μια* F *- άλγεβρα και* V *ένα* A *- module. Τότε το* V *είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν* $V \cong A/I$*, για κάποιο μεγιστοτικό δεξί ιδεώδες* I *του* A.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το V είναι ανάγωγο A - module και ας σταθεροποιήσουμε ένα τυχόν μη μηδενικό στοιχείο $v \in V$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi_v : A \to V \ , \ a \mapsto va \ , \text{ για κάθε } a \in A \ . \tag{1.5}$$

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η ϕ_v αποτελεί έναν A - ομομορφισμό (όπου η άλγεβρα A μπορεί να θεωρηθεί ως το κανονικό A - module A°). Τότε η εικόνα του ομομορφισμού $\mathrm{Im}(\phi_v) = \{va \ : \ a \in A\}$ αποτελεί ένα μη τετριμμένο A - submodule του V. Επειδή το V είναι εξ υποθέσεως ανάγωγο, κατ' ανάγκην $\mathrm{Im}(\phi_v) = V$. Θέτουμε $I := \ker(\phi_v)$. Το I αποτελεί ένα A - submodule του A°, οπότε, βάσει του ορισμού 1.2.6, αποτελεί ένα δεξί ιδεώδες του A. Επιπροσθέτως έχουμε $A/I \cong V$ και, επειδή το V είναι ανάγωγο, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το δεξί ιδεώδες I δεν μπορεί παρά να είναι μεγιστοτικό. Αντιστρόφως, εάν το V είναι ισόμορφο με το πηλίκο A/I για κάποιο μεγιστοτικό δεξί ιδεώδες του A τότε (λόγω του ότι το I είναι μεγιστοτικό) έχουμε άμεσα ότι το V είναι κατ' ανάγκην ανάγωγο. □

Θεώρημα 1.2.8. *Έστω* A *μια* F *- άλγεβρα. Τότε το ιδεώδες* $\mathrm{Jac}(A)$ *είναι η τομή όλων των μεγιστοτικών δεξιών ιδεωδών του* A.

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε με I την τομή όλων των μεγιστοτικών δεξιών ιδεωδών του A. Αρκεί να δείξουμε ότι $I = \mathrm{Jac}(A)$.
"$\subseteq$" Έστω V ένα τυχόν ανάγωγο A - module. Για κάθε $v \in V$ θεωρούμε την απεικόνιση ϕ_v που δίνεται στη σχέση (1.5) και ορίζουμε

$$I_v := \ker(\phi_v) = \{a \in A \ : \ va = 0\} \ .$$

Σημειωτέον ότι τα I_v, όπως διαφαίνεται και από την απόδειξη της προτάσεως 1.2.7, αποτελούν μεγιστοτικά δεξιά ιδεώδη του A. Επομένως

$$I \subseteq \bigcap_{v \in V} I_v = \{a \in A \ : \ va = 0 \ , \ \forall \, v \in V\} =: \mathrm{ann}(V) \ .$$

Επειδή το παραπάνω ισχύει για κάθε ανάγωγο A - module V, σύμφωνα με τον ορισμό 1.2.5, έχουμε άμεσα $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.
"$\supseteq$" Θεωρούμε τυχόν μεγιστοτικό δεξί ιδεώδες M του A και (προφανώς) αρκεί

να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Jac}(A) \subseteq M$. Επειδή το A - module A/M είναι ως γνωστόν ανάγωγο, βάσει του ορισμού 1.2.5 έχουμε $\mathrm{Jac}(A) \subseteq \mathrm{ann}(A/M)$. Επιπροσθέτως, εάν $x \in \mathrm{ann}(A/M)$, τότε

$$0_{A/M} = (a+M)x = ax + M \text{ , για κάθε } a \in A.$$

Ειδικότερα, θέτοντας $a = 1$, έχουμε $x + M = M$ και $x \in M$. Ως εκ τούτου ισχύει $\mathrm{ann}(A/M) \subseteq M$ και τελικά $\mathrm{Jac}(A) \subseteq M$. □

Παρατήρηση 1.2.9. Έστω A μια F - άλγεβρα και I ένα ιδεώδες του A. Εάν το V είναι ένα A/I - module, τότε το V καθίσταται προφανώς ένα A - module μέσω της πράξης

$$va = v(a+I) \text{ , } \forall\, v \in V, a \in A \text{ .}$$

Αντιστρόφως, εάν το V είναι ένα A - module και για το ιδεώδες I ισχύει ότι $I \subseteq \mathrm{ann}(V)$, τότε το V μπορεί να θεωρηθεί ως ένα A/I - module, μέσω της πράξης

$$v(a+I) = va \text{ , } \forall\, v \in V, a \in A \text{ .}$$

Έστω τώρα V ένα ανάγωγο A - module. Τότε, άμεσα από τον ορισμό 1.2.5, έχουμε ότι για το ιδεώδες $\mathrm{Jac}(A)$ του A ισχύει $\mathrm{Jac}(A) \subseteq \mathrm{ann}(V)$, οπότε, βάσει των προηγουμένων, το V μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ανάγωγο $A/\mathrm{Jac}(A)$ - module. Με άλλα λόγια, το σύνολο των αναγώγων A - modules μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των αναγώγων $A/\mathrm{Jac}(A)$ - modules.

Ορισμός 1.2.10. Έστω A μια F - άλγεβρα. Ένα μη μηδενικό στοιχείο $e \in A$ καλείται **ταυτοδύναμο**, όταν $e^2 = e$. Επίσης, ένα δεξί ιδεώδες του A καλείται **μηδενοδύναμο**, όταν $I^m = 0$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.2.11. *Έστω A μια F - άλγεβρα και I ένα μηδενοδύναμο δεξί ιδεώδες του A. Τότε $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.*

Απόδειξη. Έστω V τυχόν ανάγωγο A - module. Επειδή το VI αποτελεί ένα A - submodule του V και το V είναι ανάγωγο, είτε $VI = 0$ είτε $VI = V$. Εάν ίσχυε ότι $VI = V$ τότε $VI^2 = V$ και, επαγωγικά, $VI^n = V$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο, διότι εξ υποθέσεως υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $I^m = 0$. Συνεπώς $VI = 0$ και $I \subseteq \mathrm{ann}(V)$, για κάθε ανάγωγο A - module V. Εξ ορισμού του ριζικού Jacobson έχουμε λοιπόν $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$. □

Σημείωση 1.2.12. Αποδεικνύεται (βλ. [CR], θεώρημα 24.2) ότι κάθε δεξί ιδεώδες I του A το οποίο δεν είναι μηδενοδύναμο διαθέτει κάποιο ταυτοδύναμο στοιχείο $e \in I$.

Ορισμός 1.2.13. Μια F - άλγεβρα καλείται **semisimple** όταν $\mathrm{Jac}(A) = 0$.

Παρατήρηση 1.2.14. Εάν το A είναι μια F - άλγεβρα, τότε άμεσα διαπιστώνουμε ότι $\mathrm{Jac}\big(A/\mathrm{Jac}(A)\big) = 0$, οπότε η άλγεβρα $A/\mathrm{Jac}(A)$ είναι πάντοτε semisimple.

Πρόταση 1.2.15. *Έστω A μια semisimple F - άλγεβρα και I ένα ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες του A. Τότε*

$$I = eA := \{x \in A \,:\, ex = x\}\ ,$$

για κάποιο ταυτοδύναμο στοιχείο $e \in I$.

Απόδειξη. Επειδή εξ υποθέσεως $\mathrm{Jac}(A) = 0$, η πρόταση 1.2.11 μας πληροφορεί ότι το δεξί ιδεώδες I δεν μπορεί να είναι μηδενοδύναμο. Επομένως, σύμφωνα με την σημείωση 1.2.12, υπάρχει κάποιο ταυτοδύναμο στοιχείο $e \in I$. Άμεσα διαπιστώνουμε ότι το

$$eA := \{x \in A \,:\, ex = x\}$$

αποτελεί ένα δεξί ιδεώδες του A για το οποίο ισχύει $eA \subseteq I$. Επειδή το I είναι ελαχιστοτικό και το eA μη τετριμμένο (διότι $e \in eA$), έχουμε τελικά $I = eA$. □

Το ακόλουθο αποτελεί έναν εναλλακτικό ορισμό για τις semisimple F - άλγεβρες.

Θεώρημα 1.2.16. *Μια F - άλγεβρα A είναι semisimple εάν και μόνον εάν το κανονικό A - module είναι c.r.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι η F - άλγεβρα A είναι semisimple και ας θεωρήσουμε ένα ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες M_1 του A. Βάσει της προτάσεως 1.2.15, $M_1 = e_1A$, για κάποιο ταυτοδύναμο στοιχείο $e_1 \in M_1$. Ας ορίσουμε $M_1' := (1 - e_1)A$. Το M_1' αποτελεί ένα δεξί ιδεώδες του A και προφανώς $A = M_1 \oplus M_1'$. Εάν το M_1' δεν είναι τετριμμένο, τότε αυτό περιέχει κάποιο ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες M_2. Έστω ομοίως ότι $M_2 = e_2A$ για κάποιο ταυτοδύναμο στοιχείο $e_2 \in M_2$ και ας ορίσουμε $\overline{M}_2 := (1 - e_2)A$. Το $\overline{M}_2$ είναι και πάλι ένα δεξί ιδεώδες του A και προφανώς $A = M_2 \oplus \overline{M}_2$. Ορίζουμε το δεξί ιδεώδες $M_2' := M_1' \cap \overline{M}_2$ και παρατηρούμε ότι

$$M_1' = M_1' \cap \big(M_2 \oplus \overline{M}_2\big) = M_2 \oplus M_2'\ .$$

Επομένως $A = M_1 \oplus M_2 \oplus M_2'$, όπου τα M_1, M_2 είναι ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη και το M_2' δεξί ιδεώδες του A. Επειδή το A έχει εξ ορισμού πεπερασμένη διάσταση, συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, καταλήγουμε σε μια φθίνουσα αλυσίδα δεξιών ιδεωδών του A :

$$M_1' \supset M_2' \supset \cdots \supset M_k' = \{0\}$$

και κατ' επέκτασιν στο ότι $A = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$, για κάποια ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη $M_1, \ldots, M_k$. Επομένως το κανονικό A - module $A^\circ = A$ είναι c.r.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι το A° είναι c.r. Βάσει των ορισμών 1.2.1 και 1.2.6, τούτο σημαίνει ότι $A^\circ = \sum_i I_i$, για κάποια ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη I_i του A° (σημειωτέον ότι, βάσει της προτάσεως 1.2.2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το άθροισμα δεν είναι κατ' ανάγκην ευθύ). Για το ιδεώδες $\mathrm{Jac}(A)$ του $A = A^\circ$ έχουμε

$$\mathrm{Jac}(A) = A^\circ\,\mathrm{Jac}(A) = \left(\sum_i I_i\right)\mathrm{Jac}(A) = \sum_i \big(I_i\,\mathrm{Jac}(A)\big)\ . \tag{1.6}$$

Ωστόσο είναι προφανές ότι

$$I_i\,\mathrm{Jac}(A) \subseteq I_i\,\mathrm{ann}(I_i) = 0\ ,\ \text{για κάθε δείκτη } i\,.$$

Επομένως η σχέση (1.6) μας δίνει $\mathrm{Jac}(A) = 0$ και συνεπώς η F - άλγεβρα A είναι semisimple. □

Πόρισμα 1.2.17. *Μια F - άλγεβρα A είναι semisimple εάν και μόνον εάν κάθε A - module είναι c.r.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η άλγεβρα A είναι semisimple. Βάσει του θεωρήματος 1.2.16, το κανονικό A - module A° είναι c.r., οπότε υπάρχουν ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη I_i του $A = A^\circ$, τέτοια ώστε $A = \sum_i I_i$. Θεωρούμε τώρα ένα τυχόν A - module V και ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ είναι μια βάση του F - διανυσματικού χώρου V. Τότε

$$V = \sum_i \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, I_i\ . \tag{1.7}$$

Ισχυρισμός : Για κάθε $\beta \in \mathcal{B}$ και για κάθε δείκτη i, το $\beta\, I_i$ είτε είναι τετριμμένο είτε είναι ανάγωγο A - submodule του V.

Πράγματι· Σταθεροποιούμε ένα τυχόν $\beta \in \mathcal{B}$ και για κάθε i ορίζουμε την απεικόνιση μεταξύ των A - modules I_i και $\beta\, I_i$:

$$I_i \to \beta\, I_i\ ,\ a \mapsto \beta\, a\ .$$

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ένας A - επιμορφισμός. Επειδή τα I_i είναι εξ ορισμού ανάγωγα A - submodules του A, ο πυρήνας της προηγούμενης απεικόνισης δεν μπορεί παρά να είναι είτε ο τετριμμένος είτε ολόκληρο το I_i. Κατ' επέκτασιν, το $\beta\, I_i$ είτε είναι ισόμορφο με το I_i (και άρα επίσης ανάγωγο) είτε είναι τεριμμένο, αντιστοίχως. ♢

Η σχέση (1.7) σε συνδυασμό με τον παραπάνω ισχυρισμό και την πρόταση 1.2.2, μας πληροφορεί ότι το V είναι το ευθύ άθροισμα κάποιων αναγώγων A - submodules του, οπότε είναι c.r.

($\Leftarrow$) Άμεσο από το θεώρημα 1.2.16. □

Πρόταση 1.2.18. *Έστω A μια semisimple F - άλγεβρα και I ένα ιδεώδες της. Τότε η F - άλγεβρα A/I είναι semisimple.*

Απόδειξη. Έστω V ένα τυχόν A/I - module. Σύμφωνα με το πόρισμα 1.2.17 αρκεί να δείξουμε ότι το V είναι c.r. Κατ' αρχάς, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.2.9, το V καθίσταται ένα A - module. Επειδή εξ υποθέσεως η άλγεβρα A είναι semisimple, το πόρισμα 1.2.17 μας πληροφορεί ότι το V είναι c.r. (ως A - module). Επομένως υπάρχουν κάποια ανάγωγα A - submodules M_i του V, τέτοια ώστε

$$V = \sum_i M_i \ .$$

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι τα παραπάνω M_i είναι επίσης ανάγωγα A/I - submodules του V (εάν θεωρήσουμε το V ως A/I - module). Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.2, το V είναι c.r. □

Πρόταση 1.2.19. *Έστω A μια semisimple F - άλγεβρα. Τότε κάθε ανάγωγο A - module είναι ισόμορφο με κάποιο ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες του A.*

Απόδειξη. Έστω V ένα τυχόν ανάγωγο A - module. Βάσει της προτάσεως 1.2.7, έχουμε ότι $V \cong A/I$, για κάποιο μεγιστοτικό δεξί ιδεώδες I του A. Ωστόσο η άλγεβρα A είναι εξ υποθέσεως semisimple, επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.16, το κανονικό A - module $A = A^\circ$ είναι c.r. Επειδή το I είναι ένα A - submodule του $A = A^\circ$ (βλ. 1.2.6), βάσει της προτάσεως 1.2.3, υπάρχει κάποιο A - submodule J του A, τέτοιο ώστε $A = I \oplus J$. Επειδή το $J \cong A/I$ είναι δεξί ιδεώδες του A και το I είναι μεγιστοτικό, έχουμε άμεσα ότι το J αποτελεί ένα ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες του A. Επιπροσθέτως, $V \cong A/I \cong J$. □

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με δυο αποτελέσματα τα οποία θα μας φανούν πολύ χρήσιμα στη συνέχεια· το λεγόμενο θεώρημα του "διπλού κεντροποιητή" και το θεώρημα του Wedderburn.

Θεώρημα 1.2.20. *Έστω A μια semisimple F - άλγεβρα και M ένα ανάγωγο A - module. Εάν ορίσουμε $D := \mathrm{End}_A(M)$, τότε $\mathrm{End}_D(M) = A_M$ (βλ. 1.1.13).*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.1.7, το $D := \mathrm{End}_A(M)$ αποτελεί μια F - άλγεβρα. Επίσης, το M καθίσταται ένα D - module, μέσω της πράξης

$$m\theta := \theta(m) \ , \text{ για κάθε } m \in M \, , \ \theta \in D \ . \tag{1.8}$$

Επειδή η άλγεβρα A είναι εξ υποθέσεως semisimple και το M είναι ένα ανάγωγο A - module, βάσει της προτάσεως 1.2.19, μπορούμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι το M είναι ένα ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες του A. Αποδεικνύουμε τη ζητούμενη ισότητα $\mathrm{End}_D(M) = A_M$ μέσω αντίστροφων εγκλεισμών.

• $A_M \subseteq \mathrm{End}_D(M)$: Υπενθυμίζουμε ότι $A_M := \{a_M \ : \ a \in A\}$, όπου, για κάθε $a \in A$, έχουμε ορίσει $a_M \in \mathrm{End}_F(M)$ με $a_M(m) = ma$ (βλ. ορισμό 1.1.13). Έστω τυχόν $a \in A$ και $a_M \in A_M$. Τότε, για κάθε $m \in M$ και για κάθε $\theta \in D$, έχουμε ότι

$$a_M(m\theta) \overset{(1.8)}{=} a_M\big(\theta(m)\big) = \theta(m)a \overset{(1.2)}{=} \theta(ma) \overset{(1.8)}{=} (ma)\theta = a_M(m)\theta \ .$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1.2), τούτο σημαίνει ότι το $a_M : M \to M$ είναι ένας D - ενδομορφισμός του M. Επομένως $a_M \in \mathrm{End}_D(M)$ και $A_M \subseteq \mathrm{End}_D(M)$.

• $\mathrm{End}_D(M) \subseteq A_M$: Έστω τυχόν $f \in \mathrm{End}_D(M)$. Εξ ορισμού (πρβλ. 1.1.6) ισχύει

$$f(m\theta) = f(m)\theta \ , \text{ για κάθε } m \in M \ , \theta \in D \ . \tag{1.9}$$

Επειδή $M \subseteq A = A^{\circ}$, έχουμε τη δυνατότητα, για κάθε $m \in M$, να ορίσουμε την απεικόνιση

$$g_m : M \to A \ , \ x \mapsto g_m(x) := mx \ ,$$

όπου το $mx \in A$ είναι ο πολλαπλασιασμός του δακτυλίου A. Ωστόσο το M είναι δεξί ιδεώδες του A, οπότε $mx \in M$, για κάθε $m \in M$ και $x \in M$. Με άλλα λόγια έχουμε $g_m : M \to M$.

Ισχυρισμός : Για κάθε $m \in M$ ισχύει $g_m \in \mathrm{End}_A(M) := D$.

Πράγματι· σταθεροποιούμε ένα τυχόν $m \in M$ και θεωρούμε τυχαία $\mu \in M$ και $a \in A$. Τότε,

$$g_m(\mu a) = m(\mu a) = (m\mu)a = g_m(\mu)a \ ,$$

οπότε, βάσει της (1.2), πράγματι $g_m \in \mathrm{End}_A(M) := D$. ♢

Στο σημείο αυτό ας παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $\mu, \nu \in M$ και για το τυχόν $f \in \mathrm{End}_D(M)$ που επιλέξαμε αρχικά, ισχύει

$$f(\mu\nu) = f\big(g_\mu(\nu)\big) \overset{(1.8)}{=} f(\nu g_\mu) \overset{(1.9)}{=} f(\nu)g_\mu \overset{(1.8)}{=} g_\mu\big(f(\nu)\big) = \mu f(\nu) \ .$$

Επομένως,

$$f(\mu\nu) = \mu f(\nu) \ , \text{ για κάθε } \mu, \nu \in M \ . \tag{1.10}$$

Ας υποθέσουμε εν συνεχεία ότι το ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες M του A περιέχεται σε κάποιο ελαχιστοτικό ιδεώδες B του δακτυλίου A και ας σταθεροποιήσουμε ένα στοιχείο $\bar{n} \in M \setminus \{0\}$. Τότε το ιδεώδες $A\bar{n}A$ του A περιέχεται προφανώς στο ιδεώδες B και, επειδή το B είναι ελαχιστοτικό, κατ' ανάγκην $A\bar{n}A = B$. Ειδικότερα, το μοναδιαίο στοιχείο 1_B του B γράφεται υπό τη μορφή

$$1_B = \sum a_i \bar{n} b_i \ , \ \text{για κάποια } a_i, b_i \in A \, .$$

Για κάθε $m \in M$ έχουμε

$$m = m1_B = m \sum a_i \bar{n} b_i = \sum (ma_i)(\bar{n}b_i) \ ,$$

όπου τα ma_i και $\bar{n}b_i$ ανήκουν στο M, για κάθε δείκτη i. Επομένως, για κάθε $m \in M$, ισχύει

$$\begin{aligned} f(m) &= f\Big(\sum (ma_i)(\bar{n}b_i)\Big) = \sum f\big((ma_i)(\bar{n}b_i)\big) \\ &\overset{(1.10)}{=} \sum ma_i f(\bar{n}b_i) = m \sum a_i f(\bar{n}b_i) \, . \end{aligned}$$

Για το σταθεροποιημένο $\bar{n} \in M \setminus \{0\}$ ορίζουμε το στοιχείο $\alpha := \sum a_i f(\bar{n}b_i)$ του A. Τότε για κάθε $m \in M$ έχουμε $f(m) = m\alpha = \alpha_M(m)$, οπότε $f = \alpha_M \in A_M$ και ισχύει ο ζητούμενος εγκλεισμός. □

Θεώρημα 1.2.21 (Wedderburn)**.** *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και A μια semisimple F - άλγεβρα. Τότε :*

(i) Υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος διακεκριμένα ελαχιστοτικά ιδεώδη $B_1, \dots, B_n$ του A, για τα οποία μάλιστα ισχύει

$$A = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j .$$

(ii) Έαν τα $M_1, \dots, M_n$ είναι ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη του A τέτοια ώστε $M_i \subseteq B_i$, για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε το σύνολο $\{M_1, \dots, M_n\}$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων για τα μη ισόμορφα ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη του A. Ειδικότερα, αυτό αποτελεί ένα σύνολο αντιπροσώπων για τα μη ισόμορφα ανάγωγα A - modules. Επιπλέον, ισχύει

$$\operatorname{ann}(M_i) = \sum_{j \neq i} B_j \ . \tag{1.11}$$

(iii) Έστω ότι $\dim_F(M_i) := d_i$. Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει $B_i \cong \operatorname{End}_F(M_i)$ και επιπροσθέτως

$$\dim_F(A) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \ .$$

(iv) Κάθε ελαχιστοτικό ιδεώδες B_i είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα d_i το πλήθος αντιτύπων του M_i.

Απόδειξη. (i) Έστω B τυχόν ελαχιστοτικό ιδεώδες του A. Η άλγεβρα A είναι εξ υποθέσεως semisimple, οπότε, βάσει του θεωρήματος 1.2.16, το κανονικό A - module $A^\circ = A$ είναι c.r. Επειδή το B είναι A - submodule του A° η πρόταση 1.2.3 μας πληροφορεί ότι υπάρχει κάποιο A - submodule I του A° τέτοιο ώστε $A = B \oplus I$. Στο σημείο αυτό ας παρατηρήσουμε ότι το σκέλος (i) αποδεικνύεται άμεσα (με επαγωγή) εάν δείξει κανείς τα ακόλουθα :

(1) Ότι το I αποτελεί μια semisimple F - άλγεβρα, καθώς και ότι

(2) Κάθε άλλο ελαχιστοτικό ιδεώδες $C \neq B$ του A οφείλει να περιέχεται στο I.

Αποδεικνύουμε αρχικά το (1) : Ας ορίσουμε $X := \{x \in A \ : \ xB = 0\}$. Επειδή το B είναι ιδεώδες, και μάλιστα ισχύει $IB \subseteq I \cap B = 0$, έπεται άμεσα ότι το X αποτελεί ένα ιδεώδες του A με $I \subseteq X$. Επιπροσθέτως $\mathrm{Jac}(A) = 0$, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.11, το (δεξί) ιδεώδες B δεν μπορεί να είναι μηδενοδύναμο. Ειδικότερα, $B^2 \neq 0$ και $B \nsubseteq X$. Επομένως $B \cap X \subsetneqq B$ και, καθώς το B είναι ελαχιστοτικό, κατ' ανάγκην $B \cap X = 0$. Επίσης, ισχύει ότι

$$X = (B \oplus I) \cap X = (B \cap X) \oplus (I \cap X) = I \ ,$$

οπότε το I (όπως και το X) αποτελεί ένα ιδεώδες του A. Εάν λοιπόν ορίσουμε την απεικόνιση προβολής $f : A = B \oplus I \to I$, τότε αυτή είναι μια επιρριπιτική γραμμική απεικόνιση (με πυρήνα το B) η οποία, όπως άμεσα διαπιστώνουμε, μας δίνει έναν ισομορφισμό F - αλγεβρών $I \cong A/B$. Ωστόσο, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.18, το πηλίκο A/B αποτελεί μια semisimple άλγεβρα, οπότε κατ' επέκτασιν και το I αποτελεί μια semisimple άλγεβρα.
Για το (2) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εάν το $C \neq B$ είναι κάποιο ελαχιστοτικό ιδεώδες του A, τότε (προφανώς) $C \cap B = 0$ και άρα $CB \subseteq C \cap B = 0$. Με άλλα λόγια ισχύει ο εγκλεισμός $C \subseteq X = I$.

(ii) Επειδή το A διαθέτει εξ ορισμού πεπερασμένη διάσταση (υπεράνω του F), για κάθε ένα από τα ελαχιστοτικά ιδεώδη $B_1, \ldots, B_n$ μπορούμε να βρούμε ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη $M_1, \ldots, M_n$ του A, έτσι ώστε $M_i \subseteq B_i$, $i = 1, \ldots, n$. Αποδεικνύουμε αρχικά τη σχέση (1.11). Ας σταθεροποιήσουμε έναν τυχαίο δείκτη $i \in \{1, \ldots, n\}$. Επειδή $M_i \subseteq B_i$ και, για κάθε $j \neq i$, $B_i B_j \subseteq B_i \cap B_j = 0$, έχουμε άμεσα ότι

$$B_j \subseteq \mathrm{ann}(M_i) \, , \text{ για κάθε } j \neq i \, . \tag{1.12}$$

Επιπροσθέτως, το $\mathrm{ann}(M_i)$ αποτελεί ένα γνήσιο ιδεώδες του $A = B_1 + \cdots + B_n$, οποτε η σχέση (1.12) μας δίνει προφανώς ότι $B_i \nsubseteq \mathrm{ann}(M_i)$. Συνεπώς έχουμε $B_i \cap \mathrm{ann}(M_i) \subsetneqq B_i$ και, επειδή το B_i είναι ελαχιστοτικό ιδεώδες του A, κατ' ανάγκην $B_i \cap \mathrm{ann}(M_i) = 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, εάν τα I, J και K είναι τρία ιδεώδη του A, τότε ισχύει

$$(I + J) \cap K = (I \cap K) + (J \cap K)\ .$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{ann}(M_i) &= A \cap \mathrm{ann}(M_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) \cap \mathrm{ann}(M_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(B_j \cap \mathrm{ann}(M_i)\Big) = \sum_{j \neq i} \Big(B_j \cap \mathrm{ann}(M_i)\Big) + \Big(B_i \cap \mathrm{ann}(M_i)\Big) \\
&= \sum_{j \neq i} \Big(B_j \cap \mathrm{ann}(M_i)\Big) \overset{(1.12)}{=} \sum_{j \neq i} B_j\ ,
\end{aligned}$$

οπότε η σχέση (1.11) είναι αληθής. Εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι το $\{M_1, \ldots, M_n\}$ αποτελεί ένα σύνολο αντιπροσώπων για τα μη ισόμορφα ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη του A. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες του A είναι ισόμορφο με κάποιο εκ των M_i καθώς και ότι $M_i \ncong M_j$, για κάθε $i \neq j$. Έστω λοιπόν I ένα ελαχιστοτικό δεξί ιδεώδες του A. Τότε

$$I = IA = I(B_1 + \cdots + B_n) = IB_1 + \cdots + IB_n\ ,$$

οπότε υπάρχει κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$. τέτοιο ώστε $IB_i \neq 0$. Ας σταθεροποιήσουμε τον συγκεκριμένο δείκτη i.

Ισχυρισμός 1 : Έχουμε ότι $IB_i = I$ και ειδικότερα $I \subseteq B_i$

Πράγματι· επειδή το B_i είναι ιδεώδες, το IB_i αποτελεί ένα δεξί ιδεώδες του A, με $IB_i \subseteq I$. Ωστόσο το I είναι εξ υποθέσεως ελαχιστοτικό. Επομένως $IB_i = I$ και ειδικότερα $I \subseteq B_i$. $\diamondsuit$

Ισχυρισμός 2 : Υπάρχει κάποιο $x \in I$ τέτοιο ώστε $xM_i \neq 0$.

Πράγματι· Σύμφωνα με τον ισχυρισμό 1, για κάθε δείκτη $j \neq i$, ισχύει

$$IB_j = (IB_i)B_j = I(B_iB_j) \subseteq I(B_i \cap B_j) = 0\ .$$

Επομένως $B_j \subseteq \mathrm{ann}(I)$, για κάθε $j \neq i$. Επειδή προφανώς $\mathrm{ann}(I) \neq A$ και $A = B_1 + \cdots + B_n$, τούτο σημαίνει ότι $B_i \nsubseteq \mathrm{ann}(I)$. Τότε $\mathrm{ann}(I) \cap B_i \subsetneqq B_i$ και, επειδή το B_i είναι ελαχιστοτικό ιδεώδες, κατ' ανάγκην $\mathrm{ann}(I) \cap B_i = 0$. Ειδικότερα, για το $M_i \subseteq B_i$, έχουμε $\mathrm{ann}(I) \cap M_i = 0$. Επομένως άμεσα έπεται ότι $IM_i \neq 0$ και άρα ότι υπάρχει κάποιο $x \in I$ τέτοιο ώστε $xM_i \neq 0$. $\diamondsuit$

Επιλέγουμε το στοιχείο $x \in I$ καθώς και το μη τετριμμένο δεξί ιδεώδες xM_i

του A. Επειδή το I είναι δεξί ιδεώδες και $x \in I$, έχουμε ότι $0 \neq xM_i \subseteq I$. Ωστόσο το I είναι ελαχιστοτικό, οπότε κατ' ανάγκην $xM_i = I$. Τούτο μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την απεικόνιση $\phi : M_i \to I = xM_i$, με τύπο $\phi(a) = xa$. Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η $\phi : M_i \to I$ είναι ένας μη μηδενικός A - ομομορφισμός. Επειδή τόσο το M_i όσο και το I είναι ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη του A (και κατ' επέκτασιν ανάγωγα A - modules), το λήμμα του Schur 1.1.10 μας πληροφορεί ότι η ϕ αποτελεί έναν ισομορφισμό. Επομένως τελικά πράγματι $I \cong M_i$. Απομένει να δείξουμε ότι τα $M_1, \ldots, M_n$ είναι ανά ζεύγη μη ισόμορφα. Ας υποθέσουμε ότι $M_\kappa \cong M_\lambda$, για κάποιους δείκτες $\kappa, \lambda \in \{1, \ldots, n\}$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ισόμορφα A - modules διαθέτουν ίσους annihilators, οπότε $\mathrm{ann}(M_\kappa) = \mathrm{ann}(M_\lambda)$. Βάσει της σχέσεως (1.11), τούτο σημαίνει ότι

$$\sum_{j \neq \kappa} B_j = \sum_{j \neq \lambda} B_j$$

και άρα κατ' ανάγκην $\kappa = \lambda$. Τέλος, το ότι το $\{M_1, \ldots, M_n\}$ αποτελεί ένα σύνολο αντιπροσώπων για τα μη ισόμορφα ανάγωγα A - modules, είναι άμεση απόρροια της πρότασης 1.2.19 και των προηγουμένων.

(iii) Ας σταθεροποιήσουμε ένα τυχαίο δείκτη $i \in \{1, \ldots, n\}$. Για το ανάγωγο A - module M_i ορίζουμε $D := \mathrm{End}_A(M_i)$. Επειδή το σώμα F είναι εξ υποθέσεως αλγεβρικώς κλειστό, το λήμμα του Schur 1.1.10 μας πληροφορεί ότι $D = F$. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.20, έχουμε ότι

$$\mathrm{End}_F(M_i) = \mathrm{End}_D(M_i) = A_{M_i} \ .$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $A \to \mathrm{End}_F(M_i)$ που δίνεται στη σχέση (1.3). Τότε, όπως διαφαίνεται και από τον ορισμό 1.1.13, ισχύει

$$A/\mathrm{ann}(M_i) \cong A_{M_i} \ .$$

Επειδή $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ και, σύμφωνα με τη σχέση (1.11), $\mathrm{ann}(M_i) = \sum_{j \neq i} B_j$, έχουμε άμεσα ότι $A/\mathrm{ann}(M_i) = B_i$. Επομένως τελικά $\mathrm{End}_F(M_i) \cong B_i$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$. Επιπροσθέτως

$$\dim_F(B_i) = \dim_F\big(\mathrm{End}_F(M_i)\big) = \big(\dim_F(M_i)\big)^2 = d_i^2 \ , \tag{1.13}$$

οπότε

$$\dim_F(A) = \dim_F(B_1 \oplus \cdots \oplus B_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \ .$$

(iv) Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο δείκτη $i \in \{1, \ldots, n\}$. Επειδή το ελαχιστοτικό ιδεώδες B_i είναι ένα A - module και η άλγεβρα A είναι εξ υποθέσεως semisimple,

το πόρισμα 1.2.17 μας πληροφορεί ότι το B_i είναι c.r. Επομένως υπάρχουν κάποια ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\nu$ του A τέτοια ώστε $B_i = \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_\nu$. Στο σημείο αυτό ας παρατηρήσουμε ότι μια άμεση απόρροια του (ii) είναι ότι όλα τα ελαχιστοτικά δεξιά ιδεώδη του A, τα οποία περιέχονται σε ένα δεδομένο B_i, οφείλουν να είναι ισόμορφα με τον αντιπρόσωπο $M_i \subseteq B_i$. Επειδή προφανώς $\mathcal{M}_j \subseteq B_i$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, \nu\}$, έχουμε άμεσα ότι $\mathcal{M}_j \cong M_i$, για κάθε $j = 1, \ldots, \nu$. Απομένει συνεπώς να δειχθεί ότι $\nu = d_i := \dim_F(M_i)$. Επειδή

$$B_i = \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_\nu \cong M_i \oplus \cdots \oplus M_i \quad (\nu - \text{φορές}) ,$$

σύμφωνα με τη σχέση (1.13) ισχύει $d_i^2 = \nu \cdot d_i$ και άρα πράγματι $\nu = d_i$. □

1.3 Αναπαραστάσεις και χαρακτήρες

Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathrm{Mat}(n, F)$ των $(n \times n)$ πινάκων με εγγραφές από ένα σώμα F. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι το $\mathrm{Mat}(n, F)$ αποτελεί μια F - άλγεβρα. Επιπροσθέτως, με $\mathrm{GL}(n, F)$ θα συμβολίζουμε την πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρεψίμων $(n \times n)$ πινάκων.

Ορισμός 1.3.1. Έστω A μια F - άλγεβρα. Καλούμε **αναπαράσταση** της A έναν ομομορφισμό F - αλγεβρών $\mathcal{X} : A \to \mathrm{Mat}(n, F)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ο φυσικός αριθμός n καλείται **βαθμός της αναπαράστασης** και συμβολίζεται με $\deg(\mathcal{X})$. Εάν οι $\mathcal{X}_1$ και $\mathcal{X}_2$ είναι δυο αναπαραστάσεις της A, τότε αυτές καλούνται **ισοδύναμες** (και συμβολίζουμε $\mathcal{X}_1 \sim \mathcal{X}_2$) όταν διαθέτουν τον ίδιο βαθμό, ας πούμε $k \in \mathbb{N}$, και υπάρχει πίνακας $T \in \mathrm{GL}(k, F)$ τέτοιος ώστε

$$\mathcal{X}_2(\alpha) = T^{-1}\mathcal{X}_1(\alpha)T, \text{ για κάθε } \alpha \in A.$$

Προφανώς η σχέση $\sim$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.

Παρατήρηση 1.3.2. Οι αναπαραστάσεις μιας F - άλγεβρας A συνδέονται άμεσα με την έννοια των A - modules. Συγκεκριμένα :

(I) Εάν η $\mathcal{X} : A \to \mathrm{Mat}(n, F)$ είναι μια αναπαράσταση της A, τότε το $V = F^n$ (ο χώρος γραμμών υπεράνω του F) καθίσταται ένα A - module, μέσω του δεξιά πολλαπλασιασμού

$$v\alpha = v\mathcal{X}(\alpha), \text{ για κάθε } v \in V,\ \alpha \in A.$$

(II) Έαν το V είναι ένα A - module και το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια βάση του, τότε, για κάθε $\alpha \in A$, έχουμε

$$v_i\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j, \text{ για κάποια } a_{ij} \in F.$$

Ορίζοντας τον πίνακα $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, F)$, έχουμε άμεσα ότι η

$$\mathcal{X} : A \to \mathrm{Mat}(n, F)\ ,\ \alpha \mapsto (a_{ij})$$

είναι μια αναπαράσταση της F - άλγεβρας A.

Ορισμός 1.3.3. Έστω A μια F - άλγεβρα. Μια αναπαράσταση $\mathcal{X}$ της A καλείται **ανάγωγη**, όταν το αντίστοιχο A - module είναι ανάγωγο (υπό την έννοια του ορισμού 1.1.3).

Παρατήρηση 1.3.4. Έστω A μια F - άλγεβρα. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι δυο αναπαραστάσεις $\mathcal{X}_1$ και $\mathcal{X}_2$ της A είναι ισοδύναμες εάν και μόνον εάν τα αντίστοιχα A - modules είναι ισόμορφα. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια αμφίρριψη μεταξύ των κλάσεων ισομορφισμού των A - modules και των κλάσεων ισοδυναμίας των αναπαραστάσεων της F - άλγεβρας A. Ειδικότερα, βάσει του ορισμού 1.3.3, υπάρχει μια αμφίρριψη μεταξύ των κλάσεων ισομορφισμού των αναγώγων A - modules και των κλάσεων ισοδυναμίας των αναγώγων αναπαραστάσεων της F - άλγεβρας A.

Σημείωση 1.3.5. Ας θεωρήσουμε έναν F - διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης καθώς και το σύνολο των ενδομορφισμών του, $\mathrm{End}_F(V)$. Εάν $\dim_F(V) := n$, τότε, ως γνωστόν, υπάρχει ισομορφισμός (ο οποίος καθορίζεται από την επιλογή συγκεκριμένης βάσης για τον V), $\mathrm{End}_F(V) \cong \mathrm{Mat}(n, F)$. Τούτο μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε ισοδύναμα ως αναπαράσταση μιας F - άλγεβρας A, έναν ομομορφισμό F - αλγεβρών $\mathcal{X} : A \to \mathrm{End}_F(V)$. $\big($Στην περίπτωση αυτή προφανώς $\deg(\mathcal{X}) = \dim_F(V)\big)$. Ειδικότερα, σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, η σύνδεση με τα A - modules έχει ως εξής :

(I) Εάν η $\mathcal{X} : A \to \mathrm{End}_F(V)$ είναι μια αναπαράσταση της A, τότε το V καθίσταται ένα A - module, μέσω του δεξιά πολλαπλασιασμού

$$v\alpha = \mathcal{X}(\alpha)(v),\ \text{για κάθε } v \in V\ ,\ \alpha \in A.$$

(II) Αντιστρόφως, εάν το V είναι ένα A - module, τότε, για κάθε $\alpha \in A$, έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε τον ομομορφισμό F - αλγεβρών που δίνεται στη σχέση (1.3) :

$$\mathcal{X} : A \to \mathrm{End}_F(V)\ ,\ \alpha \mapsto \alpha_V .$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό 1.1.13, ισχύει ότι

$$\mathcal{X}(A) = A_V \quad \text{και} \quad \ker(\mathcal{X}) = \mathrm{ann}(V)\ . \tag{1.14}$$

Από εδώ και στο εξής με G θα συμβολίζουμε μια πεπερασμένη ομάδα.

Ορισμός 1.3.6. Έστω F ένα σώμα. Μια F **- αναπαράσταση** της G είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}(n, F)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ο φυσικός αριθμός n καλείται **βαθμός της αναπαράστασης** και συμβολίζεται με $\deg(\mathcal{X})$. Η έννοια της ισοδυναμίας δυο F - αναπαραστάσεων της G ορίζεται ακριβώς όπως και στον ορισμό 1.3.1.

Δεδομένης μιας πεπερασμένης ομάδας G κατασκευάζουμε μια συγκεκριμένη F - άλγεβρα, την λεγόμενη *άλγεβρα της ομάδας*.

Ορισμός 1.3.7. Έστω F ένα σώμα και G μια πεπερασμένη ομάδα. Ορίζουμε το σύνολο των τυπικών αθροισμάτων

$$F[G] := \left\{ \sum_{g \in G} a_g \, g \ : \ a_g \in F \right\} .$$

Επί του $F[G]$ ορίζουμε πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό με τον προφανή τρόπο. Συγκεκριμένα, εάν $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i + \sum_{i=1}^{n} b_i g_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) g_i \quad \text{και} \quad \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i g_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) g_i \ , \ \lambda \in F.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο το $F[G]$ καθίσταται F - διανυσματικός χώρος. Η ταύτιση των στοιχείων $g \in G$ με αυτά της $F[G]$ για τα οποία ισχύει $a_g = 1$ και $a_h = 0, \forall\, h \neq g$, μας δίδει τη δυνατότητα να θεωρούμε την G εμφυτευμένη εντός του $F[G]$. Ειδικότερα, η G αποτελεί μια βάση του $F[G]$ και

$$\dim_F\big(F[G]\big) = |G| < \infty \ . \tag{1.15}$$

Τέλος, εφοδιάζουμε το $F[G]$ με τον πολλαπλασιασμό της G επεκτεταμένο γραμμικά, δηλαδή

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h (gh) \ .$$

Με τον παραπάνω πολλαπλασιασμό το $F[G]$ αποτελεί μια F - άλγεβρα, την οποία και καλούμε **άλγεβρα της ομάδας** G (πάνω από το σώμα F).

Παρατήρηση 1.3.8. Οι F - αναπαραστάσεις της G συνδέονται κατά προφανή τρόπο με τις αναπαραστάσεις της F - άλγεβρας $F[G]$.

(i) Εάν η $\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ είναι μια F - αναπαράσταση της G, τότε, μέσω γραμμικής επεκτάσεως, αυτή καθορίζει μια αναπαράσταση της $F[G]$,

$$\mathfrak{X} : F[G] \to \mathrm{Mat}(n, F) \ , \ \ \mathfrak{X}\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g \mathcal{X}(g) \ .$$

(ii) Αντιστρόφως, εάν η $\mathfrak{X} : F[G] \to \mathrm{Mat}(n, F)$ είναι μια αναπαράσταση της F - άλγεβρας $F[G]$, τότε, μέσω του περιορισμού επί της $G \hookrightarrow F[G]$, καθορίζεται μια F - αναπαράσταση[3] της G,

$$\mathcal{X} = \mathfrak{X}|_G : G \to \mathrm{GL}(n, F) \ .$$

Λόγω των παραπάνω, θα συμβολίζουμε τις F - αναπαραστάσεις της G και τις αναπαραστάσεις της $F[G]$, με το ίδιο σύμβολο.

Σημείωση 1.3.9. Συνδυάζοντας τις παρατηρήσεις 1.3.2 και 1.3.8, έχουμε άμεσα τη σύνδεση ανάμεσα στις F - αναπαραστάσεις μιας ομάδας G και τα αντίστοιχα $F[G]$ - modules.

Ορισμός 1.3.10. Μια F - αναπαράσταση της G καλείται **ανάγωγη**, όταν το αντίστοιχο $F[G]$ - module είναι ανάγωγο. Σημειωτέον ότι η τετριμμένη αναπαράσταση $\mathcal{X} : G \to F$, με τύπο $\mathcal{X}(g) = 1_F$, για κάθε $g \in G$, θεωρείται (κατά σύμβασιν) επίσης ανάγωγη.

Παρατήρηση 1.3.11. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις 1.2.9 και 1.2.14, οι F - άλγεβρες $F[G]$ και $F[G]/\mathrm{Jac}\big(F[G]\big)$ διαθέτουν τα ίδια ανάγωγα modules και η δεύτερη εξ αυτών είναι semisimple. Τούτο σημαίνει ότι όταν μελετούμε αποκλειστικά το σύνολο των αναγώγων F - αναπαραστάσεων, μπορούμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, να υποθέτουμε ότι η F - άλγεβρα $F[G]$ είναι semisimple.

Θεώρημα 1.3.12. *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και $\mathcal{X} : F[G] \to \mathrm{End}_F(V)$ μια ανάγωγη αναπαράσταση της F - άλγεβρας $F[G]$. Τότε η $\mathcal{X}$ είναι επιρριπτική, $\mathcal{X}\big(F[G]\big) = \mathrm{End}_F(V)$.*

Απόδειξη. Επειδή η $\mathcal{X}$ είναι ανάγωγη, μπορούμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι η F - άλγεβρα $F[G]$ είναι semisimple (πρβλ. παρατήρηση 1.3.11). Έστω V το ανάγωγο $F[G]$ - module που αντιστοιχεί στην $\mathcal{X}$ και ας ορίσουμε $D := \mathrm{End}_{F[G]}(V)$. Επειδή το σώμα F είναι αλγεβρικώς κλειστό, το λήμμα του Schur 1.1.10 μας πληροφορεί ότι $D = F$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.20 και τη σχέση (1.14), έχουμε

$$\mathrm{End}_F(V) = \mathrm{End}_D(V) = F[G]_V = \mathcal{X}\big(F[G]\big) \ . \qquad \square$$

Πόρισμα 1.3.13. *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και G μια αβελιανή πεπερασμένη ομάδα. Τότε κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της $F[G]$ οφείλει να είναι βαθμού ένα.*

[3]Επειδή η $\mathfrak{X}$ είναι εξ ορισμού ομομορφισμός F - αλγεβρών, έχουμε ότι $\mathfrak{X}(1_G) = I_n$. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι το $\mathfrak{X}(g)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, με $\mathfrak{X}(g)^{-1} = \mathfrak{X}(g^{-1})$, $\forall\, g \in G$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X} : F[G] \to \mathrm{Mat}(d, F)$ μια ανάγωγη αναπαράσταση βαθμού d και ας σταθεροποιήσουμε τυχόν στοιχείο $g \in G$. Επειδή η G είναι εξ υποθέσεως αβελιανή, για κάθε στοιχείο $g' \in G$, έχουμε

$$\mathcal{X}(g)\mathcal{X}(g') = \mathcal{X}(gg') = \mathcal{X}(g'g) = \mathcal{X}(g')\mathcal{X}(g) .$$

Επομένως, όπως άμεσα διαπιστώνουμε, το $\mathcal{X}(g)$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο της εικόνας $\mathcal{X}\big(F[G]\big)$ και, κατ' επέκτασιν, σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.12, με κάθε στοιχείο του δακτυλίου πινάκων $\mathrm{Mat}(d, F)$. Κατ' ανάγκην λοιπόν ο πίνακας $\mathcal{X}(g)$ είναι της μορφής $\mathcal{X}(g) = \lambda_g I_d$, για κάποια σταθερά $\lambda_g \in F$. Ωστόσο, για να είναι μια τέτοια αναπαράσταση ανάγωγη, δεν μπορεί παρά να έχουμε $d = 1$. □

Προτού περάσουμε στην έννοια του χαρακτήρα μιας αναπαράστασης, ας δούμε κάποιες συνέπειες του θεωρήματος του Wedderburn 1.2.21 για τις αναπαραστάσεις της $F[G]$ καθώς και μια ικανή συνθήκη για να είναι η άλγεβρα $F[G]$ semisimple.

Θεώρημα 1.3.14. *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Τότε υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος ανάγωγες, μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις της $F[G]$. Επιπλέον, κάθε αναπαράσταση $\mathcal{X}$ της $F[G]$ είναι ισοδύναμη με μια αναπαράσταση σε άνω τριγωνική block μορφή*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 & & \square \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathcal{X}_n \end{pmatrix} , \tag{1.16}$$

με τα blocks της διαγωνίου να αντιστοιχούν σε ανάγωγες αναπαραστάσεις της $F[G]$.

Απόδειξη. Για το πρώτο σκέλος του θεωρήματος, επειδή ενδιαφερόμαστε μόνον για ανάγωγες αναπαραστάσεις, μπορούμε και πάλι (δίχως βλάβη της γενικότητας) να υποθέσουμε ότι η F - άλγεβρα $F[G]$ είναι semisimple (πρβλ. παρατήρηση 1.3.11). Βάσει της παρατήρησης 1.3.4, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος μη ισόμορφα ανάγωγα $F[G]$ - modules. Το τελευταίο ωστόσο είναι αληθές, σύμφωνα με το θεώρημα του Wedderburn 1.2.21. Για το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $F[G]$ είναι semisimple. Μπορούμε ωστόσο να θεωρήσουμε μια συνθετική σειρά (βλ. ορισμό 1.1.4)

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{n-1} \supset V_n = 0 ,$$

του $F[G]$ - module V το οποίο αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\mathcal{X}$ της $F[G]$. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, θεωρούμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις $\mathcal{X}_i$ της $F[G]$ που αντιστοιχούν στα ανάγωγα $F[G]$ - modules V_{i-1}/V_i. Τότε εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η αναπαράσταση $\mathcal{X}$ είναι ισοδύναμη με την αναπαράσταση που δίνεται στην μορφή (1.16). Σημειωτέον ότι κατά την 1.1.5, οι παράγοντες V_{i-1}/V_i είναι μοναδικά καθορισμένοι από το V μέχρις ισομορφισμού, οπότε, κατ' επέκτασιν, οι ανάγωγες αναπαραστάσεις $\mathcal{X}_i$ είναι μοναδικά καθορισμένες, μέχρις ισοδυναμίας, από την αναπαράσταση $\mathcal{X}$. □

Ορισμός 1.3.15. Όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις αναπαραστάσεις $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ που εμφανίζονται στα blocks της (1.16), καλούνται **ανάγωγες συνιστώσες** της αναπαράστασης $\mathcal{X}$.

Θεώρημα 1.3.16 (Maschke). *Έστω F ένα σώμα του οποίου η χαρακτηριστική δεν διαιρεί την τάξη της ομάδας G. Τότε η άλγεβρα $F[G]$ είναι semisimple.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το πόρισμα 1.2.17 και την πρόταση 1.2.3, αρκεί να δείξουμε ότι εάν το V είναι τυχόν $F[G]$ - module και το $U \subseteq V$ ένα $F[G]$ - submodule του, τότε υπάρχει κάποιο $F[G]$ - submodule $W \subseteq V$, τέτοιο ώστε $V = U \oplus W$. Έστω λοιπόν T ένας υπόχωρος του F - διανυσματικού χώρου V τέτοιος ώστε $V = U \oplus T$ και έστω $f : V \to U$ η αντίστοιχη προβολή στον παράγοντα U. Επειδή εξ υποθέσεως η χαρακτηριστική του σώματος F δεν διαιρεί το $|G|$, έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε απεικόνιση $\widehat{f} : V \to U$, μέσω του τύπου

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} f(vg)\, g^{-1} \text{ , για κάθε } v \in V.$$

Επειδή η f είναι εξ ορισμού γραμμική απεικόνιση, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $\widehat{f}$ είναι επίσης γραμμική. Επιπροσθέτως, για κάθε $h \in G$, έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(vh) &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} f(vhg)g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} f(vhg)(hg)^{-1}h \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\bar{g} \in G} f(v\bar{g})\bar{g}^{-1}h \\ &= \widehat{f}(v)\, h \text{ ,} \end{aligned} \tag{1.17}$$

όπου για κάθε $g \in G$ και για σταθερό $h \in G$ έχουμε ορίσει $\bar{g} := hg \in G$. Η σχέση (1.17) μας πληροφορεί ότι η απεικόνιση $\widehat{f} : V \to U$ είναι στην πραγματικότητα ένας $F[G]$ - ομομορφισμός (πρβλ. ορισμό 1.1.6).
Ισχυρισμός : Για κάθε $u \in U$ ισχύει ότι $\widehat{f}(u) = u$.
Πράγματι· επειδή η $f : U \oplus T \to U$ είναι προβολή και επειδή, για κάθε $g \in G$ και

$u \in U$, έχουμε $ug \in U$, ισχύει ότι $f(ug) = ug$. Επομένως, εάν $u \in U$, τότε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(u) &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} f(ug)\, g^{-1} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} (ug)\, g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} u = \frac{|G|}{|G|} u = u \end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. $\diamondsuit$

Ας ορίσουμε $W := \ker(\widehat{f})$. Βάσει του ορισμού 1.1.6, το W αποτελεί ένα $F[G]$ - submodule του V. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τον προηγούμενο ισχυρισμό, για κάθε $v \in V$ έχουμε $\widehat{f}\left(\widehat{f}(v)\right) = \widehat{f}(v)$, οπότε

$$\widehat{f}\left(v - \widehat{f}(v)\right) = \widehat{f}(v) - \widehat{f}\left(\widehat{f}(v)\right) = \widehat{f}(v) - \widehat{f}(v) = 0 \,.$$

Συνεπώς $v - \widehat{f}(v) \in W$, για κάθε $v \in V$, και

$$v = \widehat{f}(v) + \left(v - \widehat{f}(v)\right) \in U + W \,.$$

Ως εκ τούτου $V = U + W$. Τέλος, σύμφωνα με τον προηγούμενο ισχυρισμό, εάν $x \in U \cap W$, τότε $0 = \widehat{f}(x) = x$, οπότε $V = U + W = U \oplus W$. $\square$

Ορισμός 1.3.17. Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και έστω $\mathcal{X}$ μια F - αναπαράσταση της G. Ορίζουμε συνάρτηση $\chi : G \to F$ μέσω του τύπου

$$\chi(g) := \operatorname{tr}\big(\mathcal{X}(g)\big), \text{ για κάθε } g \in G.$$

Η παραπάνω συνάρτηση καλείται F **- χαρακτήρας της αναπαράστασης** $\mathcal{X}$.

Στην περίπτωση όπου η αναπαράσταση $\mathcal{X}$ είναι ανάγωγη, ο αντίστοιχος χαρακτήρας καλείται *ανάγωγος*. Εάν το $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n\}$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αναγώγων F - αναπαραστάσεων και $\chi_1, \ldots, \chi_n$ είναι οι αντίστοιχοι ανάγωγοι F - χαρακτήρες, τότε το σύνολο $\{\chi_i : i = 1, \ldots, n\}$ θα συμβολίζεται με $\operatorname{Irr}_F(G)$. Ειδικότερα, όταν το σώμα F είναι το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, θα συμβολίζουμε το $\operatorname{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ απλώς με $\operatorname{Irr}(G)$.

Παρατήρηση 1.3.18. Έστω $\mathcal{X}$ μια $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση της G βαθμού d και έστω χ ο αντίστοιχος $\mathbb{C}$ - χαρακτήρας της. Τότε $\chi(1) = \operatorname{tr}\big(\mathcal{X}(1)\big) = \operatorname{tr}(I_d) = d$, οπότε ισχύει η ισότητα

$$\chi(1) = \deg(\mathcal{X}) \,. \tag{1.18}$$

Κατ' αναλογίαν με την παρατήρηση 1.3.8, μπορούμε να θεωρούμε τους F - χαρακτήρες της G ως συναρτήσεις της F -άλγεβρας $F[G]$.

Ορισμός 1.3.19. Ορίζουμε τον **πυρήνα** ενός χαρακτήρα χ της G ως

$$\ker(\chi) := \{g \in G \ : \ \chi(g) = \chi(1)\} \ .$$

Ο πυρήνας $\ker(\chi)$ αποτελεί κανονική υποομάδα της G. Ένας χαρακτήρας χ καλείται **πιστός** όταν $\ker(\chi) = \{1\}$.

Πρόταση 1.3.20. *Ισχύει η ισότητα*

$$|G| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 \ .$$

Απόδειξη. Έστω $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αναγώγων αναπαραστάσεων της $\mathbb{C}$ - άλγεβρας $\mathbb{C}[G]$ και $\chi_1, \ldots, \chi_k$ οι αντίστοιχοι $\mathbb{C}$ - χαρακτήρες, έτσι ώστε $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Έστω ακόμα $\{M_1, \ldots, M_k\}$ το αντίστοιχο σύνολο αντιπροσώπων των μη ισόμορφων αναγώγων $\mathbb{C}[G]$ - modules. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι

$$d_i := \dim_{\mathbb{C}}(M_i) = \deg(\mathcal{X}_i) \ , \ \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k \ .$$

Βάσει του θεωρήματος του Maschke 1.3.16, η άλγεβρα $\mathbb{C}[G]$ είναι semisimple, οπότε έχουμε τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Wedderburn 1.2.21 (για $A = \mathbb{C}[G]$). Ειδικότερα, το σκέλος (iii) του εν λόγω θεωρήματος σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1.15) και (1.18) μας δίνει

$$|G| = \dim_{\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}[G]\big) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \big(\chi_i(1)\big)^2 \ . \qquad \square$$

Πρόταση 1.3.21. *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Τότε δυο ισοδύναμες F - αναπαραστάσεις της G διαθέτουν ίσους F - χαρακτήρες. Επίσης, οι F - χαρακτήρες είναι σταθεροί στις κλάσεις συζυγίας της G.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}_1$ και $\mathcal{X}_2$ δυο ισοδύναμες F - αναπαραστάσεις της G και έστω χ_1 και χ_2 οι αντίστοιχοι F - χαρακτήρες. Εξ ορισμού, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $T \in \mathrm{GL}(n, F)$, τέτοιος ώστε

$$\mathcal{X}_2(g) = T^{-1}\mathcal{X}_1(g)T \ , \ \forall\, g \in G \ .$$

Τούτο όμως σημαίνει ότι οι $\mathcal{X}_1(g)$ και $\mathcal{X}_2(g)$ διαθέτουν τις ίδιες ιδιοτιμές και κατ' επέκτασιν ίσα ίχνη. Επομένως $\chi_1 = \chi_2$.
Έστω τώρα $\mathcal{X}$ μια F - αναπαράσταση της G και χ ο αντίστοιχος F - χαρακτήρας. Έστω ακόμα τυχόν $g \in G$. Τότε, για κάθε $a \in G$, έχουμε

$$\mathcal{X}(aga^{-1}) = \mathcal{X}(a)\mathcal{X}(g)\mathcal{X}(a)^{-1},$$

οπότε οι πίνακες $\mathcal{X}(aga^{-1})$ και $\mathcal{X}(g)$ διαθέτουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Οπώς και προηγουμένως,

$$\chi(aga^{-1}) = \chi(g) \ , \ \text{για κάθε } a \in G \, , \, g \in G \, . \qquad \square$$

Πρόταση 1.3.22. *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Τότε, τα αθροίσματα F - χαρακτήρων είναι F - χαρακτήρες. Επιπροσθέτως, κάθε F - χαρακτήρας είναι ένας $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ - γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου $\mathrm{Irr}_F(G)$.*

Απόδειξη. Για το πρώτο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εάν οι $\mathcal{X}$ και Ψ είναι δυο F - αναπαραστάσεις με αντίστοιχους F - χαρακτήρες τους χ και ψ, τότε μπορούμε να ορίσουμε F - αναπαράσταση $\mathcal{W}$,

$$\mathcal{W}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}(g) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(g) \end{pmatrix} \, ,$$

για την οποία ισχύει $\mathrm{tr}\big(\mathcal{W}(g)\big) = \chi + \psi$. Ως προς το δεύτερο, σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.14, κάθε F - αναπαράσταση $\mathcal{X}$ είναι ισοδύναμη με μια F - αναπαράσταση σε άνω τριγωνική block μορφή (1.16), με τα blocks της διαγωνίου $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ να είναι ανάγωγες F - αναπαραστάσεις. Έστω χ ο F - χαρακτήρας της τυχαίας αναπαράστασης $\mathcal{X}$. Επειδή όμοιοι πίνακες διαθέτουν ίσα ίχνη, έχουμε

$$\chi(g) = \mathrm{tr}\big(\mathcal{X}(g)\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\big(\mathcal{X}_i(g)\big) \ , \ \forall \, g \in G,$$

όπου τα $\chi_i(g) := \mathrm{tr}\big(\mathcal{X}_i(g)\big)$ είναι στοιχεία του συνόλου $\mathrm{Irr}_F(G)$. $\square$

Θεώρημα 1.3.23. *Έστω F ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Τότε, το σύνολο $\mathrm{Irr}_F(G)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο πάνω από το F.*

Απόδειξη. Έστω $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αναγώγων αναπαραστάσεων της F - άλγεβρας $F[G]$ και $\chi_1, \ldots, \chi_k$ οι αντίστοιχοι F - χαρακτήρες, έτσι ώστε $\mathrm{Irr}_F(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Κατά τον συμβολισμό του θεωρήματος του Wedderburn 1.2.21, θεωρούμε ακόμα $\{M_1, \ldots, M_k\}$ να είναι το αντίστοιχο σύνολο αντιπροσώπων των μη ισόμορφων αναγώγων $F[G]$ - modules και $\{B_1, \ldots, B_k\}$ το σύνολο των διακεκριμένων ελαχιστοτικών ιδεωδών της $F[G]$ $\big($έτσι ώστε $M_i \subseteq B_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, k\big)$. Επειδή το ζητούμενο αφορά μόνον το σύνολο των αναγώγων αναπαραστάσεων, μπορούμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\mathrm{Jac}\big(F[G]\big) = 0$ (πρβλ. παρατήρηση 1.3.11) και άρα ότι η F - άλγεβρα $F[G]$ είναι semisimple. Σύμφωνα με το θεώρημα του Wedderburn 1.2.21,

$$F[G] = \bigoplus_{i=1}^{k} B_i \tag{1.19}$$

και, συνδυάζοντας τη σχέση (1.14),

$$\ker(\mathcal{X}_i) = \mathrm{ann}(M_i) = \sum_{j \neq i} B_j \ . \tag{1.20}$$

Επίσης, κατά το θεώρημα 1.3.12,

$$\mathcal{X}_i\big(F[G]\big) = \mathrm{End}_F(M_i) \ . \tag{1.21}$$

Βάσει της (1.21), για κάθε $i = 1, \ldots, k$, μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία $b_i \in F[G]$, τέτοια ώστε $\mathcal{X}_i(b_i) = 1_{M_i}$. Σημειωτέον ότι, λόγω της (1.19) και της (1.20), μπορούμε να επιλέξουμε τα $b_i \in B_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$\mathcal{X}_i(b_j) = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1_{M_i} & , \quad i = j \end{cases}$$

και κατ' επέκτασιν, για τους F - χαρακτήρες,

$$\chi_i(b_j) = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \ .$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $a_1\chi_1 + \cdots + a_k\chi_k = 0$, για κάποια $a_1, \ldots, a_k \in F$. Τότε,

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\chi_1(b_1) + a_2\chi_2(b_1) + \cdots + a_k\chi_k(b_1) = a_1 \ , \\ 0 &= a_1\chi_1(b_2) + a_2\chi_2(b_2) + \cdots + a_k\chi_k(b_2) = a_2 \end{aligned}$$

και ομοίως καταλήγουμε στο ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. □

Ορισμός 1.3.24. Οι συναρτήσεις της μορφής $\phi : G \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι σταθερές στις κλάσεις συζυγίας της G, καλούνται **class functions** της ομάδας G. Το σύνολο αυτών αποτελεί έναν $\mathbb{C}$ - διανυσματικό χώρο τον οποίο και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{C}f(G)$. Είναι προφανές ότι μια βάση του συγκεκριμένου χώρου δίνεται από τις συναρτήσεις εκείνες, οι οποίες παίρνουν την τιμή 1 σε ακριβώς μία κλάση συζυγίας και την τιμή 0 σε όλες τις υπόλοιπες. Με άλλα λόγια, εάν με $\mathcal{C}l(G)$ συμβολίσουμε το σύνολο των διακεκριμένων κλάσεων συζυγίας της ομάδας G, έχουμε ότι

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{C}f(G)\big) = |\mathcal{C}l(G)| \ . \tag{1.22}$$

Σημειωτέον ότι, βάσει της προτάσεως 1.3.21, ισχύει ο εγκλεισμός $\mathrm{Irr}(G) \subseteq \mathcal{C}f(G)$.

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα αποδεικνύοντας ότι το σύνολο $\mathrm{Irr}(G)$ αποτελεί μια $\mathbb{C}$ - βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{C}f(G)$. Προτού δώσουμε την απόδειξη γι' αυτό, μελετούμε το κέντρο της $\mathbb{C}$ - άλγεβρας $\mathbb{C}[G]$.

Ορισμός 1.3.25. Ορίζουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{C}$ - διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}[G]$,

$$\mathrm{Z}\big(\mathbb{C}[G]\big) := \big\{x \in \mathbb{C}[G] \ : \ xy = yx \ , \text{για κάθε } y \in \mathbb{C}[G]\big\}$$

και τον καλούμε **κέντρο** της $\mathbb{C}[G]$. Σημειωτέον ότι το κέντρο μιας ομάδας G ορίζεται ως το σύνολο

$$\mathbf{Z}(G) := \{g \in G \ : \ gx = xg \, , \ \forall\, x \in G\}$$

και αποτελεί προφανώς μια αβελιανή κανονική υποομάδα της G.

Πρόταση 1.3.26. *Έστω V ένα ανάγωγο $\mathbb{C}[G]$ - module και $x \in \mathrm{Z}\big(\mathbb{C}[G]\big)$. Τότε υπάρχει κάποιο $z \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $vx = zv$, για κάθε $v \in V$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathrm{Z}\big(\mathbb{C}[G]\big)$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$x_V : V \to V \ , \ v \mapsto vx \ ,$$

που επάγεται από τον δεξιά πολλαπλασιασμό του $\mathbb{C}[G]$ - module V. Επειδή

$$x_V(vr) = vrx = vxr = x_V(v)\, r \ , \ \forall\, v \in V \, , \ r \in \mathbb{C}[G] \ ,$$

η απεικόνιση x_V είναι ένας $\mathbb{C}[G]$ - ενδομορφισμός του V (πρβλ. ορισμό 1.1.6). Επειδή το V είναι ανάγωγο και το σώμα $\mathbb{C}$ αλγεβρικώς κλειστό, το λήμμα του Schur 1.1.10 μας πληροφορεί ότι

$$x_V \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V) = \mathbb{C} \cdot 1_V \ .$$

Επμένως, για κάθε $v \in V$, υπάρχει κάποιο $z \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $vx = zv$. $\square$

Ορισμός 1.3.27. Έστω $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ οι διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας της G. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ ορίζουμε τα στοιχεία της $\mathbb{C}[G]$,

$$\widehat{\mathcal{C}_i} := \sum_{g \in \mathcal{C}_i} g \in \mathbb{C}[G] \ .$$

Λήμμα 1.3.28. *Εάν $\mathcal{C}$ είναι μια κλάση συζυγίας της G, τότε $\widehat{\mathcal{C}} \in \mathrm{Z}\big(\mathbb{C}[G]\big)$.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν στοιχείο $g \in G$ και $a_i g a_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$ όλα τα διακεκριμένα συζυγή στοιχεία του, έτσι ώστε το

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}(g) = \{a_1 g a_1^{-1}, \ldots, a_n g a_n^{-1}\}$$

να είναι η κλάση συζυγίας του. Τότε εξ ορισμού

$$\widehat{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{n} a_i g a_i^{-1}$$

και, για κάθε $h \in G$, έχουμε προφανώς ότι

$$h\,\widehat{\mathcal{C}}\,h^{-1} = \sum_{i=1}^{n} h\,(a_i g a_i^{-1})\,h^{-1} = \sum_{i=1}^{n} (ha_i)g(ha_i)^{-1} = \widehat{\mathcal{C}}\ .$$

Επομένως $h\,\widehat{\mathcal{C}}\,h^{-1} = \widehat{\mathcal{C}}$ και $h\,\widehat{\mathcal{C}} = \widehat{\mathcal{C}}\,h$. Επειδή το $\widehat{\mathcal{C}}$ μετατίθεται με κάθε $h \in G$ έχουμε άμεσα ότι μετατίθεται και με όλα τα στοιχεία $\sum a_h\, h$ της $\mathbb{C}[G]$. Επομένως πράγματι $\widehat{\mathcal{C}} \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$. □

Θεώρημα 1.3.29. *Εάν $\mathcal{C}l(G) = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m\}$, τότε το σύνολο $\{\widehat{\mathcal{C}}_1, \ldots, \widehat{\mathcal{C}}_m\}$ αποτελεί μια βάση του κέντρου της $\mathbb{C}[G]$. Ειδικότερα,*

$$\dim_{\mathbb{C}}\Big(\mathrm{Z}\big(\mathbb{C}[G]\big)\Big) = |\mathcal{C}l(G)|\ . \tag{1.23}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B} := \{\widehat{\mathcal{C}}_1, \ldots, \widehat{\mathcal{C}}_m\}$. Κατ' αρχάς, σύμφωνα με το λήμμα 1.3.28, έχουμε ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1\widehat{\mathcal{C}}_1 + \cdots + \lambda_m\widehat{\mathcal{C}}_m = 0\ .$$

Επειδή, ως γνωστόν, οι διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας μιας ομάδας είναι ανά ζεύγη ξένες, η παραπάνω ισότητα μας δίνει άμεσα $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι $\mathbb{C}$ - γραμμικώς ανεξάρτητο. Εστω τώρα $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ και ας θεωρήσουμε τυχόν στοιχείο του κέντρου της $\mathbb{C}[G]$,

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_k g_k \in \mathrm{Z}\big(\mathbb{C}[G]\big)\ ,\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}\ . \tag{1.24}$$

Ισχυρισμός : Στην γραφή (1.24) εάν τα g_i και g_j είναι συζυγή τότε $a_i = a_j$.
Πράγματι· έστω ότι $g_i = hg_jh^{-1}$ για κάποιο $h \in G$. Επειδή $x \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$ έχουμε $xh = hx$ και $x = hxh^{-1}$. Επομένως η σχέση (1.24) μας δίνει

$$\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell g_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell h g_\ell h^{-1} = \sum_{\ell \neq j} a_\ell h g_\ell h^{-1} + a_j g_i\ . \tag{1.25}$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του στοιχείου g_i στη σχέση (1.25) έχουμε άμεσα το ζητούμενο. ♢

Βάσει του ισχυρισμού μπορούμε να υποθέσουμε ότι, όταν το στοιχείο $g \in G$ ανήκει στην κλαση συζυγίας $\mathcal{C}_i$, οι συντελεστές a_g της (1.24) παίρνουν την (σταθερή) τιμή $z_i \in \mathbb{C}$, όπου $i \in \{1, \ldots, m\}$. Ως εκ τούτου

$$x = z_1\widehat{\mathcal{C}}_1 + \cdots + z_m\widehat{\mathcal{C}}_m\ ,$$

οπότε το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει ολόκληρο το κέντρο $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$, υπεράνω του $\mathbb{C}$. □

Θεώρημα 1.3.30. *Ισχύει η ισότητα* $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathcal{C}l(G)|$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το $\{M_1, \ldots, M_k\}$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων από τα μη ισόμορφα ανάγωγα $\mathbb{C}[G]$ - modules και ότι τα $\chi_1, \ldots, \chi_k$ είναι οι αντίστοιχοι ανάγωγοι $\mathbb{C}$ - χαρακτήρες, έτσι ώστε $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ και $|\mathrm{Irr}(G)| = k$. Έστω ακόμα ότι $|\mathcal{C}l(G)| = m$. Βάσει του θεωρήματος 1.3.23, το σύνολο $\mathrm{Irr}(G) \subseteq \mathcal{C}f(G)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υπεράνω του $\mathbb{C}$, επομένως παράγει έναν υπόχωρο του $\mathbb{C}$ - διανυσματικού χώρου $\mathcal{C}f(G)$. Λόγω της σχέσεως (1.22) έχουμε άμεσα $k \leq m$. Απομένει συνεπώς να δειχθεί ότι $m \leq k$.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Maschke 1.3.16, η άλγεβρα $\mathbb{C}[G]$ είναι semisimple. Επειδή το σώμα $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, το θεώρημα του Wedderburn 1.2.21 μας πληροφορεί ότι

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{i=1}^{k} B_i \ ,$$

όπου κάθε ελαχιστοτικό ιδεώδες B_i είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα (πεπερασμένου πλήθους) αντιτύπων του M_i. Ειδικότερα, για το $1 \in \mathbb{C}[G]$, έχουμε ότι

$$1 = \beta_1 + \cdots + \beta_k \ , \ \text{ για κάποια } \ \beta_1 \in B_1, \ldots, \beta_k \in B_k \ .$$

Ας θεωρήσουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{C}[G]$ που παράγεται από τα $\beta_1, \ldots, \beta_k$:

$$W := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\beta_1, \ldots, \beta_k) \ .$$

Επειδή, σύμφωνα με τη σχέση (1.23),

$$\dim_{\mathbb{C}}\Big(\mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])\Big) = m$$

και $\dim_{\mathbb{C}}(W) = k$, για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δειχθεί ο εγκλεισμός $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[G]) \subseteq W$. Έστω λοιπόν τυχόν στοιχείο $x \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$. Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.3.26 σε κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}[G]$ - module M_i, μπορούμε να βρούμε μιγαδικούς αριθμούς $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$$m_i x = z_i m_i \ , \ \text{για κάθε } m_i \in M_i \ .$$

Επειδή κάθε ιδεώδες B_i είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα αντιτύπων του M_i, παρατηρούμε άμεσα ότι η παραπάνω σχέση ισχύει ως έχει και για όλα τα στοιχεία $b_i \in B_i$. Ειδικότερα,

$$\beta_i x = z_i \beta_i \ , \ \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k \ . \tag{1.26}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} x &= 1\,x = (\beta_1 + \cdots + \beta_k)\,x = \beta_1 x + \cdots + \beta_k x \\ &\overset{(1.26)}{=} z_1\beta_1 + \cdots + \zeta_k \beta_k \end{aligned}$$

και τελικά ισχύει ο ζητούμενος εγκλεισμός. $\square$

Πόρισμα 1.3.31. *Το σύνολο* $\mathrm{Irr}(G)$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathbb{C}$ *- διανυσματικού χώρου* $\mathcal{C}f(G)$.

Απόδειξη. Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τούτο είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος 1.3.23, της σχέσης (1.22) καθώς και του θεωρήματος 1.3.30. □

1.4 Επαγόμενοι χαρακτήρες

Ορισμός 1.4.1. Έστω χ ένας μιγαδικός χαρακτήρας της ομάδας G και έστω $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$. Βάσει της προτάσεως 1.3.22,

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_i \,, \quad \text{για κάποια} \;\; a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,.$$

Τα $\chi_j \in \mathrm{Irr}(G)$ για τα οποία ισχύει $a_j > 0$ καλούνται **ανάγωγες συνιστώσες** του χαρακτήρα χ.

Ορισμός 1.4.2. Έστω χ μια class function της ομάδας G και έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα. Άμεσα διαπιστώνουμε ότι ο **περιορισμός** $\chi|_H$ αποτελεί μια class function της ομάδας H, την οποία και συμβολίζουμε με χ_H. Με όμοιο τρόπο ορίζεται (και συμβολίζεται) και ο περιορισμός στην H οποιουδήποτε μιγαδικού χαρακτήρα της G. Σημειωτέον ότι εάν ο χ είναι ο ανάγωγος, δεν ισχύει κατ' ανάγκην $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$.

Ορισμός 1.4.3. Εάν τα χ, ψ είναι δυο class functions της G, ορίζουμε το **εσωτερικό γινόμενο** αυτών, ως τον μιγαδικό αριθμό

$$[\chi, \psi] := \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} \,,$$

όπου το $\overline{\psi(g)}$ είναι ο συζυγής του $\psi(g) \in \mathbb{C}$. Με όμοιο τρόπο ορίζεται ειδικότερα και το εσωτερικό γινόμενο δυο μιγαδικών χαρακτήρων της G.

Εν συνεχεία διατυπώνουμε την κλασσική (πρώτη) σχέση ορθογωνότητας για α-νάγωγους μιγαδικούς χαρακτήρες (μια απόδειξη αυτού μπορεί να βρεθεί στο [Is1], πόρισμα 2.14, σελ. 20).

Πρόταση 1.4.4 (Πρώτη σχέση ορθογωνιότητας)**.** *Έστω* $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ *και* $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{Irr}(G)$. *Τότε ισχύει η σχέση* $[\chi_i, \chi_j] = \delta_{ij}$, *όπου* δ_{ij} *είναι η συνάρτηση του Krönecker :*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \,.$$

Λήμμα 1.4.5. *Εαν τα χ, ψ είναι δυο μιγαδικοί χαρακτήρες της G, τότε*

$$[\chi, \psi] = [\psi, \chi] \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ .$$

Επιπροσθέτως, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ εάν και μόνον εάν ισχύει $[\chi, \chi] = 1$.

Απόδειξη. Έστω $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ και ας υποθέσουμε ότι

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} n_i \chi_i \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_i \ ,$$

για κάποια $n_i, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i = 1, \ldots, k$. Με την βοήθεια της πρώτης σχέσης ορθογωνιότητας 1.4.4, διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$[\chi, \psi] = \sum_{i=1}^{k} n_i m_i = \sum_{i=1}^{k} m_i n_i \ ,$$

οπότε $[\chi, \psi] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $[\chi, \psi] = [\psi, \chi]$. Επιπροσθέτως, ο χαρακτήρας χ είναι ανάγωγος εάν και μόνον εάν υπάρχει ακριβώς ένας δείκτης $j \in \{1, \ldots, k\}$, τέτοιος ώστε $n_j = 1$ και $n_i = 0$, για κάθε $i \neq j$. Επειδή $[\chi, \chi] = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$, το τελευταίο ισοδυναμεί με το ότι $[\chi, \chi] = 1$. □

Λήμμα 1.4.6. *Έστω χ μια μη μηδενική*[4] *class function της ομάδας G. Εάν για κάθε $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ ισχύει ότι $[\chi, \psi] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, τότε το χ αποτελεί έναν μιγαδικό χαρακτήρα της G.*

Απόδειξη. Επειδή, βάσει του πορίσματος 1.3.31, το σύνολο $\mathrm{Irr}(G) := \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathbb{C}$ - διανυσματικού χώρου $\mathcal{C}f(G)$, το χ γράφεται υπό την μορφή $\chi = a_1\chi_1 + \ldots + a_n\chi_n$, για κάποιους μιγαδικούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$. Η πρώτη σχέση ορθογωνιότητας 1.4.4 σε συνδυασμό με το ότι εξ υποθέσεως ισχύει $[\chi, \chi_i] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, μας δίνει άμεσα ότι $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ειδικότερα, το χ (ως άθροισμα χαρακτήρων) αποτελεί πράγματι έναν μιγαδικό χαρακτήρα. □

Εν συνεχεία, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι, για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ μιας ομάδας G, ισχύει η σχέση $\chi(1) \,\big|\, |G|$.

Ορισμός 1.4.7. Καλούμε ένα στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ **αλγεβρικό ακέραιο** όταν υπάρχει κάποιο *μονικό* πολυώνυμο $f \in \mathbb{Z}[x]$ τέτοιο ώστε $f(z) = 0$. Το σύνολο όλων των αλγεβρικών ακεραίων αποτελεί έναν υποδακτύλιο του $\mathbb{C}$ τον οποίο και συμβολίζουμε με $\mathbb{A}$.

[4] Ως **μηδενική class function** θεωρούμε την σταθερή συνάρτηση $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto 0$. Επειδή, σύμφωνα με τη σχέση (1.18), ισχύει $\chi(1) = \deg(\mathcal{X})$, η μηδενική class function αδυνατεί προφανώς να είναι ένας χαρακτήρας.

Παρατήρηση 1.4.8. Αποδεικνύεται ότι εάν ο χ είναι ένας μιγαδικός χαρακτήρας της ομάδας G, τότε οι τιμές $\chi(g)$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι, για κάθε $g \in G$ (βλ. [Is1], πόρισμα 3.6, σελ. 35). Επιπροσθέτως πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ισχύει $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, δηλαδή ότι οι μόνοι ρητοί αλγεβρικοί ακέραιοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί.

Ορισμός 1.4.9. Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ένας μιγαδικός ανάγωγος χαρακτήρας, ο οποίος ας υποθέσουμε ότι αντιστοιχεί σε μια αναπαράσταση $\mathcal{X}$, βαθμού d. Έστω ακόμα z τυχόν στοιχείο του κέντρου $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$ της άλγεβρας $\mathbb{C}[G]$. Τότε ο πίνακας $\mathcal{X}(z)$ μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της εικόνας $\mathcal{X}(\mathbb{C}[G]) = \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, d)$, οπότε υπάρχει κάποιος μιγαδικός αριθμός $\lambda_z \in \mathbb{C}$, τέτοιος ώστε $\mathcal{X}(z) = \lambda_z I_d$ (πρβλ. απόδειξη του πορίσματος 1.3.13). Έχουμε τη δυνατότητα επομένως να ορίσουμε, για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, συνάρτηση $\omega_\chi : \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$, μέσω του τύπου $\omega_\chi(z) = \lambda_z$.

Λήμμα 1.4.10. *Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ και $\mathcal{C}$ μια κλάση συζυγίας της G. Έστω ακόμα*

$$\widehat{\mathcal{C}} := \sum_{x \in \mathcal{C}} x \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G]) ,$$

το άθροισμα της κλάσης $\mathcal{C}$ (βλ. ορισμό 1.3.27 καθώς και λήμμα 1.3.28). Τότε, για κάθε $g \in \mathcal{C}$ ισχύει ότι

$$\chi(1)\, \omega_\chi(\widehat{\mathcal{C}}) = |\mathcal{C}| \chi(g) . \tag{1.27}$$

Ειδικότερα, ο μιγαδικός αριθμός $\omega_\chi(\widehat{C})$ είναι αλγεβρικός ακέραιος.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο ανάγωγος χαρακτήρας χ αντιστοιχεί σε μια αναπαράσταση $\mathcal{X}$ της G, ας πούμε βαθμού $n \in \mathbb{N}$. Τότε, βάσει του ορισμού 1.4.9, ισχύει $\mathcal{X}(\widehat{C}) = \omega_\chi(\widehat{C})\, I_n$. Υπολογίζοντας τα ίχνη στην συγκεκριμένη ισότητα, καταλήγουμε άμεσα στο ότι

$$\chi(1)\, \omega_\chi(\widehat{C}) = \chi(\widehat{C}) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \chi(x) = |\mathcal{C}|\, \chi(g) ,$$

για κάθε $g \in \mathcal{C}$. Επειδή επιπροσθέτως οι τιμές $\chi(g)$ αποτελούν αλγεβρικούς ακεραίους για κάθε $g \in G$ (βλ. παρατήρηση 1.4.8), έχουμε τελικά ότι

$$\omega_\chi(\widehat{C}) = \frac{|C|\, \chi(g)}{\chi(1)} \in \mathbb{A} . \qquad \square$$

Πρόταση 1.4.11. *Για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ το $\chi(1)$ διαιρεί την τάξη της ομάδας G.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ οι διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας της ομάδας G με αντιπροσώπους τα $g_1, \ldots, g_k$ αντιστοίχως. Ας σταθεροποιήσουμε τυχόν ανάγωγο χαρακτήρα $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Από την πρώτη σχέση ορθογωνιότητας 1.4.4 καθώς και από την σχέση (1.27) άμεσα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{g\in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{C}_i|\,\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \chi(1)\,\omega_\chi(\widehat{C}_i)\overline{\chi(g_i)} = \chi(1)\cdot \sum_{i=1}^{k} \omega_\chi(\widehat{C}_i)\overline{\chi(g_i)}\,. \end{aligned}$$

Ωστόσο, βάσει (της απόδειξης) του λήμματος 1.4.10, τόσο τα $\overline{\chi(g_i)} = \chi(g_i^{-1})$, όσο και τα $\omega_\chi(\widehat{C}_i)$ αποτελούν αλγεβρικούς ακεραίους, για κάθε $i = 1,\ldots,k$. Ειδικότερα, επειδή το σύνολο των αλγεβρικών ακεραίων αποτελεί δακτύλιο, ο ρητός αριθμός

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{k} \omega_\chi(\widehat{C}_i)\overline{\chi(g_i)}$$

είναι αλγεβρικός ακέραιος. Σύμφωνα με την παρατήρηση 1.4.8 ισχύει ότι $\mathbb{A}\cap\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, οπότε στην περίπτωση μας έχουμε $\frac{|G|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$ και τελικά $\chi(1) \bigm| |G|$. ☐

Ας προχωρήσουμε τώρα στην έννοια του επαγόμενου χαρακτήρα.

Ορισμός 1.4.12. Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα και χ μια class function της H. Ορίζουμε συνάρτηση $\chi^\circ : G \to \mathbb{C}$, με

$$\chi^\circ(g) := \begin{cases} \chi(g) & , \quad g \in H \\ 0 & , \quad g \in G\setminus H \end{cases} ,$$

καθώς και συνάρτηση $\chi^G : G \to \mathbb{C}$, με τύπο

$$\chi^G(g) = \frac{1}{|H|}\cdot \sum_{y\in G} \chi^\circ(ygy^{-1})\,.$$

Λήμμα 1.4.13. *Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα και $\chi \in \mathrm{C}f(H)$. Τότε*

(i) Το χ^G είναι class function της G, και

(ii) ισχύει ότι $\chi^G(1) = [G:H]\cdot\chi(1)$. Ειδικότερα, $\chi(1)\,|\,\chi^G(1)$.

Απόδειξη. (i) Έστω τυχαία στοιχεία $g_1, g_2 \in G$. Τότε

$$\begin{aligned} \chi^G\left(g_1g_2g_1^{-1}\right) &= \frac{1}{|H|}\cdot\sum_{y\in G}\chi^\circ\left(yg_1g_2g_1^{-1}y^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{|H|}\cdot\sum_{y\in G}\chi^\circ\Big((yg_1)g_2(yg_1)^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{|H|}\cdot\sum_{x\in G}\chi^\circ\left(xg_2x^{-1}\right) = \chi^G(g_2)\,, \end{aligned}$$

όπου το $x := yg_1$ διατρέχει την ομάδα G, καθώς το y διατρέχει την G.
(ii) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\chi^G(1) &= \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{y\in G} \chi^\circ(y1y^{-1}) = \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{y\in G} \chi^\circ(1) \\ &= \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{y\in G} \chi(1) = \frac{|G|}{|H|} \cdot \chi(1)\ ,\end{aligned}$$

οπότε πράγματι $\chi^G(1) = [G:H] \cdot \chi(1)$. □

Ορισμός 1.4.14. Το χ^G καλείται **επαγόμενη class function** από την χ.

Λήμμα 1.4.15 (Frobenius)**.** *Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα, χ μια class function της H και ψ μια class function της G. Τότε ισχύει ότι $[\chi, \psi_H] = [\chi^G, \psi]$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, βάσει του ορισμού 1.4.2 και του λήμματος 1.4.13(i), έχουμε $\psi_H \in \mathcal{C}f(H)$ και $\chi^G \in \mathcal{C}f(G)$, οπότε τα εσωτερικά γινόμενα της εκφωνήσεως είναι καλώς ορισμένα. Επιπροσθέτως, υπολογίζουμε ότι :

$$\begin{aligned}[\chi^G, \psi] &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} \chi^G(g)\overline{\psi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} \left(\frac{1}{|H|} \cdot \sum_{y\in G} \chi^\circ(ygy^{-1})\overline{\psi(g)} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{g\in G} \left(\sum_{y\in G} \chi^\circ(ygy^{-1})\overline{\psi(g)} \right)\ . \end{aligned} \tag{1.28}$$

Καθώς το y και το g διατρέχουν την ομάδα G, το $x := ygy^{-1}$ διατρέχει επίσης την G. Ωστόσο εξ υποθέσεως $\psi \in \mathcal{C}f(G)$, οπότε

$$\psi(g) = \psi(ygy^{-1}) = \psi(x) \Rightarrow \overline{\psi(g)} = \overline{\psi(x)}\ .$$

Επομένως η σχέση (1.28) διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{aligned}[\chi^G, \psi] &= \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{x\in G} \left(\sum_{y\in G} \chi^\circ(x)\overline{\psi(x)} \right) \\ &= \frac{|G|}{|G|\,|H|} \cdot \sum_{x\in G} \chi^\circ(x)\overline{\psi(x)} \\ &= \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{x\in H} \chi(x)\overline{\psi(x)}\ ,\end{aligned}$$

οπότε τελικά $[\chi^G, \psi] = [\chi, \psi_H]$. □

Πρόταση 1.4.16. *Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα και χ ένας χαρακτήρας της H. Τότε το χ^G αποτελεί έναν χαρακτήρα της G.*

Απόδειξη. Έστω χ ένας χαρακτήρας της H και $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ τυχόν ανάγωγος χαρακτήρας της G. Τότε ο περιορισμός ψ_H αποτελεί έναν χαρακτήρα της H και, σύμφωνα με το λήμμα του Frobenius 1.4.15 καθώς και το λήμμα 1.4.5, ισχύει ότι

$$[\chi^G, \psi] = [\chi, \psi_H] \in \mathbb{Z}_{\geq 0} .$$

Επειδή προφανώς η class function χ^G είναι μη μηδενική, σύμφωνα με το λήμμα 1.4.6 αυτή αποτελεί έναν μιγαδικό χαρακτήρα της ομάδας G. □

Ορισμός 1.4.17. Το χ^G καλείται **επαγόμενος χαρακτήρας** από τον χ.

Σημείωση 1.4.18. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι εάν το χ είναι ένας χαρακτήρας της υποομάδας H που αντιστοιχεί στο $\mathbb{C}[H]$ - module V, τότε ο επαγόμενος χαρακτήρας χ^G αντιστοιχεί στο $\mathbb{C}[G]$ - module W, το οποίο κατασκευάζεται μέσω του τανυστικού γινομένου $W := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$. (Για λεπτομέρειες επ αυτού, βλ. [CR], παράγραφο §12D, σελ. 73).

Ορισμός 1.4.19. Έστω χ, ψ δυο χαρακτήρες μιας ομάδας G. Ορίζουμε το **γινόμενο** αυτών ως

$$\chi\psi(g) := \chi(g)\psi(g) .$$

Αποδεικνύεται (βλ. [Is1], πόρισμα 4.2, σελ. 48) ότι το γινόμενο $\chi\psi$ αποτελεί επίσης έναν χαρακτήρα της G και συγκεκριμένα, εάν ο χαρακτήρας χ αντιστοιχεί σε ένα $\mathbb{C}[G]$ - module V και ο χαρακτήρας ψ αντιστοιχεί σε ένα $\mathbb{C}[G]$ - module W, τότε το $\chi\psi$ αντιστοιχεί στο $\mathbb{C}[G]$ - module που κατασκευάζεται μέσω του τανυστικού γινομένου $V \otimes W$.

Πρόταση 1.4.20. *Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα, θ ένας χαρακτήρας της H και χ ένας χαρακτήρας της G. Τότε ισχύει ότι $\theta^G\chi = (\theta\chi_H)^G$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, για κάθε $g, y \in G$ έχουμε προφανώς ότι

$$\chi_H^\circ(ygy^{-1}) = \chi(ygy^{-1}) = \chi(g) . \tag{1.29}$$

Από τον ορισμό 1.4.12 και τον ορισμό 1.4.3 υπολογίζουμε ότι για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\left(\theta\chi_H\right)^G &= \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{y \in G} \theta^\circ(ygy^{-1})\chi_H^\circ(ygy^{-1}) \\
&\overset{(1.29)}{=} \left(\frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \theta^\circ(ygy^{-1}) \right) \cdot \chi(g) \\
&= \theta^G(g)\chi(g) = \left(\theta^G\chi\right)(g) ,
\end{aligned}$$

οπότε η ζητούμενη ισότητα είναι αληθής. □

Λήμμα 1.4.21. *Έστω U, V δυο υποομάδες της G με $U \subseteq V \subseteq G$ και έστω χ ένας χαρακτήρας της U. Τότε ισχύει ότι $\left(\chi^V\right)^G = \chi^G$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$. Επειδή ως γνωστόν το σύνολο $\mathrm{Irr}(G)$ αποτελεί μια βάση του χώρου $\mathcal{C}f(G)$, αρκεί να δείξουμε ότι $\left[\left(\chi^V\right)^G, \psi\right] = [\chi^G, \psi]$. Προφανώς ισχύει $(\psi_V)_U = \psi_U$, οπότε με επαναλαμβανόμενη χρήση του λήμματος του Frobenius 1.4.15, υπολογίζουμε πράγματι ότι

$$\left[\left(\chi^V\right)^G, \psi\right] = [\chi^V, \psi_V] = [\chi, (\psi_V)_U] = [\chi, \psi_U] = [\chi^G, \psi] \ .$$ □

Πρόταση 1.4.22. *Έστω U, V δυο υποομάδες της G τέτοιες ώστε $G = UV$ και ας θέσουμε $N := U \cap V$. Έστω ακόμα $\chi \in \mathrm{Irr}(U)$ και $\psi \in \mathrm{Irr}(V)$. Τότε*

$$(\chi^G)_V = (\chi_N)^V \quad \textit{και} \quad \chi^G \psi^G = \Big(\chi_N \psi_N\Big)^G \ .$$

Απόδειξη. Η πρώτη από τις ζητούμενες ισότητες αποτελεί άμεση απόρροια ενός γενικότερου αποτελέσματος, του λεγόμενου λήμματος του Mackey. Για την απόδειξη αυτού, βλ. [Hu], θεώρημα 17.4, σελ. 218.
Ως προς το δεύτερο σκέλος της εκφώνησης, επειδή έχουμε

$$(\chi^G)_V = (\chi_N)^V \ , \tag{1.30}$$

βάσει της προτάσεως 1.4.20 καθώς και του λήμματος 1.4.21 υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \chi^G \psi^G &\overset{1.4.20}{=} \Big((\chi^G)_V \, \psi\Big)^G \overset{(1.30)}{=} \Big((\chi_N)^V \, \psi\Big)^G \\ &\overset{1.4.20}{=} \Big((\chi_N \psi_N)^V\Big)^G \overset{1.4.21}{=} (\chi_N \psi_N)^G \ , \end{aligned}$$

οπότε η δεύτερη ισότητα είναι αληθής. □

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με την έννοια του γραμμικού χαρακτήρα.

Ορισμός 1.4.23. Ένας μιγαδικός χαρακτήρας λ μιας ομάδας G καλείται **γραμμικός** όταν ισχύει $\lambda(1) = 1$. Το απλούστερο παράδειγμα γραμμικού χαρακτήρα αποτελεί ο τετριμμένος χαρακτήρας 1_G, ο οποίος αντιστοιχεί στην τετριμμένη αναπαράσταση (πρβλ. ορισμό 1.3.10) της G. Σημειωτέον ότι οι γραμμικοί χαρακτήρες αποτελούν ομομορφισμούς ομάδων της μορφής $\lambda : G \to \mathbb{C}^*$.

Παρατήρηση 1.4.24. Εφοδιάζουμε το σύνολο των γραμμικών χαρακτήρων μιας ομάδας G με την πράξη του γινομένου (πρβλ. ορισμό 1.4.19)

$$\lambda\mu(g) := \lambda(g)\mu(g) \ .$$

Το εν λόγω γινόμενο προφανώς αποτελεί έναν γραμμικό χαρακτήρα και άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι το σύνολο των γραμμικών χαρακτήρων εφοδιασμένο με την παραπάνω πράξη αποτελεί μια αβελιανή ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο τον χαρακτήρα 1_G και αντίστροφο ενός λ, το $\lambda^{-1}(g) := \lambda(g^{-1})$.

Ορισμός 1.4.25. Έστω χ ένας μιγαδικός χαρακτήρας μιας ομάδας G, ο οποίος αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\mathcal{X}$. Ορίζουμε συνάρτηση $\det\chi : G \to \mathbb{C}^*$, μέσω του τύπου

$$\big(\det\chi\big)(g) = \det\big(\mathcal{X}(g)\big)\ .$$

Η συνάρτηση $\det\chi$ αποτελεί έναν ομομορφισμό και ειδικότερα έναν γραμμικό χαρακτήρα της ομάδας G. Ορίζουμε ακόμη τον φυσικό αριθμό

$$o(\chi) := \mathrm{ord}(\det\chi)\ ,$$

όπου $\mathrm{ord}(\det\chi)$ είναι η τάξη που διαθέτει το $\det\chi$ ως στοιχείο της ομάδας των γραμμικών χαρακτήρων της G. Το $o(\chi)$ καλείται **determinantal order** του χ.

Παρατήρηση 1.4.26. Έστω χ ένας μιγαδικός χαρακτήρας της G. Για τον χαρακτήρα (και ομομορφισμό) $\det\chi : G \to \mathbb{C}^*$ είναι προφανές ότι ισχύει η ισότητα

$$\mathrm{ord}(\det\chi) = \big|\mathrm{Im}(\det\chi)\big|\ ,$$

οπότε έχουμε $o(\chi) = \big[G : \ker(\det\chi)\big]$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι η τάξη $o(\chi)$ διαιρεί την τάξη της ομάδας G.

Σημείωση 1.4.27. Πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι εάν η $N \lhd G$ είναι μια κανονική υποομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, τότε $o(\chi_N) \mid o(\chi)$.

1.5 Πίνακες χαρακτήρων και παραδείγματα

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο με τον υπολογισμό των αναγώγων μιγαδικών χαρακτήρων ορισμένων κλασσικών πεπερασμένων ομάδων. Οι αποδείξεις όλων των θεωρητικών αποτελεσμάτων που παραθέτουμε στην συγκεκριμένη ενότητα μπορούν να βρεθούν στο [JL].

Ορισμός 1.5.1. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $\{g_1, \ldots, g_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας της. Έστω ακόμα ότι το σύνολο των αναγώγων μιγαδικών χαρακτήρων της είναι το $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Καλούμε **πίνακα χαρακτήρων** της ομάδας G ένα κατάλογο διαστάσεως $(k\times k)$, ο οποίος στην i - οστή γραμμή και στην j - οστή στήλη του διαθέτει ως εγγραφή τον μιγαδικό αριθμό $\chi_i(g_j)$ (για κάθε $1 \leq i, j \leq k$).

Παράδειγμα 1.5.2. Έστω $\mathfrak{C}_3 := \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ η κυκλική ομάδα τάξεως 3. Αυτή διαθέτει τρεις κλάσεις συζυγίας, τις

$$\mathcal{C}_1 = \{1\}\ ,\ \mathcal{C}_2 = \{a\}\ \text{ και }\ \mathcal{C}_3 = \{a^2\}\ .$$

Έστω $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες μιγαδικές αναπαραστάσεις της $\mathfrak{C}_3$ δίνεται από τις τρεις αναπαραστάσεις (βαθμού 1) :

$$\mathcal{X}_1(a^k) = 1\ \ ,\ \ \mathcal{X}_2(a^k) = \zeta^k\ \ ,\ \ \mathcal{X}_3(a^k) = \zeta^{2k}\ \ , \text{για κάθε } 0 \le k \le 2\ .$$

Εάν λοιπόν χ_1, χ_2, χ_3 είναι οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες, τότε ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{C}_3$ είναι ο ακόλουθος :

$\mathfrak{C}_3$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	ζ^2	ζ

Παράδειγμα 1.5.3. Η κυκλική ομάδα $\mathfrak{C}_{12} := \langle a\ :\ a^{12} = 1 \rangle$ διαθέτει τις κλάσεις συζυγίας $\mathcal{C}_i = \{a^i\}$, $0 \le i \le 11$. Εάν ορίσουμε $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{12}}$, τότε ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες μιγαδικές αναπαραστάσεις δίνεται από τις δώδεκα αναπαραστάσεις (βαθμού 1) :

$$\mathcal{X}_i(a^k) = \zeta^{ik}\ \ , \text{για κάθε } 0 \le i, k \le 11\ .$$

Εάν λοιπόν $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{11}$ είναι οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες, τότε ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{C}_{12}$ υπολογίζεται άμεσα ως εξής :

$\mathfrak{C}_{12}$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	ζ	ζ^2	ζ^3	ζ^4	ζ^5	ζ^6	ζ^7	ζ^8	ζ^9	ζ^{10}	ζ^{11}
χ_2	1	ζ^2	ζ^4	ζ^6	ζ^8	ζ^{10}	1	ζ^2	ζ^4	ζ^6	ζ^8	ζ^{10}
χ_3	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9
χ_4	1	ζ^4	ζ^8	1	ζ^4	ζ^8	1	ζ^4	ζ^8	1	ζ^4	ζ^8
χ_5	1	ζ^5	ζ^{10}	ζ^3	ζ^8	ζ	ζ^6	ζ^{11}	ζ^4	ζ^9	ζ^2	ζ^7
χ_6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6
χ_7	1	ζ^7	ζ^2	ζ^9	ζ^4	ζ^{11}	ζ^6	ζ	ζ^8	ζ^3	ζ^{10}	ζ^5
χ_8	1	ζ^8	ζ^4	1	ζ^8	ζ^4	1	ζ^8	ζ^4	1	ζ^8	ζ^4
χ_9	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3
χ_{10}	1	ζ^{10}	ζ^8	ζ^6	ζ^4	ζ^2	1	ζ^{10}	ζ^8	ζ^6	ζ^4	ζ^2
χ_{11}	1	ζ^{11}	ζ^{10}	ζ^9	ζ^8	ζ^7	ζ^6	ζ^5	ζ^4	ζ^3	ζ^2	ζ

Παράδειγμα 1.5.4. Θεωρούμε τη διεδρική ομάδα τάξεως 6, η οποία δίνεται από την παράσταση

$$\mathfrak{D}_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1 \, , \, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

και διαθέτει τρεις κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους τα $1, a$ και b. Εάν ορίσουμε $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, τότε ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες μιγαδικές αναπαραστάσεις της $\mathfrak{D}_3$ δίνεται από τις δύο αναπαραστάσεις (βαθμού 1)

$$\mathcal{X}_1 : a \mapsto 1 \, , \, b \mapsto 1 \quad \text{και} \quad \mathcal{X}_2 : a \mapsto 1 \, , \, b \mapsto -1$$

μαζί με την αναπαράσταση (βαθμού 2) :

$$\mathcal{X}_3 : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \, , \text{ με } a \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \, , \, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Έστω χ_1, χ_2, χ_3 οι αντίστοιχοι ανάγωγοι μιγαδικοί χαρακτήρες. Επειδή ως γνωστόν ισχύει $\zeta + \zeta^{-1} = -1$, υπολογίζουμε τον πίνακα χαρακτήρων της $\mathfrak{D}_3$ ως ακολούθως :

$\mathfrak{D}_3$	1	a	b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

Εν συνεχεία θα μελετήσουμε κάποιους ειδικούς τρόπους κατασκευής χαρακτήρων για μια πεπερασμένη ομάδα G. Κατ' αρχάς, όταν γνωρίζουμε κάποια κανονική υποομάδα $H \lhd G$, τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε χαρακτήρες της G μέσω των χαρακτήρων της ομάδας πηλίκο G/H.

Πρόταση 1.5.5. *Έστω $H \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\widetilde{\chi}$ ένας μιγαδικός χαρακτήρας της G/H. Τότε η συνάρτηση $\chi : G \to \mathbb{C}$ με τύπο*

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Hg) \, , \quad \text{για κάθε } g \in G \, ,$$

αποτελεί ένα μιγαδικό χαρακτήρα της ομάδας G (και καλείται ανύψωση του $\widetilde{\chi}$). Επιπροσθέτως, εάν ο $\widetilde{\chi}$ είναι ανάγωγος, τότε και ο χ είναι ανάγωγος.

Απόδειξη. Βλ. [JL], σελ. 168 - 170. □

Στην ειδική περίπτωση όπου μελετούμε συμμετρικές ομάδες (ή υποομάδες αυτών) μπορούμε να κατασκευάσουμε τον λεγόμενο *χαρακτήρα μεταθέσεων*.

Πρόταση 1.5.6. *Έστω G μια υποομάδα κάποιας συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$. Επειδή κάθε $g \in G$ είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$ έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε το σύνολο*

$$\mathrm{Fix}(g) := \Big\{ i \;:\; 1 \le i \le n \,,\, gi = i \Big\} \,.$$

Τότε η συνάρτηση $\chi : G \to \mathbb{C}$ που δίνεται από τον τύπο $\chi(g) = \big|\mathrm{Fix}(g)\big| - 1$ αποτελεί ένα μιγαδικό χαρακτήρα της G.

Απόδειξη. Βλ. [JL], σελ. 129 - 130. □

Παράδειγμα 1.5.7. Θεωρούμε την εναλλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_4$, η οποία διαθέτει τέσσερεις κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους τα ακόλουθα :

$$1 \;,\; a := (12)(34) \;,\; b := (123) \;,\; c := (132) \;.$$

Θεωρούμε ακόμα την ομάδα των τεσσάρων του Klein

$$\mathbb{V} := \Big\{ 1 \,,\, (12)(34) \,,\, (13)(24) \,,\, (14)(23) \Big\} \subseteq \mathfrak{A}_4 \;,$$

η οποία, ως γνωστόν, είναι κανονική υποομάδα της $\mathfrak{A}_4$, με

$$\mathfrak{A}_4/\mathbb{V} = \Big\{ \mathbb{V} \;,\; \mathbb{V}(123) \;,\; \mathbb{V}(132) \Big\} \cong \mathfrak{C}_3 \;.$$

Η ομάδα $\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}$ αποτελείται από τις τρείς κλάσεις συζυγίας $\widetilde{\mathcal{C}}_1 = \mathbb{V}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_2 = \mathbb{V}(123)$, $\widetilde{\mathcal{C}}_3 = \mathbb{V}(132)$. Εάν $\widetilde{\chi}_1$, $\widetilde{\chi}_2$ και $\widetilde{\chi}_3$ είναι οι ανάγωγοι χαρακτήρες της, τότε ο πίνακας χαρακτήρων μας είναι ήδη γνωστός από το παράδειγμα 1.5.2 :

$\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}$	$\widetilde{\mathcal{C}}_1$	$\widetilde{\mathcal{C}}_2$	$\widetilde{\mathcal{C}}_3$
$\widetilde{\chi}_1$	1	1	1
$\widetilde{\chi}_2$	1	ζ	ζ^2
$\widetilde{\chi}_3$	1	ζ^2	ζ

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5.5 μπορούμε να ανυψώσουμε τους ανάγωγους χαρακτήρες $\widetilde{\chi}_1$, $\widetilde{\chi}_2$ και $\widetilde{\chi}_3$ της $\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}$ σε ανάγωγους χαρακτήρες χ_1, χ_2 και χ_3, αντιστοίχως, της ομάδας $\mathfrak{A}_4$. Απομένει λοιπόν να βρούμε έναν ακόμη ανάγωγο χαρακτήρα. Ας θεωρήσουμε ως χ_4 τον χαρακτήρα μεταθέσεων της πρότασης 1.5.6, $\chi_4(g) = \big|\mathrm{Fix}(g)\big| - 1$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι

$$\mathrm{Fix}(1) = \{1,2,3,4\} \;,\; \mathrm{Fix}(a) = \emptyset \;\text{ και }\; \mathrm{Fix}(b) = \mathrm{Fix}(c) = \{4\} \;,$$

οπότε $\chi_4(1) = 3$, $\chi_4(a) = -1$, $\chi_4(b) = 0$ και $\chi_4(c) = 0$. Επειδή οι κλάσεις συζυγίας με αντιπροσώπους τα $1, a, b$ και c αποτελούνται αντιστοίχως από $1, 3, 4$ και 4 στοιχεία, υπολογίζουμε ότι (πρβλ. ορισμό 1.4.3) :

$$[\chi_4, \chi_4] = \frac{1}{12} \cdot \Big(1 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \Big) = 1 \;,$$

οπότε, βάσει του λήμματος 1.4.5, ο χαρακτήρας χ_4 είναι ανάγωγος. Σημειωτέον ότι, επειδή $a = (12)(34) \in \mathbb{V}$, έχουμε $\mathbb{V}a = \mathbb{V}$, οπότε

$$\chi_i(a) = \widetilde{\chi}_i(\mathbb{V}a) = \widetilde{\chi}_i(\mathbb{V}) = 1 \ ,$$

για κάθε $i = 1, 2, 3$. Επομένως ο πίνακας χαρακτήρων της ομάδας $\mathfrak{A}_4$ είναι ο ακόλουθος :

$\mathfrak{A}_4$	1	a	b	c
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	1	ζ^2	ζ
χ_4	3	-1	0	0

Κεφάλαιο 2

Χαρακτήρες Brauer

2.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα ενότητα με G θα συμβολίζουμε μια πεπερασμένη ομάδα και το p θα είναι ένας σταθεροποιημένος πρώτος αριθμός.

Ορισμός 2.1.1. Ένα στοιχείο $g \in G$ καλείται p - **regular** όταν $p \nmid \mathrm{ord}(g)$. Επίσης ένα $g \in G$ ονομάζεται p - **στοιχείο** όταν $\mathrm{ord}(g) = p^a$, για κάποιο $a \in \mathbb{N}_0$. Ορίζουμε το σύνολο των p - regular στοιχείων της G ως

$$G^* := \{g \in G \ : \ p \nmid \mathrm{ord}(g)\} \ .$$

Ορισμός 2.1.2. Εάν $g \in G^*$ τότε προφανώς $aga^{-1} \in G^*$, για κάθε $a \in G$. Επομένως έχει νόημα να θεωρήσουμε τις κλάσεις συζυγίας των p - regular στοιχείων της G, τις οποίες και θα καλούμε p - **regular κλάσεις**. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτών με $\mathcal{C}l(G^*)$. Οι συναρτήσεις της μορφής $\phi : G^* \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι σταθερές στις p - regular κλάσεις, θα καλούνται p - **regular class functions**. Το σύνολο αυτών αποτελεί έναν $\mathbb{C}$ - διανυσματικό χώρο τον οποίο και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{C}f(G^*)$.

Λήμμα 2.1.3. *Κάθε στοιχείο $g \in G$ γράφεται με μοναδικό τρόπο υπό την μορφή $g = g_1g_2 = g_2g_1$, όπου $g_1 \in G^*$ και το g_2 είναι p - στοιχείο.*

Απόδειξη. Ύπαρξη : Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{ord}(g) = p^n q$, για κάποια $n \in \mathbb{N}_0$ και $q \in \mathbb{N}$, με $p \nmid q$. Επειδή προφανώς $\gcd(p^n, q) = 1$, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $1 = ap^n + bq$. Ορίζουμε τα στοιχεία της G, $g_1 := g^{ap^n}$ και $g_2 := g^{bq}$. Τότε $g = g_1g_2 = g_2g_1$ και πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\gcd(p^n q, ap^n) = p^n \quad \text{και} \quad \gcd(p^n q, bq) = q.$$

Επομένως
$$\mathrm{ord}(g_1) = \mathrm{ord}\left(g^{ap^n}\right) = \frac{p^n q}{\gcd(p^n q, ap^n)} = \frac{p^n q}{p^n} = q$$
και
$$\mathrm{ord}(g_2) = \mathrm{ord}\left(g^{bq}\right) = \frac{p^n q}{\gcd(p^n q, bq)} = \frac{p^n q}{q} = p^n.$$
Συνεπώς $p \nmid \mathrm{ord}(g_1) \Rightarrow g_1 \in G^*$ και το g_2 είναι p - στοιχείο.

Μοναδικότητα : Ας υποθέσουμε ότι $g = g_3 g_4 = g_4 g_3$ για κάποιο $g_3 \in G^*$ και κάποιο p - στοιχείο g_4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g_3 = g_1$ και $g_4 = g_2$.

Ισχυρισμός : *Έχουμε*
$$g_2 g_4^{-1} = g_4^{-1} g_2 \quad \text{και} \quad g_1^{-1} g_3 = g_3 g_1^{-1}. \tag{2.1}$$

Πράγματι· Επειδή το g_4 μετατίθεται με το g (διότι $g_4 g = g_4 g_3 g_4 = g g_4$) και καθώς $g_2 = g^{bq}$, έχουμε $g_4 g_2 = g_2 g_4$, οπότε η πρώτη ισότητα είναι αληθής. Παρόμοια, αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα. ♢

Οι ισότητες (2.1) μας δίνουν[1] :
$$\mathrm{ord}(g_2 g_4^{-1}) \mid \mathrm{ord}(g_2) \cdot \mathrm{ord}(g_4) \quad \text{και} \quad \mathrm{ord}(g_1^{-1} g_3) \mid \mathrm{ord}(g_1) \cdot \mathrm{ord}(g_3)\ .$$

Επειδή τα g_2, g_4 είναι p - στοιχεία και $g_1, g_3 \in G^*$, από τα παραπάνω έχουμε άμεσα ότι το $g_2 g_4^{-1}$ είναι p - στοιχείο και $g_1^{-1} g_3 \in G^*$. Ωστόσο, $g_1 g_2 = g_3 g_4$, οπότε $g_2 g_4^{-1} = g_1^{-1} g_3$. Προφανώς το μοναδικό p - στοιχείο το οποίο είναι ταυτοχρόνως και p - regular είναι το ταυτοτικό. Επομένως $g_2 g_4^{-1} = g_1^{-1} g_3 = 1$ και άρα έχουμε $g_4 = g_2$ και $g_3 = g_1$. □

Ορισμός 2.1.4. Έστω τυχόν στοιχείο $g \in G$. Το λήμμα 2.1.3 μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε το **p - regular τμήμα του** g ως το στοιχείο $g_1 \in G^*$.

Εν συνεχεία, δεδομένου ενός πρώτου αριθμού p, κατασκευάζουμε ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα $\mathbb{F}$, χαρακτηριστικής $p > 0$. Έστω $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ ο υποδακτύλιος των αλγεβρικών ακεραίων (βλ. ορισμό 1.4.7) και έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{A}$ ένα μεγιστοτικό ιδεώδες του, με $\mathcal{M} \supseteq p\mathbb{A}$ (η επιλογή ενός τέτοιου ιδεώδους $\mathcal{M}$ είναι προφανώς μη μοναδική). Ορίζουμε το σώμα
$$\boxed{\mathbb{F} := \mathbb{A} \,/\, \mathcal{M}}$$
και θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ με $\ker(\pi) = \mathcal{M}$. Το σώμα $\mathbb{F}$ έχει χαρακτηριστική p $\big($διότι $\pi(p \cdot 1) = \pi(p) = 0_{\mathbb{F}}\big)$.

[1] Προφανώς εάν $a, b \in G$ και $ab = ba$, τότε $\mathrm{ord}(ab) \mid \mathrm{ord}(a) \cdot \mathrm{ord}(b)$.

Λήμμα 2.1.5. *Ισχύει $\mathcal{M} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Επιπλέον $\pi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Επειδή $p \in \mathcal{M}$ προφανώς $p\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{M} \cap \mathbb{Z}$. Έστω $m \in \mathcal{M} \cap \mathbb{Z}$ και ας υποθέσουμε ότι $p \nmid m$. Τότε $\gcd(p, m) = 1$ και άρα υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $1 = ap + bm$. Επομένως $1 \in \mathcal{M}$, πράγμα άτοπο εξ ορισμού του ιδεώδους $\mathcal{M}$. Συνεπώς $p \mid m$ και $\mathcal{M} \cap \mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$. Επιπροσθέτως, είναι προφανές ότι περιορίζοντας τον επιμορφισμό π στο $\mathbb{Z}$, λαμβάνουμε ισομορφισμό $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{M} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Ορισμός 2.1.6. Ορίζουμε το υποσύνολο των αλγεβρικών ακεραίων

$$U := \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^m = 1, \text{για } m \in \mathbb{Z} \ , \ p \nmid m\} \subseteq \mathbb{A} \ ,$$

το οποίο φέρει προφανώς τη δομή πολλαπλασιαστικής ομάδας.

Ορισμός 2.1.7. Έστω F ένα σώμα. Η τομή όλων των υποσωμάτων του F είναι ένα σώμα το οποίο και ονομάζουμε **πρώτο υπόσωμα** του F. Όταν το F έχει χαρακτηριστική $p > 0$ τότε, εύκολα διαπιστώνουμε, ότι το πρώτο υπόσωμα είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Λήμμα 2.1.8. *Το σώμα $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό. Επίσης, ο περιορισμός του π στο U μας δίνει ισομορφισμό $\pi|_U : U \to \mathbb{F}^\times$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός $\pi|_U$ είναι μονομορφισμός, θεωρούμε τυχόν $\xi \in U \setminus \{1\}$ και δείχνουμε ότι $\pi(\xi) \neq 1$. Επειδή $\xi \in U \setminus \{1\}$, υπάρχει $n > 1$ με $p \nmid n$, τέτοιο ώστε $\xi^n = 1$. Επομένως

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{i=1}^{n-1} (x - \xi^i)$$

και θέτοντας $x = 1$ έχουμε άμεσα ότι, εντός του δακτυλίου $\mathbb{A}$, το $1 - \xi$ διαιρεί το n. Εάν ίσχυε $\pi(\xi) = 1$, τότε $\pi(n) = 0$ και άρα $n \in \mathcal{M}$. Άτοπο, διότι βάσει του λήμματος 2.1.5, $n \in \mathcal{M} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ και εξ υποθέσεως $p \nmid n$. Συνεπώς $\pi(\xi) \neq 1$ και ο $\pi|_U$ είναι μονομορφισμός.

Ισχυρισμός: Έστω $K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ το πρώτο υπόσωμα του $\mathbb{F}$ (βλ. ορισμό 2.1.7). Τότε το σώμα $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικό πάνω από το K.

Πράγματι· Έστω τυχόν στοιχείο $\alpha \in \mathbb{F}$. Επειδή ο $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $r \in \mathbb{A}$ τέτοιο ώστε $\pi(r) = \alpha$. Ωστόσο το r είναι αλγεβρικός ακέραιος, οπότε υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε

$$a_0 + a_1 r + \cdots + a_{m-1} r^{m-1} + r^m = 0 \ .$$

Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό π λαμβάνουμε

$$\pi(a_0) + \pi(a_1)\alpha + \cdots + \pi(a_{m-1})\alpha^{m-1} + \alpha^m = 0_{\mathbb{F}},$$

όπου, βάσει του λήμματος 2.1.5, $\pi(a_i) \in \pi(\mathbb{Z}) \cong K$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Επομένως το $\alpha \in \mathbb{F}$ είναι αλγεβρικό πάνω από το K και η επέκταση $\mathbb{F} \supseteq K$ αλγεβρική. $\diamondsuit$

Έστω τώρα $E \supseteq \mathbb{F}$ μια αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{F}$. Επειδή προφανώς έχουμε $\pi(U) \subseteq \mathbb{F}^\times \subseteq E^\times$, για να αποδείξουμε ότι $\pi(U) = \mathbb{F}^\times$ (δηλαδή ότι ο $\pi|_U$ είναι και επιμορφισμός) καθώς και ότι το σώμα $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, αρκεί να δειχθεί ο εγκλεισμός $E^\times \subseteq \pi(U)$. Έστω λοιπόν τυχόν στοιχείο $\beta \in E^\times$. Το β είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{F}$ και, βάσει του ισχυρισμού, αλγεβρικό πάνω από το $K \cong \mathbb{Z}_p$. Επομένως το σώμα $K[\beta] = k(\beta)$ είναι πεπερασμένο και εάν $\mu := |K(\beta)| - 1$, τότε $\beta^\mu = 1$. Συνεπώς το β είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $x^\mu - 1$, το οποίο (επειδή προφανώς $p \nmid \mu$) διαθέτει μ το πλήθος ρίζες εντός του $\pi(U)$. Άρα το β οφείλει να είναι μία από αυτές και κατ' επέκτασιν $\beta \in \pi(U)$. $\square$

Ορισμός 2.1.9. Έστω $\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{F})$ μια $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση της G και έστω $g \in G^*$. Ας υποθέσουμε ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}^\times$ είναι οι ιδιοτιμές[2] (καταμετρημένες με πολλαπλότητα) του πίνακα $\mathcal{X}(g)$. Βάσει του λήμματος 2.1.8, $\pi(U) = \mathbb{F}^\times$, οπότε υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $u_1, \ldots, u_k \in U$ τέτοια ώστε

$$\pi(u_i) = \lambda_i \ , \ i = 1, \ldots, k \ .$$

Ορίζουμε τον **χαρακτήρα Brauer της G (ως προς την $\mathcal{X}$)** ως την συνάρτηση

$$\boxed{\phi : G^* \to \mathbb{C} \ , \ \phi(g) := \sum_{i=1}^{k} u_i \ .}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι τιμές της συνάρτησης ϕ ανήκουν στο υποσύνολο $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ (οι τιμές των χαρακτήρων Brauer είναι αθροίσματα αλγεβρικών ακεραίων). Στην περίπτωση όπου η $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση είναι ανάγωγη, ο αντίστοιχος χαρακτήρας Brauer καλείται *ανάγωγος*. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι τιμές ενός χαρακτήρα Brauer εξαρτώνται άμεσα από τον φυσικό επιμορφισμό π και ειδικότερα από την επιλογή του μεγιστοτικού ιδεώδους $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{A}$. Για την ακρίβεια, το κατά πόσον μια συνάρτηση $\phi : G^* \to \mathbb{C}$ είναι πράγματι ένας χαρακτήρας Brauer για την ομάδα G, εξαρτάται από την συγκεκριμένη επιλογή.

Ορισμός 2.1.10. Έστω $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αναγώγων $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεων της G. Έστω ακόμα $\phi_1, \ldots, \phi_n$ οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer. Το σύνολο $\{\phi_i : i = 1, \ldots, n\}$ θα συμβολίζεται με $\mathrm{IBr}_p(G)$. (Ο δείκτης p συμβολίζει τον αρχικώς επιλεχθέντα πρώτο αριθμό).

[2] Το σώμα $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό και οι ιδιοτιμές λ_i του $\mathcal{X}(g)$ ικανοποιούν την ισότητα $\lambda_i^n = 1$, όπου $n := \mathrm{ord}(g)$, $p \nmid n$.

Η παρακάτω πρόταση περιλαμβάνει δυο απλές ιδιότητες των χαρακτήρων Brauer, ανάλογες με αυτές της πρότασης 1.3.21.

Πρόταση 2.1.11. *Δυο ισοδύναμες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις της ομάδας G διαθέτουν ίσους χαρακτήρες Brauer. Επίσης, οι χαρακτήρες Brauer είναι σταθεροί στις p - regular κλάσεις (ειδικότερα, ισχύει ο εγκλεισμός $\mathrm{IBr}_p(G) \subseteq \mathcal{C}f(G^*)$).*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}_1$ και $\mathcal{X}_2$ δυο ισοδύναμες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις της G και έστω ϕ_1 και ϕ_2 οι αντίστοιχοι χαρακτήρες Brauer. Εξ ορισμού, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, τέτοιος ώστε

$$\mathcal{X}_2(g) = T^{-1}\mathcal{X}_1(g)T \ , \ \forall \, g \in G \ .$$

Τούτο όμως σημαίνει ότι οι $\mathcal{X}_1(g)$ και $\mathcal{X}_2(g)$ διαθέτουν τις ίδιες ιδιοτιμές και επομένως, άμεσα από τον ορισμό 2.1.9, έχουμε $\phi_1 = \phi_2$.

Έστω τώρα $\mathcal{X}$ μια $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση της G και ϕ ο αντίστοιχος χαρακτήρας Brauer. Έστω ακόμα τυχόν $g \in G^*$. Τότε, για κάθε $a \in G$, έχουμε

$$\mathcal{X}(aga^{-1}) = \mathcal{X}(a)\mathcal{X}(g)\mathcal{X}(a)^{-1},$$

οπότε οι πίνακες $\mathcal{X}(aga^{-1})$ και $\mathcal{X}(g)$ διαθέτουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Επομένως

$$\phi(aga^{-1}) = \phi(g) \ , \ \text{για κάθε } a \in G \, , \, g \in G^* \ . \qquad \square$$

Πρόταση 2.1.12. *Τα αθροίσματα χαρακτήρων Brauer είναι χαρακτήρες Brauer. Επίσης κάθε χαρακτήρας Brauer είναι ένας $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ - γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του συνόλου $\mathrm{IBr}_p(G)$.*

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη της προτάσεως 1.3.22. $\square$

Οι χαρακτήρες Brauer μιας $\mathbb{F}$ - αναπαράστασης, βάσει του ορισμού 2.1.9, έχουν οριστεί επί του υποσυνόλου $G^* \subseteq G$ και όχι επί ολοκλήρου της G. Στην συνέχεια θα δούμε (πρόταση 2.1.14) ότι τούτο αρκεί για να "ανακτήσουμε" τον $\mathbb{F}$ - χαρακτήρα της αναπαράστασης.

Λήμμα 2.1.13. *Έστω $\mathcal{X}$ μια $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση της G, με $\mathbb{F}$ - χαρακτήρα $\chi : G \to \mathbb{F}$ και χαρακτήρα Brauer $\phi : G^* \to \mathbb{C}$. Τότε*

$$\chi(g) = \pi\big(\phi(g)\big), \ \textit{για κάθε } g \in G^*,$$

όπου $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός.

Απόδειξη. Έστω τυχόν στοιχείο $g \in G^*$. Ας υποθέσουμε, όπως υποδεικνύει ο ορισμός 2.1.9, ότι

$$\phi(g) = \sum_{i=1}^{k} u_i, \ \text{όπου } u_i \in U \, , \, \pi(u_i) = \lambda_i \, , \, i = 1, \ldots, k$$

και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}^\times$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathcal{X}(g) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{F})$. Επειδή ο π είναι ομομορφισμός, έχουμε

$$\pi\big(\phi(g)\big) = \pi\left(\sum_{i=1}^{k} u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \pi(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \mathrm{tr}\big(\mathcal{X}(g)\big) = \chi(g)\ . \qquad \square$$

Πρόταση 2.1.14. *Έστω $\mathcal{X}$ μια $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση της ομάδας G, με $\mathbb{F}$ - χαρακτήρα $\chi : G \to \mathbb{F}$ και χαρακτήρα Brauer $\phi : G^* \to \mathbb{C}$. Τότε*

$$\chi(g) = \chi(g_1) = \pi\big(\phi(g_1)\big),\ \text{για κάθε } g \in G,$$

όπου g_1 είναι το p - regular τμήμα του στοιχείου $g \in G$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $g \in G$ και το γράφουμε, όπως υποδεικνύει το λήμμα 2.1.3, στην μορφή $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$, με $p \nmid \mathrm{ord}(g_1)$ και $\mathrm{ord}(g_2) = p^n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$. Επειδή ισοδύναμες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις διαθέτουν ίσους $\mathbb{F}$ - χαρακτήρες καθώς και ίσους χαρακτήρες Brauer (βλ. προτάσεις 1.3.21 και 2.1.11, αντιστοίχως) μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο πίνακας $\mathcal{X}(g)$ είναι σε κανονική μορφή Jordan. Ειδικότερα, όπως διαφαίνεται και από την απόδειξη του λήμματος 2.1.3, τα g_1 και g_2 είναι δυνάμεις του στοιχείου g, οπότε οι πίνακες $\mathcal{X}(g_1)$ και $\mathcal{X}(g_2)$ είναι άνω τριγωνικοί. Έστω ότι $\deg(\mathcal{X}) = k$ και ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}^\times$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathcal{X}(g)$. Έστω ακόμα $\{a_i\}$ οι ιδιοτιμές του $\mathcal{X}(g_1)$ και $\{b_i\}$ οι ιδιοτιμές του $\mathcal{X}(g_2)$. Εξ υποθέσεως $\mathrm{ord}(g_2) = p^n$, επομένως $b_i^{p^n} = 1$. Επειδή το σώμα $\mathbb{F}$ έχει χαρακτηριστική $p > 0$, η προηγούμενη ισότητα μας δίδει άμεσα $b_i = 1$. Ωστόσο $\mathcal{X}(g) = \mathcal{X}(g_1)\mathcal{X}(g_2)$, οπότε $\lambda_i = a_i$ και κατ' επέκτασιν $\chi(g) = \chi(g_1)$. Η δεύτερη ζητούμενη ισότητα μας είναι ήδη γνωστή από το λήμμα 2.1.13. $\square$

2.2 Γραμμική ανεξαρτησία του $\mathrm{IBr}_p(G)$

Για την απόδειξη του ότι το σύνολο $\mathrm{IBr}_p(G)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (υπεράνω του $\mathbb{C}$), θα χρειασθούμε το ακόλουθο αλγεβρικό λήμμα, η απόδειξη του οποίου μπορεί να βρεθεί στο [Na], λήμμα 2.5, σελ. 20.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω I ένα γνήσιο ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{A}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ αλγεβρικά στοιχεία πάνω από το $\mathbb{Q}$, όχι όλα μηδενικά. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $b \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$, τέτοιο ώστε $ba_i \in \mathbb{A}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και ταυτοχρόνως όχι όλα τα ba_i να ανήκουν στο I.*

Ορισμός 2.2.2. Έστω $K \supseteq F$ μια επέκταση σωμάτων. Λέμε ότι το K είναι μια **αλγεβρική κλειστότητα** του F όταν η παραπάνω επέκταση είναι αλγεβρική (βλ. ορισμό 1.1.8) και το σώμα K είναι αλγεβρικώς κλειστό. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η αλγεβρική κλειστότητα ενός σώματος F είναι η μεγαλύτερη αλγεβρική επέκτασή του.

Συμβολίζουμε με $\overline{\mathbb{Q}}$ την αλγεβρική κλειστότητα του σώματος των ρητών αριθμών, για την οποία προφανώς ισχύει $\mathbb{A} \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.2.3. *Το σύνολο* $\mathrm{IBr}_p(G)$ *των ανάγωγων χαρακτήρων Brauer της ομάδας* G *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υπεράνω του* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Έστω $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις κλάσεις ισοδυναμίας των ανάγωγων $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεων και $\phi_1, \ldots, \phi_k$ οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer. Επειδή, όπως ήδη έχουμε δεί, οι τιμές των χαρακτήρων Brauer βρίσκονται εντός του δακτυλίου $\mathbb{A} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ και η $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ είναι επέκταση σωμάτων, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{IBr}_p(G)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υπεράνω του $\overline{\mathbb{Q}}$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i = 0 \ , \tag{2.2}$$

για κάποια $a_1, \ldots, a_k \in \overline{\mathbb{Q}}$, όχι όλα μηδενικά. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.2.1 για το ιδεώδες $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{A}$, μπορούμε να βρούμε στοιχείο $b \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_k) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, τέτοιο ώστε $ba_i \in \mathbb{A}$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$, αλλά όχι όλα ba_i να ανήκουν στο μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathcal{M}$. Εάν πολλαπλασιάσουμε την ισότητα (2.2) με το συγκεκριμένο στοιχείο $b \in \overline{\mathbb{Q}}$ και εφαρμόσουμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$, λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{k} \pi(ba_i)\, \pi(\phi_i) = 0_{\mathbb{F}} \ .$$

Ωστόσο, σύμφωνα με την πρόταση 2.1.14, τα $\pi(\phi_i)$ αποτελούν ανάγωγους $\mathbb{F}$ - χαρακτήρες της G και, βάσει των προηγουμένων, οι συντελεστές $\pi(ba_i)$ δεν είναι όλοι μηδενικοί $\big($διότι $\ker(\pi) = \mathcal{M}\big)$. Άτοπο, βάσει του θεωρήματος 1.3.23. □

2.3 Ο περιορισμός επί του G^*

Ορισμός 2.3.1. Έστω χ ένας $\mathbb{C}$ - χαρακτήρας της G. Συμβολίζουμε με χ^* τον περιορισμό του χ στο υποσύνολο $G^* \subseteq G$ των p - regular στοιχείων της G. Επίσης, με όμοιο τρόπο ορίζεται (και συμβολίζεται) ο περιορισμός οποιασδήποτε class function της ομάδας G.

Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι εάν το χ είναι ένας μιγαδικός χαρακτήρας της ομάδας G, τότε ο περιορισμός χ^* αποτελεί έναν χαρακτήρα Brauer της G, ανεξαρτήτως της επιλογής του ιδεώδους $\mathcal{M}$ (θεώρημα 2.3.9). Για τον σκοπό αυτό, θα χρειασθούμε πρώτα κάποια προπαρασκευαστικά αποτελέσματα.

Ορισμός 2.3.2. Έστω $\mathcal{M} \supseteq p\mathbb{A}$ το προεπιλεγμένο μεγιστοτικό ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{A}$. Ορίζουμε

$$\widetilde{\mathbb{A}} := \Big\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{A} \, , \, b \notin \mathcal{M} \Big\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Τότε $\mathbb{A} \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}$ και το $\widetilde{\mathbb{A}}$ είναι τοπικός δακτύλιος[3] με μοναδικό μεγιστοτικό του ιδεώδες το

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a \in \mathcal{M} \, , \, b \in \mathbb{A} \setminus \mathcal{M} \right\} \ .$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι κάθε στοιχείο $r \in \widetilde{\mathbb{A}} \setminus \widetilde{\mathcal{M}}$ διαθέτει αντίστροφο εντός του $\widetilde{\mathbb{A}}$. Σημειωτέον ότι ο φυσικός επιμορφισμός $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ επεκτείνεται, κατά τρόπο φυσικό, σε επιμορφισμό $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F}$, μέσω του τύπου $\widetilde{\pi}\left(\frac{a}{b}\right) := \frac{\pi(a)}{\pi(b)}$. Προφανώς $\ker(\widetilde{\pi}) = \widetilde{\mathcal{M}}$.

Ορισμός 2.3.3. Έστω $A \in \mathrm{Mat}(n, \widetilde{\mathbb{A}})$ ένας πίνακας με εγραφές από τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$. Ορίζουμε τον πίνακα $\widetilde{\pi}(A) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ ως τον πίνακα που προκύπτει από τον A, εάν εφαρμόσουμε σε κάθε εγγραφή του, τον ομομορφισμό $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F}$. Άμεσα διαπιστώνουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \widetilde{\mathbb{A}})$ έχουμε

$$\widetilde{\pi}(A \pm B) = \widetilde{\pi}(A) \pm \widetilde{\pi}(B) \ , \ \widetilde{\pi}(AB) = \widetilde{\pi}(A)\widetilde{\pi}(B) \tag{2.3}$$

καθώς και ότι

$$\det\big(\widetilde{\pi}(A)\big) = \widetilde{\pi}\left(\det(A)\right). \tag{2.4}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Ψ είναι μια $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση της ομάδας G τέτοια ώστε, για κάθε $g \in G$, όλες οι εγγραφές του πίνακα $\Psi(g)$ να ανήκουν στον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{C}$. Τότε βάσει της σχέσεως (2.3), μπορούμε να ορίσουμε μια $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση $\widetilde{\Psi}$ της G, μέσω του τύπου $\widetilde{\Psi}(g) := \widetilde{\pi}\big(\Psi(g)\big)$, για κάθε $g \in G$.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω Ψ μια $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση της G τέτοια ώστε, για κάθε $g \in G$, οι πίνακες $\Psi(g)$ να διαθέτουν εγγραφές από τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$. Ας υποθέσουμε ότι η Ψ διαθέτει τον $\mathbb{C}$ - χαρακτήρα ψ. Τότε η $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση $\widetilde{\Psi}$ του ορισμού 2.3.3, διαθέτει τον χαρακτήρα Brauer ψ^*.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο $g \in G^* \subseteq G$. Ας υποθέσουμε ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\Psi(g)$ και έστω $f(x) := \det\left(\Psi(g) - xI\right) \in \widetilde{\mathbb{A}}[x]$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του. Βάσει των σχέσεων (2.3) και (2.4) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}\Big(\det\left(\Psi(g) - xI\right)\Big) &= \det\Big(\widetilde{\pi}\big(\Psi(g) - xI\big)\Big) = \det\Big(\widetilde{\pi}\big(\Psi(g)\big) - xI\Big) \\
&= \det\big(\widetilde{\Psi}(g) - xI\big) \in \mathbb{F}[x] \ .
\end{aligned}$$

Επομένως οι ιδοτιμές του πίνακα $\widetilde{\Psi}(g)$ είναι ακριβώς οι $\widetilde{\pi}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{\pi}(\lambda_k)$. Σημειωτέον ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ανήκουν στο υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{A}$ (πράγματι· εάν $\mathrm{ord}(g) = m$, τότε $\lambda_i^m = 1$ και εξ υποθέσεως $p \nmid m$). Επομένως $\widetilde{\pi}(\lambda_i) = \pi(\lambda_i)$, για

[3] Εν προκειμένω έχουμε την τοπικοποίηση του δακτυλίου $\mathbb{A}$ στο μεγιστοτικό του ιδεώδες $\mathcal{M}$.

κάθε $i = 1, \ldots, k$. Εάν λοιπόν $\widetilde{\psi}$ είναι ο χαρακτήρας Brauer της $\mathbb{F}$ - αναπαράστασης $\widetilde{\Psi}$, τότε στο τυχόν στοιχείο $g \in G^*$, έχουμε εξ ορισμού

$$\widetilde{\psi}(g) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \operatorname{tr}\bigl(\Psi(g)\bigr)$$

και άρα τελικά ισχύει η ισότητα $\widetilde{\psi} = \psi^*$. □

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε, χωρίς απόδειξη, το γνωστό από τη μεταθετική άλγεβρα λήμμα του Nakayama, διατυπωμένο για τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$ και το (μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Λήμμα 2.3.5 (Nakayama)**.** *Έστω W ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\widetilde{\mathbb{A}}$ - module και U ένα $\widetilde{\mathbb{A}}$ - submodule του W, τέτοιο ώστε $W = U + \widetilde{\mathcal{M}}W$. Τότε $W = U$.*

Λήμμα 2.3.6. *Έστω V ένας $\overline{\mathbb{Q}}$ - διανυσματικός χώρος και W ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\widetilde{\mathbb{A}}$ - submodule του V. Τότε υπάρχουν στοιχεία $w_1, \ldots, w_k \in W$, τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα υπεράνω του $\overline{\mathbb{Q}}$, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$W = \widetilde{\mathbb{A}}w_1 + \cdots + \widetilde{\mathbb{A}}w_k\ .$$

Απόδειξη. Έστω $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{F}$ ο φυσικός επιμορφισμός. Ορίζουμε πράξη

$$\widetilde{\pi}(\alpha) \cdot \bigl(w + \widetilde{\mathcal{M}}W\bigr) := \alpha w + \widetilde{\mathcal{M}}W\ , \tag{2.5}$$

για κάθε $\alpha \in \widetilde{\mathbb{A}}$ και $w \in W$. Κατ' αρχάς η (2.5) είναι καλώς ορισμένη, διότι εάν $\widetilde{\pi}(\alpha) = \widetilde{\pi}(\beta)$ για κάποια $\alpha, \beta \in \widetilde{\mathbb{A}}$, τότε

$$\alpha - \beta \in \widetilde{\mathcal{M}} \Rightarrow \alpha w - \beta w \in \widetilde{\mathcal{M}}W \Rightarrow \alpha w + \widetilde{\mathcal{M}}W = \beta w + \widetilde{\mathcal{M}}W\ .$$

Η πράξη (2.5) καθιστά άμεσα το $W/\widetilde{\mathcal{M}}W$ έναν $\mathbb{F}$ - διανυσματικό χώρο. Επειδή το W είναι πεπερασμένα παραγόμενο υπεράνω του $\widetilde{\mathbb{A}}$ έχουμε $\dim_{\mathbb{F}}\bigl(W/\widetilde{\mathcal{M}}W\bigr) < \infty$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το

$$\{w_1 + \widetilde{\mathcal{M}}W, \ldots, w_k + \widetilde{\mathcal{M}}W\}\ , \quad w_1, \ldots, w_k \in W \tag{2.6}$$

είναι μια $\mathbb{F}$ - βάση του χώρου αυτού και ας ορίσουμε το $\widetilde{\mathbb{A}}$ - submodule του W :

$$U := \operatorname{span}_{\widetilde{\mathbb{A}}}(w_1, \ldots, w_k) = \widetilde{\mathbb{A}}w_1 + \cdots + \widetilde{\mathbb{A}}w_k\ .$$

Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι $W = U + \widetilde{\mathcal{M}}W$, οπότε, βάσει του λήμματος του Nakayama 2.3.5, $W = U$. Απομένει να δειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των στοιχείων $w_1, \ldots, w_k$ υπεράνω του $\overline{\mathbb{Q}}$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχουν στοιχεία $a_1, \ldots, a_k \in \overline{\mathbb{Q}}$, όχι όλα μηδενικά, έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} a_i w_i = 0\ . \tag{2.7}$$

Επειδή τα a_i είναι εξ ορισμού τους αλγεβρικά πάνω από το $\mathbb{Q}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 2.2.1 (για $I = \mathcal{M}$), και να βρούμε στοιχείο $b \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_k) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, τέτοιο ώστε $ba_1, \ldots, ba_k \in \mathbb{A}$, αλλά όχι όλα τα ba_i να ανήκουν στο $\mathcal{M}$. Εξ υποθέσεως το V είναι ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω του $\overline{\mathbb{Q}}$, οπότε έχουμε τη δυνατότητα να πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (2.7) με το στοιχείο b και να λάβουμε

$$0 = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i = \sum_{i=1}^{k} (ba_i) w_i \ .$$

Επομένως, εντός του $W/\widetilde{\mathcal{M}}W$ έχουμε

$$0_{\mathbb{F}} = \sum_{i=1}^{k} (ba_i w_i) + \widetilde{\mathcal{M}}W = \sum_{i=1}^{k} \pi(ba_i)\big(w_i + \widetilde{\mathcal{M}}W\big) \ ,$$

όπου $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός. Ωστόσο τα ba_i δεν ανήκουν όλα στο $\mathcal{M} = \ker(\pi)$, οπότε και τα $\pi(ba_i) \in \mathbb{F}$ δεν είναι όλα μηδενικά. Άτοπο, διότι το (2.6) αποτελεί μια $\mathbb{F}$ - βάση. $\square$

Πρόταση 2.3.7. *Κάθε $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση της ομάδας G είναι ισοδύναμη με κάποια $\overline{\mathbb{Q}}$ - αναπαράσταση της G.*

Απόδειξη. Βλ. [Is1], θεώρημα 9.9, σελ. 148 (για $E = \mathbb{C}$ και $F = \overline{\mathbb{Q}}$) καθώς και πόρισμα 9.4, σελ. 146. $\square$

Πρόταση 2.3.8. *Κάθε $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση της ομάδας G είναι ισοδύναμη με κάποια $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση Ψ της G, τέτοια ώστε οι πίνακες $\Psi(g)$ να διαθέτουν εγγραφές από τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$, για κάθε $g \in G$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ μια $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση της ομάδας G. Βάσει της προτάσεως 2.3.7 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{X}$ είναι $\overline{\mathbb{Q}}$ - αναπαράσταση της G και κατόπιν να κατασκευάσουμε μια ισοδύναμη $\overline{\mathbb{Q}}$ - αναπαράσταση Ψ, τέτοια ώστε οι πίνακες $\Psi(g)$ να διαθέτουν εγγραφές από τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$, για κάθε $g \in G$. Έστω λοιπόν ότι το V είναι ένα $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ - module της $\mathcal{X}$ και ας υποθέσουμε ότι το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι μια $\overline{\mathbb{Q}}$ - βάση του. Ορίζουμε το πεπερ. παραγόμενο $\widetilde{\mathbb{A}}$ - submodule του V :

$$W := \operatorname{span}_{\widetilde{\mathbb{A}}}\Big(\{v_i g \ : \ 1 \leq i \leq n \, , \, g \in G\}\Big) \ .$$

Το V είναι $\overline{\mathbb{Q}}$ - διανυσματικός χώρος, επομένως, σύμφωνα με το λήμμα 2.3.6, υπάρχουν στοιχεία $w_1, \ldots, w_k \in W$, τέτοια ώστε $W = \widetilde{\mathbb{A}}w_1 + \cdots + \widetilde{\mathbb{A}}w_k$. Προφανώς

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq W = \operatorname{span}_{\widetilde{\mathbb{A}}}(w_1, \ldots, w_k) \ ,$$

οπότε $\operatorname{span}_{\overline{\mathbb{Q}}}(w_1, \ldots, w_k) = V$. Επειδή το λήμμα 2.3.6 μας εξασφαλίζει επιπλέον ότι τα $w_1, \ldots, w_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$, το $\{w_1, \ldots, w_k\}$

αποτελεί μια $\overline{\mathbb{Q}}$ - βάση του V. Ορίζουμε τώρα Ψ να είναι η $\overline{\mathbb{Q}}$ - αναπαράσταση της G που αντιστοιχεί στο V ως προς την βάση $\{w_1, \ldots, w_k\}$. Τότε οι $\mathcal{X}$ και Ψ είναι ισοδύναμες και εάν $\Psi(g) = (a_{ij})$, για κάθε $g \in G$ έχουμε

$$\sum_j a_{ij} w_j = w_i g \in W = \operatorname{span}_{\widetilde{\mathbb{A}}}(w_1, \ldots, w_k).$$

Επομένως όλες οι εγγραφές a_{ij} του $\Psi(g)$ ανήκουν πράγματι στο $\widetilde{\mathbb{A}}$. □

Θεώρημα 2.3.9. *Εάν το χ είναι ένας $\mathbb{C}$ - χαρακτήρας της G, τότε το χ^* είναι χαρακτήρας Brauer της G, για κάθε επιλογή του ιδεώδους $\mathcal{M}$. Ειδικότερα, εάν $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$, τότε το χ^* είναι ένας $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ - γραμμικός συνδυασμός του συνόλου $\operatorname{IBr}_p(G)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το χ είναι ο χαρακτήρας μιας $\mathbb{C}$ - αναπαράστασης $\mathcal{X}$ της G. Βάσει της προτάσεως 2.3.8, υπάρχει κάποια $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση Ψ της G τέτοια ώστε, αφενός μεν $\mathcal{X} \sim \Psi$, αφεταίρου δε οι πίνακες $\Psi(g)$ να διαθέτουν εγγραφές από τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$, για κάθε $g \in G$. Εάν λοιπόν το ψ είναι ο $\mathbb{C}$ - χαρακτήρας της αναπαράστασης Ψ, τότε απο την μία έχουμε $\chi = \psi$ (βάσει της προτάσεως 1.3.21), από την άλλη δε, σύμφωνα με την πρόταση 2.3.4, το $\chi^* = \psi^*$ είναι ένας χαρακτήρας Brauer της ομάδας G (και συγκεκριμένα αυτός της αναπαράστασης $\widetilde{\Psi}$). Ο τελευταίος ισχυρισμός της εκφώνησης έπεται άμεσα από τα προηγούμενα και την πρόταση 2.1.12. □

Θεώρημα 2.3.10. *Το σύνολο $\operatorname{IBr}_p(G)$ αποτελεί μια βάση του $\mathbb{C}$ - διανυσματικού χώρου $\mathcal{C}f(G^*)$ των p - regular class functions της G. Ειδικότερα, ισχύει η ισοτητα*

$$|\operatorname{IBr}_p(G)| = |\mathcal{C}l(G^*)| \,.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $\chi \in \mathcal{C}f(G^*)$. Λόγω του θεωρήματος 2.2.3, αρκεί να δειχθεί ότι το χ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός, υπεράνω του $\mathbb{C}$, στοιχείων του $\operatorname{IBr}_p(G)$. Ας θεωρήσουμε τυχαία *επέκταση* $\psi \in \mathcal{C}f(G)$ του χ (δηλαδή $\psi^* = \chi$). Βάσει του πορίσματος 1.3.31, υπάρχουν μιγαδικοί συντελεστές $a_\phi \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$$\psi = \sum_{\phi \in \operatorname{Irr}(G)} a_\phi \, \phi.$$

Περιορίζοντας την παραπάνω ισότητα επί του $G^* \subseteq G$, λαμβάνουμε άμεσα ότι

$$\chi = \psi^* = \sum_{\phi \in \operatorname{Irr}(G)} a_\phi \, \phi^*,$$

όπου, βάσει του θεωρήματος 2.3.9, τα ϕ^* είναι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του $\operatorname{IBr}_p(G)$, με συντελεστές από το $\mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{C}$. Συνολικά λοιπόν το χ είναι πράγματι ένας $\mathbb{C}$ - γραμμικός συνδυασμός του $\operatorname{IBr}_p(G)$. Τέλος, επειδή προφανώς ισχύει ότι $\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{C}f(G^*)\big) = |\mathcal{C}l(G^*)|$ (πρβλ. ορισμό 1.3.24), η ζητούμενη ισότητα είναι αληθής. □

Προτού κλεισουμε την παρούσα ενότητα, αποδεικνυούμε ότι οι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer διαφοροποιούνται από τους ανάγωγους μιγαδικούς χαρακτήρες μόνον στην περίπτωση όπου η ομάδα G έχει τάξη πολλαπλάσια του πρώτου αριθμού p.

Παρατήρηση 2.3.11. Έστω τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Βάσει του θεωρήματος 2.3.9, ο περιορισμός χ^* είναι ένας χαρακτήρας Brauer της ομάδας G, οπότε υπάρχουν συντελεστές $d_\phi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ τέτοιοι ώστε

$$\chi^* = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_\phi \, \phi \ .$$

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.3, το σύνολο $\mathrm{IBr}_p(G)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο πάνω από το $\mathbb{C}$, οπότε έχουμε άμεσα ότι οι παραπάνω συντελεστές είναι μοναδικά καθορισμένοι από τον περιορισμό χ^*. Επειδή επιπροσθέτως το χ^* είναι προφανώς μοναδικά καθορισμένο από τον χαρακτήρα χ, συνολικά τα d_ϕ καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τον $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Για τον λόγο αυτό συμβολίζουμε τους παραπάνω συντελεστές με $d_{\chi\phi}$ και γράφουμε

$$\chi^* = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_{\chi\phi} \, \phi \ \ , \ \ d_{\chi\phi} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ . \tag{2.8}$$

Ορισμός 2.3.12. Οι μοναδικά καθορισμένοι συντελεστές $d_{\chi\phi}$ της σχέσης (2.8) καλούνται **αριθμοί αποσύνθεσης** της ομάδας G (ως προς τον πρώτο p). Επιπροσθέτως, ο πίνακας

$$A = (d_{\chi\phi})_{\chi \in \mathrm{Irr}(G), \phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \ ,$$

διαστάσεως $\big|\mathrm{Irr}(G)\big| \times \big|\mathrm{IBr}_p(G)\big|$, καλείται **πίνακας αποσύνθεσης** της G.

Λήμμα 2.3.13. *Για τον πίνακα αποσύνθεσης A της G (ως προς τον πρώτο p) ισχύει ότι* $\mathrm{rank}(A) = \big|\mathrm{IBr}_p(G)\big|$.

Απόδειξη. Ας ορίσουμε $\big|\mathrm{IBr}_p(G)\big| := k$. Για να δείξουμε ότι $\mathrm{rank}(A) = k$ αρκεί να βρούμε έναν αντιστρέψιμο υποπίνακα του A, διαστάσεως $k \times k$. Προς τούτο, θεωρούμε το σύνολο $\big\{\chi^* : \chi \in \mathrm{Irr}(G)\big\}$, το οποίο προφανώς παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{C}f(G^*)$. Επομένως υπάρχει κάποιο υποσύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\Omega := \big\{\chi^* : \chi \in \mathcal{B}\big\}$ να αποτελεί μια βάση του $\mathcal{C}f(G^*)$. Ειδικότερα, σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.10, έχουμε $|\mathcal{B}| = |\Omega| = k$. Θεωρούμε εν συνεχεία τον $(k \times k)$ υποπίνακα του A,

$$A' := (d_{\chi\phi})_{\chi \in \mathcal{B}, \phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \ .$$

Επειδή το σύνολο Ω αποτελεί βάση του χώρου $\mathcal{C}f(G^*)$, έπεται άμεσα ότι ο πίνακας A' διαθέτει γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές, οπότε είναι αντιστρέψιμος. □

Λήμμα 2.3.14. *Για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ υπάρχει κάποιο $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ για το οποίο ισχύει $d_{\chi\phi} \neq 0$. Επιπροσθέτως, για κάθε $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ υπάρχει κάποιο $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιο ώστε $d_{\chi\phi} \neq 0$.*

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, επειδή $1 \in G^*$, για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ έχουμε $\chi(1) = \chi^*(1)$ και

$$0 \neq \deg(\mathcal{X}) \overset{(1.18)}{=} \chi(1) = \chi^*(1) = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_{\chi\phi}\phi(1) ,$$

όπου $\mathcal{X}$ είναι η $\mathbb{C}$ - αναπαράσταση στην οποία αντιστοιχεί ο χαρακτήρας χ. Επομένως υπάρχει πράγματι κάποιο $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ με $d_{\chi\phi} \neq 0$. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι άμεση απόρροια του λήμματος 2.3.13, καθώς ο πίνακας αποσύνθεσης δεν μπορεί να έχει καμία μηδενική στήλη. ☐

Λήμμα 2.3.15. *Εάν $p \nmid |G|$ τότε ισχύει η ισότητα*

$$|G| = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \phi(1)^2 .$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, εάν η $\mathcal{X}$ είναι μια $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση της G και ϕ είναι ο αντίστοιχος χαρακτήρας Brauer, τότε ισχύει η ισότητα

$$\phi(1) = \deg(\mathcal{X}) . \tag{2.9}$$

Πράγματι· έστω ότι $\deg(\mathcal{X}) = d$. Επειδή ο πίνακας $\mathcal{X}(1) = I_d$ διαθέτει ως ιδιοτιμή του το $1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}^\times$ (με πολλαπλότητα d) και $\pi^{-1}(1_{\mathbb{F}}) = 1$, έχουμε εξ ορισμού ότι

$$\phi(1) = \sum_{i=1}^{d} 1 = d .$$

Έστω τώρα $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αναγώγων αναπαραστάσεων της άλγεβρας $\mathbb{F}[G]$ και $\phi_1, \dots, \phi_k$ οι αντίστοιχοι χαρακτήρες Brauer, έτσι ώστε $\mathrm{IBr}_p(G) = \{\phi_1, \dots, \phi_k\}$. Έστω ακόμα $\{M_1, \dots, M_k\}$ το αντίστοιχο σύνολο αντιπροσώπων των μη ισόμορφων αναγώγων $\mathbb{F}[G]$ - modules, με

$$d_i := \dim_{\mathbb{F}}(M_i) = \deg(\mathcal{X}_i) \ , \text{ για κάθε } i = 1, \dots, k .$$

Εξ υποθέσεως η χαρακτηριστική p του σώματος $\mathbb{F}$ δεν διαιρεί την τάξη της ομάδας G, οπότε, βάσει του θεωρήματος του Maschke 1.3.16, η άλγεβρα $\mathbb{F}[G]$ είναι semisimple. Επειδή επιπροσθέτως το σώμα $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, έχουμε τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Wedderburn 1.2.21 για $A = \mathbb{F}[G]$. Από το σκέλος (iii) του εν λόγω θεωρήματος και τις σχέσεις (1.15) και (2.9) έχουμε άμεσα ότι

$$|G| = \dim_{\mathbb{F}}\big(\mathbb{F}[G]\big) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \big(\phi_i(1)\big)^2 .$$ ☐

Θεώρημα 2.3.16. *Εαν $p \nmid |G|$ τότε ισχύει η ισότητα* $\mathrm{IBr}_p(G) = \mathrm{Irr}(G)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς επειδή $1 \in G^*$ έχουμε $\chi(1) = \chi^*(1)$, για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με το λήμμα 2.3.14, για κάθε $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ υπάρχει κάποιο $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, τέτοιο ώστε $d_{\chi\phi} \geq 1$. Ειδικότερα, τούτο σημαίνει ότι

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (d_{\chi\phi})^2 \geq 1 \ , \ \text{για κάθε } \phi \in \mathrm{IBr}_p(G) \ . \tag{2.10}$$

Η πρόταση 1.3.20 σε συνδυασμό με τη σχέση (2.8), τη σχέση (2.10) και το λήμμα 2.3.15 μας δίνουν την ακόλουθη σειρά ανισοϊσοτήτων :

$$\begin{aligned}
|G| &\overset{1.3.20}{=} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 \overset{(2.8)}{=} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_{\chi\phi}\phi(1) \right)^2 \\
&= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi,\psi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_{\chi\phi} d_{\chi\psi} \phi(1)\psi(1) \right) \\
&\geq \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} (d_{\chi\phi})^2 \phi(1)^2 \right) \\
&= \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \left[\left(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (d_{\chi\phi})^2 \right) \phi(1)^2 \right] \\
&\overset{(2.10)}{\geq} \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \phi(1)^2 \overset{2.3.15}{=} |G| \ .
\end{aligned}$$

Επομένως η παραπάνω σειρά οφείλει να αποτελείται αποκλειστικά από ισότητες.

Ισχυρισμός 1: Για κάθε $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ υπάρχει κάποιο μοναδικό $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ για το οποίο ισχύει $d_{\chi\phi} \neq 0$ (και ειδικότερα $d_{\chi\phi} = 1$).
Η ύπαρξη ενός $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ για το οποίο $d_{\chi\phi} \neq 0$ είναι εξασφαλισμένη από το λήμμα 2.3.14. Ως προς την μοναδικότητα, παρατηρούμε ότι από την ισότητα

$$\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \left[\left(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (d_{\chi\phi})^2 \right) \phi(1)^2 \right] = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} \phi(1)^2$$

έχουμε άμεσα ότι

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (d_{\chi\phi})^2 = 1 \ , \ \text{για κάθε } \phi \in \mathrm{IBr}_p(G) \ .$$

Επειδή οι συντελεστές $d_{\chi\phi}$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, έχουμε κατ' ανάγκην ότι, για κάθε $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$, υπάρχει κάποιο μοναδικό $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ για το οποίο ισχύει

$d_{\chi\phi} \neq 0$. Ειδικότερα, για το συγκεκριμένο χ, θα πρέπει $d_{\chi\phi} = 1$. $\diamondsuit$

Ισχυρισμός 2 : Για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ υπάρχει κάποιο μοναδικό $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ για το οποίο ισχύει $d_{\chi\phi} \neq 0$.

Η ύπαρξη ενός τέτοιου $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ είναι και πάλι γνωστή από το λήμμα 2.3.14. Απομένει η απόδειξη της μοναδικότητας. Από την ισότητα

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi,\psi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_{\chi\phi} d_{\chi\psi} \phi(1)\psi(1) \right) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} (d_{\chi\phi})^2 \phi(1)^2 \right)$$

συμπεραίνουμε άμεσα ότι, για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ και για κάθε $\phi, \psi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ τέτοια ώστε $\phi \neq \psi$, ισχύει κατ' ανάγκην $d_{\chi\phi} d_{\chi\psi} = 0$. Έστω τώρα τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν κάποια $\phi, \psi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ τέτοια ώστε $d_{\chi\phi} \neq 0$ και $d_{\chi\psi} \neq 0$. Τότε $d_{\chi\phi} d_{\chi\psi} \neq 0$, οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα $\phi = \psi$. $\diamondsuit$

Επειδή εξ υποθέσεως $p \nmid |G|$, ισχύει η ισότητα $G^* = G$ και κατ' επέκτασιν $\chi = \chi^*$, για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Συνδυάζοντας τους ισχυρισμούς 1 και 2, καταλήγουμε άμεσα στο ότι για κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, υπάρχει κάποιο $\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)$, τέτοιο ώστε $\chi = \chi^* = \phi$. Επομένως $\mathrm{Irr}(G) \subseteq \mathrm{IBr}_p(G)$ και αναλόγως αποδεικνύεται και ο αντίστροφος εγκλεισμός. $\square$

2.4 Παραδείγματα

Κλείνουμε το κεφάλαιο 2 με τον υπολογισμό των αναγώγων χαρακτήρων Brauer, καθώς και των πινάκων αποσύνθεσης[4], για τις ομάδες που μελετήσαμε νωρίτερα στην ενότητα 1.5. Στο υπόλοιπο της παρούσας ενότητας το $\mathbb{F}$ θα είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, χαρακτηριστικής $p > 0$ (πρβλ. κατασκευή σελ. 42).

Ορισμός 2.4.1. Έστω p ένας πρώτος αριθμός, G μια πεπερασμένη ομάδα και $\{g_1, \dots, g_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων από τις διακεκριμένες p - regular κλάσεις συζυγίας της G. Βάσει του θεωρήματος 2.3.10, η ομάδα G διαθέτει k το πλήθος αναγώγους χαρακτήρες Brauer, έστω $\mathrm{IBr}_p(G) = \{\phi_1, \dots, \phi_k\}$. Καλούμε **πίνακα χαρακτήρων Brauer** της ομάδας G ένα κατάλογο διαστάσεως $(k \times k)$, ο οποίος στην i - οστή γραμμή και στην j - οστή στήλη του διαθέτει ως εγγραφή τον μιγαδικό αριθμό $\phi_i(g_j)$.

Παρατήρηση 2.4.2. Λόγω του θεωρήματος 2.3.16 έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε μόνο περιπτώσεις όπου ο πρώτος p αποτελεί έναν διαιρέτη της τάξεως

[4] Για λόγους καλύτερης απεικόνισης του κειμένου, αναγράφουμε συνήθως τον ανάστροφο του πίνακα αποσύνθεσης.

της ομάδας (ειδάλλως $G^* = G$ και οι συνήθεις πίνακες χαρακτήρων ταυτίζονται με τους πίνακες χαρακτήρων Brauer).

Παράδειγμα 2.4.3. Ας θεωρήσουμε την κυκλική ομάδα $\mathfrak{C}_3 := \langle a \;:\; a^3 = 1 \rangle$ (πρβλ. παράδειγμα 1.5.2) και ας υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε για $p = 3$. Αυτή διαθέτει μόνο μια 3 - regular κλάση συζυγίας, την τετριμμένη $\{1\}$. Κατ' επέκτασιν έχουμε μόνο μια ανάγωγη αναπαράσταση πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$ (χαρακτηριστικής $p = 3$), την τετριμμένη $\mathcal{X}(a^k) = 1_{\mathbb{F}}$, για κάθε $k = 0, 1, 2$. Έστω τώρα ϕ ο αντίστοιχος ανάγωγος χαρακτήρας Brauer. Εάν $\mathrm{Irr}(\mathfrak{C}_3) = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$, τότε προφανώς $\chi_1^* = \chi_2^* = \chi_3^* = \phi$, οπότε ο πίνακας χαρακτήρων Brauer και ο πίνακας αποσύνθεσης της $\mathfrak{C}_3$ είναι αντιστοίχως οι ακόλουθοι :

$p = 3$	1
ϕ	1

$\mathfrak{C}_3$	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*
ϕ	1	1	1

Παράδειγμα 2.4.4. Ας θεωρήσουμε την κυκλική ομάδα $\mathfrak{C}_{12} := \langle a \;:\; a^{12} = 1 \rangle$ (πρβλ. παράδειγμα 1.5.3). Υποθέτουμε αρχικά ότι $p = 2$. Τα μόνα 2 - regular στοιχεία της $\mathfrak{C}_{12}$ είναι τα $1, a^4$ και a^8, οπότε έχουμε τρεις το πλήθος 2 - regular κλάσεις συζυγίας, τις $\mathcal{C}_1 = \{1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{a^4\}$ και $\mathcal{C}_3 = \{a^8\}$. Έστω $\mathbb{F}$ το σώμα χαρακτηριστικής 2 με το οποίο θα εργασθούμε. Επειδή η ομάδα $\mathfrak{C}_{12}$ είναι αβελιανή, το πόρισμα 1.3.13 μας πληροφορεί ότι κάθε ανάγωγη $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση οφείλει να είναι βαθμού ένα. Επειδή επιπροσθέτως το σώμα $\mathbb{F}$ έχει χαρακτηριστική 2, εάν η $\mathcal{X} : G \to \mathbb{F}$ είναι μια τέτοια αναπαράσταση, έχουμε

$$1 = \big(\mathcal{X}(a)\big)^{12} = \big(\mathcal{X}(a)\big)^{2^2 \cdot 3} = \big(\mathcal{X}(a)\big)^3 ,$$

οπότε οι τιμές της $\mathcal{X}$ αποτελούν τρίτες ρίζες της μονάδος του $\mathbb{F}$. Έστω λοιπόν $\overline{\omega} \in \mathbb{F}^\times$ μια τρίτη ρίζα της μονάδος και ας θεωρήσουμε τις τρεις $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις:

$$\mathcal{X}_1(a^k) = 1_{\mathbb{F}} \;,\; \mathcal{X}_2(a^k) = \overline{\omega}^k \;,\; \mathcal{X}_3(a^k) = \overline{\omega}^{2k} \;,$$

για κάθε $0 \le k \le 11$. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι οι $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ και $\mathcal{X}_3$ αποτελούν ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις της $\mathfrak{C}_{12}$. Ας υπολογίσουμε τους αντίστοιχους ανάγωγους χαρακτήρες Brauer ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3. Ορίζουμε $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in U$ (βλ. ορισμό 2.1.6) και θεωρούμε τον φυσικό ισομορφισμό $\pi : U \to \mathbb{F}^\times$ έτσι ώστε $\pi(\omega) = \overline{\omega}$. Επειδή

$$\phi_2(a^4) = \omega^4 = \omega \;,\; \phi_2(a^8) = \phi_3(a^4) = \omega^8 = \omega^2 \quad \text{και} \quad \phi_3(a^8) = \omega^{16} = \omega \;,$$

ο πίνακας των χαρακτήρων Brauer (για $p=2$) της $\mathfrak{C}_{12}$ είναι ο ακόλουθος :

$p=2$	1	a^4	a^8
ϕ_1	1	1	1
ϕ_2	1	ω	ω^2
ϕ_3	1	ω^2	ω

Εάν ορίσουμε $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{12}}$, τότε $\omega = \zeta^4$ και ο πίνακας των χαρακτήρων Brauer εκφράζεται ως εξής :

$p=2$	1	a^4	a^8
ϕ_1	1	1	1
ϕ_2	1	ζ^4	ζ^8
ϕ_3	1	ζ^8	ζ^4

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα αποσύνθεσης της $\mathfrak{C}_{12}$ απομονώνουμε από τον (συνήθη) πίνακα χαρακτήρων (βλ. σελ. 37) τις τιμές των περιορισμών :

	χ_0^*	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*	χ_4^*	χ_5^*	χ_6^*	χ_7^*	χ_8^*	χ_9^*	χ_{10}^*	χ_{11}^*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^4	1	ζ^4	ζ^8	1	ζ^4	ζ^8	1	ζ^4	ζ^8	1	ζ^4	ζ^8
a^8	1	ζ^8	ζ^4	1	ζ^8	ζ^4	1	ζ^8	ζ^4	1	ζ^8	ζ^4

Επομένως

$$\chi_0^* = \chi_3^* = \chi_6^* = \chi_9^* = \phi_1$$

$$\chi_1^* = \chi_4^* = \chi_7^* = \chi_{10}^* = \phi_2$$

$$\chi_2^* = \chi_5^* = \chi_8^* = \chi_{11}^* = \phi_3$$

και ο πίνακας αποσύνθεσης είναι ο παρακάτω :

$\mathfrak{C}_{12}$	χ_0^*	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*	χ_4^*	χ_5^*	χ_6^*	χ_7^*	χ_8^*	χ_9^*	χ_{10}^*	χ_{11}^*
ϕ_1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
ϕ_2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
ϕ_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Ας προχωρήσουμε τώρα στην περίπτωση όπου το σώμα $\mathbb{F}$ έχει χαρακτηριστική $p=3$. Τα 3 - regular στοιχεία της $\mathfrak{C}_{12}$ είναι τα $1, a^3, a^6$ και a^9, οπότε οι τέσσερεις 3 - regular κλάσεις συζυγίας είναι οι $\mathcal{C}_1 = \{1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{a^3\}$, $\mathcal{C}_3 = \{a^6\}$ και $\mathcal{C}_4 = \{a^9\}$. Ομοίως με προηγουμένως, κάθε ανάγωγη $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση είναι βαθμού ένα και υπολογίζουμε ότι οι τιμές της οφείλουν να είναι τέταρτες ρίζες της μονάδος του $\mathbb{F}$. Έστω $\varpi \in \mathbb{F}^\times$ μια τέταρτη ρίζα της μονάδος και ας θεωρήσουμε τις τέσσερεις $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις :

$$\mathcal{X}_1(a^k) = 1_{\mathbb{F}}\ ,\ \mathcal{X}_2(a^k) = \overline{\omega}^k\ ,\ \mathcal{X}_3(a^k) = \overline{\omega}^{2k}\ \text{ και }\ \mathcal{X}_4(a^k) = \overline{\omega}^{3k}\ ,$$

για κάθε $0 \leq k \leq 11$, οι οποίες αποτελούν ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις της $\mathfrak{C}_{12}$. Έστω ακόμα ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 και ϕ_4 οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer. Ορίζουμε $\omega := e^{\frac{2\pi i}{4}} \in U$ και θεωρούμε τον φυσικό ισομορφισμό $\pi : U \to \mathbb{F}^{\times}$ έτσι ώστε $\pi(\omega) = \overline{\omega}$. Παρατηρούμε ότι

$$\phi_2(a^6) = \phi_3(a^3) = \omega^6 = \omega^2 \ , \ \phi_2(a^9) = \phi_4(a^3) = \omega^9 = \omega$$

καθώς και ότι

$$\phi_3(a^9) = \phi_4(a^6) = \omega^{18} = \omega^2 \ , \ \phi_3(a^6) = \omega^{12} = 1 \ , \ \phi_4(a^9) = \omega^{27} = \omega^3 \ ,$$

οπότε ο πίνακας των χαρακτήρων Brauer (για $p = 3$) της $\mathfrak{C}_{12}$ είναι ο ακόλουθος :

$p=3$	1	a^3	a^6	a^9
ϕ_1	1	1	1	1
ϕ_2	1	ω^3	ω^2	ω
ϕ_3	1	ω^2	1	ω^2
ϕ_4	1	ω	ω^2	ω^3

Εάν ορίσουμε $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{12}}$, τότε $\omega = \zeta^3$ και ο πίνακας των χαρακτήρων Brauer εκφράζεται (ως προς το ζ) ως εξής :

$p=3$	1	a^3	a^6	a^9
ϕ_1	1	1	1	1
ϕ_2	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3
ϕ_3	1	ζ^6	1	ζ^6
ϕ_4	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9

Οι τιμές των περιορισμένων χαρακτήρων είναι οι ακόλουθες :

	χ_0^*	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*	χ_4^*	χ_5^*	χ_6^*	χ_7^*	χ_8^*	χ_9^*	χ_{10}^*	χ_{11}^*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^3	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9	1	ζ^3	ζ^6	ζ^9
a^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6	1	ζ^6
a^9	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3	1	ζ^9	ζ^6	ζ^3

επομένως έχουμε ότι

$$\chi_0^* = \chi_4^* = \chi_8^* = \phi_1$$

$$\chi_1^* = \chi_5^* = \chi_9^* = \phi_4$$

$$\chi_2^* = \chi_6^* = \chi_{10}^* = \phi_3$$

$$\chi_3^* = \chi_7^* = \chi_{11}^* = \phi_2$$

Συνεπώς ο πίνακας αποσύνθεσης είναι ο παρακάτω :

$\mathfrak{C}_{12}$	χ_0^*	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*	χ_4^*	χ_5^*	χ_6^*	χ_7^*	χ_8^*	χ_9^*	χ_{10}^*	χ_{11}^*
ϕ_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
ϕ_2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
ϕ_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
ϕ_4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Παράδειγμα 2.4.5. Έστω

$$\mathfrak{D}_3 = \left\langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1\,,\, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$$

η διεδρική ομάδα τάξεως 6 (πρβλ. παράδειγμα 1.5.4) και ας υποθέσουμε αρχικά ότι εργαζόμαστε σε σώμα $\mathbb{F}$, χαρακτηριστικής $p = 2$. Η $\mathfrak{D}_3$ διαθέτει δύο 2 - regular κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους τα 1 και a. Μια ανάγωγη $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση είναι η τετριμμένη

$$\mathcal{X}_1 : a \mapsto 1_{\mathbb{F}} \ \ ,\ \ b \mapsto 1_{\mathbb{F}}\ .$$

Έστω τώρα $\overline{\omega} \in \mathbb{F}^{\times}$ μια τρίτη ρίζα της μονάδος και ας θεωρήσουμε την $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση (βαθμού 2)

$$\mathcal{X}_2 : a \mapsto \begin{pmatrix} \overline{\omega} & 0 \\ 0 & \overline{\omega}^{-1} \end{pmatrix} \ \ ,\ \ b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι $\mathcal{X}_1$ και $\mathcal{X}_2$ αποτελούν ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις της $\mathfrak{D}_3$. (Σημειωτέον ότι η μιγαδική αναπαράσταση $\mathcal{X} : a \mapsto 1, b \mapsto -1$ του παραδείγματος 1.5.4, είναι ουσιαστικά η τετριμμένη $\mathcal{X}_1$ όταν εργαζόμαστε "modulo 2"). Ας υποθέσουμε ότι ϕ_1 και ϕ_2 είναι οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer. Ορίζουμε $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in U$ και θεωρούμε τον φυσικό ισομορφισμό $\pi : U \to \mathbb{F}^{\times}$ έτσι ώστε $\pi(\omega) = \overline{\omega}$. Επειδή ισχύει $\phi_2(1) = 2$ $\big($πρβλ. σχέση (2.9)$\big)$ καθώς και

$$\phi_2(a) = \pi^{-1}(\overline{\omega} + \overline{\omega}^2) = \omega + \omega^2 = -1\ ,$$

ο πίνακας χαρακτήρων Brauer της $\mathfrak{D}_3$ (για $p = 2$) είναι ο ακόλουθος :

$p=2$	1	a
ϕ_1	1	1
ϕ_2	2	-1

Οι περιορισμένοι χαρακτήρες έχουν τις τιμές

	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*
1	1	1	2
a	1	1	-1

οπότε $\chi_1^* = \chi_2^* = \phi_1$, $\chi_3^* = \phi_2$ και ο πίνακας αποσύνθεσης είναι ο εξής :

$\mathfrak{D}_3$	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*
ϕ_1	1	1	0
ϕ_2	0	0	1

Ας υποθέσουμε εν συνεχεία ότι εργαζόμαστε σε σώμα $\mathbb{F}$, χαρακτηριστικής $p = 3$. Η $\mathfrak{D}_3$ διαθέτει δύο 3 - regular κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους τα 1 και b. Ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις ανάγωγες $\mathbb{F}$ - αναπαραστάσεις δίνεται από τις δυο αναπαραστάσεις (βαθμού 1)

$$\mathcal{X}_1 : a \mapsto 1_{\mathbb{F}} \ , \ b \mapsto 1_{\mathbb{F}} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{X}_2 : a \mapsto 1_{\mathbb{F}} \ , \ b \mapsto -1_{\mathbb{F}} \ .$$

Επομένως, εάν ϕ_1, ϕ_2 είναι οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer, τότε ο πίνακας χαρακτήρων Brauer (για $p = 3$) της $\mathfrak{D}_3$ είναι ο ακόλουθος :

$p = 3$	1	b
ϕ_1	1	1
ϕ_2	1	-1

Επειδή οι περιορισμοί των χαρακτήρων έχουν τις τιμές

	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*
1	1	1	2
b	1	-1	0

έχουμε $\chi_1^* = \phi_1$, $\chi_2^* = \phi_2$ και $\chi_3^* = \phi_1 + \phi_2$. Επομένως ο πίνακας αποσύνθεσης είναι ο παρακάτω :

$\mathfrak{D}_3$	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*
ϕ_1	1	0	1
ϕ_2	0	1	1

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μιγαδική αναπαράσταση της $\mathfrak{D}_3$ (βλ. παράδειγμα 1.5.4)

$$\mathcal{X} : a \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \ , \ b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(όπου $\zeta \in \mathbb{C}$ είναι μια τρίτη ρίζα της μονάδος), δεν παραμένει ανάγωγη πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$. Πράγματι, περνώντας στην χαρακτηριστική $p = 3$, έχουμε

$$\mathcal{X} : a \mapsto \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{F}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} \ , \ b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathbb{F}} \\ 1_{\mathbb{F}} & 0 \end{pmatrix}$$

και, όπως άμεσα διαπιστώνει κανείς, αυτή είναι ισοδύναμη με την $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση

$$\Psi := \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{X}_2 \end{pmatrix} .$$

Συγκεκριμένα, $\mathcal{X} = D\Psi D^{-1}$, όπου $D := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι, εάν η $\mathcal{X}$ είναι μια μιγαδική αναπαράσταση της ομάδας G τότε, βάσει της προτάσεως 2.3.8, μπορούμε (δίχως βλάβη της γενικότητας) να υποθέσουμε ότι όλοι οι πίνακες $\mathcal{X}(g)$ διαθέτουν εγγραφές από τον τοπικό δακτύλιο $\widetilde{\mathbb{A}}$. Κατ' επέκτασιν λοιπόν, μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση $\mathcal{X}(\mathrm{mod}p)$, με τύπο $\mathcal{X}(\mathrm{mod}p)(g) = \widetilde{\pi}\big(\mathcal{X}(g)\big)$ (πρβλ. ορισμό 2.3.3).

Θεώρημα 2.4.6 (Speiser). *Έστω $\mathbb{F}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, χαρακτηριστικής p. Εάν η $\mathcal{X}$ είναι μια ανάγωγη μιγαδική αναπαράσταση (βαθμού d) της G και επιπροσθέτως ισχύει ότι $p \nmid \frac{|G|}{d}$, τότε η $\mathbb{F}$ - αναπαράσταση $\mathcal{X}(\mathrm{mod}p)$ είναι ανάγωγη.*

Απόδειξη. Βλ. [We], θεώρημα 8.2, σελ. 97. □

Έστω $H \lhd G$ μια κανονική υποομάδα της G. Κατ' αναλογίαν με την πρόταση 1.5.5, έχουμε τη δυνατότητα να ανυψώνουμε τους ανάγωγους $\mathbb{F}$ - χαρακτήρες της G/H σε ανάγωγους $\mathbb{F}$ - χαρακτήρες της ομάδας G, υπό την προϋπόθεση ότι η H αποτελεί μια p - Sylow υποομάδα.

Πόρισμα 2.4.7. *Έστω $H \lhd G$ μια κανονική p - Sylow υποομάδα της G και $\mathbb{F}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, χαρακτηριστικής p. Εάν το $\widetilde{\chi}$ είναι ένας ανάγωγος $\mathbb{F}$ - χαρακτήρας της G/H, τότε η συνάρτηση $\chi : G \to \mathbb{F}$ με τύπο*

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Hg)\,, \quad \textit{για κάθε } g \in G\,,$$

αποτελεί έναν ανάγωγο $\mathbb{F}$ - χαρακτήρα της ομάδας G.

Απόδειξη. Έστω ότι $|H| = p^n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $|G| = p^n q$, για κάποιο φυσικό αριθμό q, με $p \nmid q$. Τότε $p \nmid \frac{|G/H|}{d} = \frac{q}{d}$, για κάθε $d \in \mathbb{N}$, οπότε αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Speiser 2.4.6 (για την ομάδα G/H) καθώς και την πρόταση 1.5.5. □

Παράδειγμα 2.4.8. Ας θεωρήσουμε την εναλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_4$, με τάξη 12 (πρβλ. παράδειγμα 1.5.7). Εργαζόμαστε σε σώμα $\mathbb{F}$, χαρακτηριστικής $p = 2$. Η $\mathfrak{A}_4$ διαθέτει τρεις 2 - regular κλάσεις συζυγίας, με αντιπροσώπους τα 1, $b := (123)$ και $c := (132)$. Θεωρούμε την κανονική υποομάδα

$$\mathbb{V} := \big\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\big\}\,,$$

τάξεως $4 = 2^2$. Επειδή $|\mathfrak{A}_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$, η $\mathbb{V}$ είναι μια κανονική 2 - Sylow υποομάδα, με

$$\mathfrak{A}_4/\mathbb{V} = \{\mathbb{V}, \mathbb{V}(123), \mathbb{V}(132)\} \cong \mathfrak{C}_3 \ .$$

Έστω $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in U$ και ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{IBr}_2(\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}) = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Επειδή $p = 2 \nmid 3 = |\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}|$, ο πίνακας των χαρακτήρων Brauer (για $p = 2$) της $\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}$ ταυτίζεται με τον συνήθη πίνακα χαρακτήρων της και είναι ο ακόλουθος (βλ. παράδειγμα 1.5.7):

$p=2$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}(123)$	$\mathbb{V}(132)$
τ_1	1	1	1
τ_2	1	ζ	ζ^2
τ_3	1	ζ^2	ζ

Έστω τώρα $\omega \in \mathbb{F}^\times$ μια τρίτη ρίζα της μονάδος και ας θεωρήσουμε των φυσικό ισομορφισμό $\pi : U \to \mathbb{F}^\times$ έτσι ώστε $\pi(\zeta) = \omega$. Τότε, βάσει του λήμματος 2.1.13, οι τιμές των αναγώγων $\mathbb{F}$ - χαρακτήρων $\widetilde{\psi}_1$, $\widetilde{\psi}_2$ και $\widetilde{\psi}_3$ της $\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}$ δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

$\mathfrak{A}_4/\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}(123)$	$\mathbb{V}(132)$
$\widetilde{\psi}_1$	1	1	1
$\widetilde{\psi}_2$	1	ω	ω^2
$\widetilde{\psi}_3$	1	ω^2	ω

Σύμφωνα με το πόρισμα 2.4.7, έχουμε τη δυνατότητα να ανυψώσουμε τους παραπάνω τρεις ανάγωγους χαρακτήρες σε ανάγωγους $\mathbb{F}$ - χαρακτήρες ψ_1, ψ_2, ψ_3 της ομάδας $\mathfrak{A}_4$. Προφανώς $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A}_4) = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ και οι τιμές αυτών είναι οι εξής :

$\mathfrak{A}_4$	1	b	c
ψ_1	1	1	1
ψ_2	1	ω	ω^2
ψ_3	1	ω^2	ω

Έστω ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3 οι αντίστοιχοι ανάγωγοι χαρακτήρες Brauer. Επειδή έχουμε $\pi^{-1}(\omega) = \zeta$, ο πίνακας των χαρακτήρων Brauer (για $p = 2$) της $\mathfrak{A}_4$ είναι ο ακόλουθος :

$p=2$	1	b	c
ϕ_1	1	1	1
ϕ_2	1	ζ	ζ^2
ϕ_3	1	ζ^2	ζ

Επιπροσθέτως, οι περιορισμένοι μιγαδικοί χαρακτήρες έχουν τις τιμές (πρβλ. παράδειγμα 1.5.7)

	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*	χ_4^*
1	1	1	1	3
b	1	ζ	ζ^2	0
c	1	ζ^2	ζ	0

,

οπότε $\chi_1^* = \phi_1$, $\chi_2^* = \phi_2$, $\chi_3^* = \phi_3$ και $\chi_4^* = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ (διότι $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$). Επομένως ο πίνακας αποσύνθεσης είναι ο εξής :

$\mathfrak{A}_4$	χ_1^*	χ_2^*	χ_3^*	χ_4
ϕ_1	1	0	0	1
ϕ_2	0	1	0	1
ϕ_3	0	0	1	1

Κεφάλαιο 3

π - special χαρακτήρες

3.1 Στοιχεία από την θεωρία Clifford

Ορισμός 3.1.1. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\chi \in \mathcal{C}f(N)$. Επειδή $ghg^{-1} \in N$, για κάθε $g \in G$ και $h \in N$, έχουμε τη δυνατότητα, για ένα σταθεροποιημένο $g \in G$, να ορίσουμε συνάρτηση

$$\chi^g : N \to \mathbb{C} \ , \ \ \chi^g(h) = \chi(ghg^{-1}) \ .$$

Λήμμα 3.1.2. *Έστω $N \lhd G$, $\chi \in \mathcal{C}f(N)$ και $g \in G$ τυχόν στοιχείο. Τότε*

(i) Το χ^g είναι class function της N.

(ii) Εάν το χ είναι χαρακτήρας της N, τότε και το χ^g είναι χαρακτήρας της N.

(iii) Εάν $\psi \in \mathcal{C}f(G)$, τότε ισχύει ότι $[\psi_N, \chi^g] = [\psi_N, \chi]$.

Απόδειξη. (i) Ας συμβολίσουμε με $\sim$ την σχέση της συζυγίας στοιχείων. Επειδή $N \lhd G$, για κάθε $g \in G$ ως γνωστόν ισχύει η συνεπαγωγή

$$h_1 \sim h_2 \Rightarrow gh_1g^{-1} \sim gh_2g^{-1} \ .$$

Εάν λοιπόν $h_1 \sim h_2$, τότε $\big($επειδή εξ υποθέσεως $\chi \in \mathcal{C}f(N)\big)$ έχουμε

$$\chi^g(h_1) = \chi(gh_1g^{-1}) = \chi(gh_2g^{-1}) = \chi^g(h_2) \ .$$

(ii) Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι εάν ο χαρακτήρας χ αντιστοιχεί σε μια αναπαράσταση $\mathcal{X}$ της N, τότε η απεικόνιση $\mathcal{X}^g(h) = \mathcal{X}(ghg^{-1})$, $h \in N$, αποτελεί μια αναπαράσταση της ομάδας N με αντίστοιχο χαρακτήρα τον χ^g.
(iii) Κατ' αρχάς, επειδή $ghg^{-1} \in N$, για κάθε $g \in G, h \in N$, άμεσα υπολογίζει κανείς από τον ορισμό 1.4.3 την ισότητα $[(\psi_N)^g, \chi^g] = [\psi_N, \chi]$. Επειδή επιπροσθέτως

$\psi \in \mathcal{C}f(G)$, παρατηρούμε ότι

$$(\psi_N)^g(h) = \psi_N(ghg^{-1}) = \psi(ghg^{-1}) = \psi(h) = \psi_N(h) \ ,$$

οπότε $(\psi_N)^g = \psi_N$ και ισχύει η ζητούμενη ισότητα. $\square$

Παρατήρηση 3.1.3. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα. Προφανώς εάν το χ είναι ένας ανάγωγος χαρακτήρας της N, τότε ο συζυγής χαρακτήρας χ^g είναι επίσης ανάγωγος, για κάθε $g \in G$. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι η ομάδα G δρα επί του συνόλου $\mathrm{Irr}(N)$ των αναγώγων χαρακτήρων της N, μέσω της δράσης

$$G \times \mathrm{Irr}(N) \to \mathrm{Irr}(N) \ \ , \ \ (g, \chi) \mapsto \chi^g \ . \tag{3.1}$$

Ορισμός 3.1.4. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(N)$. Τα στοιχεία της τροχιάς $G(\chi) := \{\chi^g : g \in G\}$ του χ, τα καλούμε **συζυγείς χαρακτήρες του** χ **(εντός της** G**)**. Προφανώς το ίδιο το χ είναι συζυγής χαρακτήρας του εαυτού του (εντός της G).

Ορισμός 3.1.5. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(N)$. Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathrm{I}_G(\chi) := \{g \in G : \chi^g = \chi\} \ .$$

Τούτο είναι ο σταθεροποιητής $\mathrm{Stab}(\chi)$ του στοιχείου χ ως προς τη δράση (3.1) και, ως γνωστόν, αποτελεί μια υποομάδα της G.

Λήμμα 3.1.6. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(N)$.*

(i) Εάν $g_1, g_2 \in G$ τότε $\chi^{g_1 g_2} = (\chi^{g_2})^{g_1}$.

(ii) Εάν $g \in G$ τότε $\mathrm{I}_G(\chi^g) = g\, \mathrm{I}_G(\chi)\, g^{-1}$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $y \in N$ ισχύει

$$\chi^{g_1 g_2}(y) = \chi\left(g_1 g_2 y g_2^{-1} g_1^{-1}\right) = \chi^{g_1}\left(g_2 y g_2^{-1}\right) = (\chi^{g_2})^{g_1}(y) \ .$$

(ii)Έστω τυχόν $x \in \mathrm{I}_G(\chi^g)$. Βάσει του προηγουμένου έχουμε

$$\chi^{g^{-1}xg} = (\chi^g)^{g^{-1}x} = ((\chi^g)^x)^{g^{-1}} = (\chi^g)^{g^{-1}} = \chi^{g^{-1}g} = \chi \ ,$$

οπότε $g^{-1}xg \in \mathrm{I}_G(\chi)$ και $x = g\left(g^{-1}xg\right)g^{-1} \in g\, \mathrm{I}_G(\chi)\, g^{-1}$. Για την απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού, έστω $x = gyg^{-1}$, για κάποιο $y \in \mathrm{I}_G(\chi)$. Τότε

$$(\chi^g)^x = \chi^{xg} = \chi^{gy} = (\chi^y)^g = \chi^g \ ,$$

οπότε πράγματι $x \in \mathrm{I}_G(\chi^g)$. $\square$

Θεώρημα 3.1.7 (Clifford). *Έστω $N \lhd G$ και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Έστω ακόμα $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_N. Ας υποθέσουμε ότι τα $\theta_1, \ldots, \theta_s \in \mathrm{Irr}(N)$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G (με, δίχως βλάβη της γενικότητας, $\theta = \theta_1$). Τότε*

$$\chi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s), \quad \text{όπου } m := [\chi_N, \theta] \in \mathbb{N} . \tag{3.2}$$

Επιπροσθέτως, $s = [G : \mathrm{I}_G(\theta)]$ και ειδικότερα το s διαιρεί τον δείκτη $[G : N]$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε αρχικά τον χαρακτήρα $\left(\theta^G\right)_N$ της υποομάδας N. Επειδή $N \lhd G$, για κάθε $g \in G$ και $h \in N$, ισχύει $ghg^{-1} \in N$. Επομένως

$$\begin{aligned}\left(\theta^G\right)_N(h) &= \theta^G(h) = \frac{1}{|N|} \cdot \sum_{g \in G} \theta^\circ(ghg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|N|} \cdot \sum_{g \in G} \theta(ghg^{-1}) = \frac{1}{|N|} \cdot \sum_{g \in G} \theta^g(h) ,\end{aligned}$$

οπότε

$$\sum_{g \in G} \theta^g(h) = \left(\theta^G\right)_N(h) \cdot |N| , \quad \forall\, h \in N . \tag{3.3}$$

Ισχυρισμός : Όλες οι ανάγωγες συνιστώσες του χαρακτήρα χ_N ανήκουν στο σύνολο των συζυγών χαρακτήρων $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$.

Πράγματι· θεωρούμε τυχόν $\phi \in \mathrm{Irr}(N)$ με $\phi \notin \{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ και αρκεί να δείξουμε ότι $[\phi, \chi_N] = 0$. Κατ' αρχάς, από τη σχέση (3.3) και το λήμμα του Frobenius 1.4.15, έχουμε ότι

$$0 = \big[\phi, \sum_{g \in G} \theta^g\big] \overset{(3.3)}{=} [\phi, (\theta^G)_N] = [\phi^G, \theta^G] .$$

Επιπροσθέτως, το χ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του θ^G, διότι (και πάλι από το λήμμα του Frobenius), έχουμε $0 \neq [\theta, \chi_N] = [\theta^G, \chi]$. Από τις σχέσεις $[\phi^G, \theta^G] = 0$ και $[\theta^G, \chi] \neq 0$, άμεσα έχουμε ότι $[\phi^G, \chi] = 0$. Ωστόσο, από το λήμμα του Frobenius, $[\phi^G, \chi] = [\phi, \chi_N]$ ♢

Βάσει του ισχυρισμού, ο χαρακτήρας χ_N γράφεται υπό την μορφή

$$\chi_N = \sum_{i=1}^{s} [\chi_N, \theta_i] \cdot \theta_i .$$

Ωστόσο, το λήμμα 3.1.2(*iii*) μας πληροφορεί ότι $[\chi_N, \theta_i] = [\chi_N, \theta]$, για κάθε δείκτη $i = 1, \ldots, s$. Επομένως τελικά $\chi_N = [\chi_n, \theta] \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s)$.

Επιπροσθέτως, η τροχιά του στοιχείου θ ως προς τη δράση (3.1) είναι εξ υποθέσεως η $G(\theta) = \{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$, οπότε από το γνωστό θεώρημα τροχιών και σταθεροποιητών υπολογίζουμε ότι

$$|G| = |G(\theta)| \cdot |\mathrm{Stab}(\theta)| = s \cdot |\mathrm{I}_G(\theta)| \ .$$

Επομένως πράγματι $s = [G : \mathrm{I}_G(\theta)]$. Εξάλλου, είναι προφανές ότι η κανονική υποομάδα N δρα τετριμμένα στο σύνολο $\mathrm{Irr}(N)$, οπότε ισχύει $N \subseteq \mathrm{I}_G(\theta)$ και το s διαιρεί τον δείκτη $[G : N]$. $\square$

Σημείωση 3.1.8. Αποδεικνύεται ότι στην γραφή (3.2) του χαρακτήρα χ_N ο φυσικός αριθμός m διαιρεί τον δείκτη $[G : N]$. Για λεπτομέρειες επ' αυτού, παραπέμπουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 21.3, σελ. 290 του [Hu] (όπου με χρήση των λεγόμενων "προβολικών αναπαραστάσεων" αποδεικνύεται ότι ο αριθμός m διαιρεί ειδικότερα τον δείκτη $[\mathrm{I}_G(\theta) : N]$).

Πόρισμα 3.1.9. *Έστω $N \lhd G$ και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Έστω ακόμα $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_N. Τότε το $\theta(1)$ διαιρεί το $\chi(1)$.*

Απόδειξη. Έστω $\theta_1, \ldots, \theta_s$ οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G, με $\theta = \theta_1$. Βάσει του θεωρήματος του Clifford 3.1.7, $\chi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s)$, όπου $m := [\chi_N, \theta]$. Επειδή $\theta^g(1) = \theta(g1g^{-1}) = \theta(1)$, για κάθε $g \in G$, έχουμε

$$\theta_1(1) = \cdots = \theta_s(1) = \theta(1) \ .$$

Επομένως $\chi(1) = \chi_N(1) = ms\,\theta(1)$ και τελικά $\theta(1)|\chi(1)$. $\square$

Πόρισμα 3.1.10. *Εάν $N \lhd G$ και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ τότε $[\theta^G, \theta^G] = [\mathrm{I}_G(\theta) : N]$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς από τη σχέση (3.3) και τον ορισμό του $\mathrm{I}_G(\theta)$ έχουμε άμεσα

$$(\theta^G)_N = [\mathrm{I}_G(\theta) : N] \cdot \sum_{i=1}^{s} \theta_i \ ,$$

όπου $\theta_1, \ldots, \theta_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G. Με τη βοήθεια του λήμματος του Frobenius 1.4.15 υπολογίζουμε επιπροσθέτως ότι

$$[\theta^G, \theta^G] = [(\theta^G)_N, \theta] = [\mathrm{I}_G(\theta) : N] \ . \quad \square$$

Ορισμός 3.1.11. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υπομάδα και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Συμβολίζουμε το σύνολο των αναγώγων συνιστωσών του χαρακτήρα θ^G ως

$$\mathrm{Irr}(G, \theta) := \left\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : [\chi, \theta^G] > 0\right\} .$$

Σημειωτέον ότι, λόγω του λήμματος του Frobenius 1.4.15, ισχύει ότι

$$\mathrm{Irr}(G, \theta) = \left\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : [\chi_N, \theta] > 0\right\} .$$

Εν συνεχεία αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας σειράς αμφιρριπτικών απεικονίσεων, οι οποίες θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στις παρακάτω ενότητες.

Θεώρημα 3.1.12. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα, χ ένας ανάγωγος χαρακτήρας της G και $\theta, \phi \in \mathrm{Irr}(N)$, τέτοιοι ώστε $\theta = \chi_N$, $\mathrm{I}_G(\phi) = G$ και $\phi\theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Τότε η απεικόνιση*

$$\mathrm{Irr}(G, \phi) \to \mathrm{Irr}(G, \phi\theta) \ \ , \ \ \psi \mapsto \psi\chi$$

είναι αμφιρριπτική.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, επειδή $\theta = \chi_N$, είναι προφανές ότι $\mathrm{I}_G(\theta) = G$. Επιπροσθέτως, εξ υποθέσεως έχουμε $\mathrm{I}_G(\phi) = G$, οπότε $\mathrm{I}_G(\theta\phi) = G$. Συνεπώς το πόρισμα 3.1.10 μας δίνει ότι

$$[\phi^G, \phi^G] = [G : N] = \left[(\phi\theta)^G, (\phi\theta)^G\right] . \tag{3.4}$$

Ας θέσουμε $\mathcal{S} := \mathrm{Irr}(G, \phi)$ και ας υποθέσουμε ότι $\phi^G = \sum_{\psi \in \mathcal{S}} \alpha_\psi \, \psi$. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 1.4.20, έχουμε ότι

$$(\phi\theta)^G = (\phi\chi_N)^G = \phi^G\chi = \sum_{\psi \in \mathcal{S}} \alpha_\psi \psi\chi \ .$$

Επομένως, υπολογίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα, λαμβάνουμε το εξής :

$$\sum_{\psi \in \mathcal{S}} \alpha_\psi^2 = [\phi^G, \phi^G] \overset{(3.4)}{=} \left[(\phi\theta)^G, (\phi\theta)^G\right] = \sum_{\psi, \tau \in \mathcal{S}} \alpha_\psi \alpha_\tau [\psi\chi, \tau\chi] \ .$$

Ωστόσο τούτο σημαίνει ότι

$$[\psi\chi, \tau\chi] = \begin{cases} 1 & , \quad \psi = \tau \\ 0 & , \quad \psi \neq \tau \end{cases} ,$$

οπότε οι χαρακτήρες $\psi\chi$ είναι ανάγωγοι καθώς και διακεκριμένοι για διακεκριμένα $\psi \in \mathcal{S} := \mathrm{Irr}(G, \phi)$. Επομένως η απεικόνιση της εκφωνήσεως είναι ενριπτική. Επιπροσθέτως, επειδή $(\phi\theta)^G = \sum_{\psi \in \mathcal{S}} \alpha_\psi \psi\chi$, έχουμε άμεσα ότι

$$\{\psi\chi : \psi \in \mathrm{Irr}(G, \phi)\} = \mathrm{Irr}(G, \phi\theta)$$

και η εν λόγω απεικόνιση είναι τελικά αμφιρριπτική. □

Σημείωση 3.1.13. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι, μέσω της κατασκευής της ανύψωσης της προτάσεως 1.5.5, έχουμε τη δυνατότητα να ταυτίσουμε το σύνολο $\mathrm{Irr}(G/N)$ με το σύνολο $\mathrm{Irr}(G, 1_N)$. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρούμε τους ανάγωγους χαρακτήρες της G/N ως χαρακτήρες της ίδιας της G.

Μια ειδική και ιδιαιτέρως χρήσιμη περίπτωση του θεωρήματος 3.1.12 αποτελεί το λεγόμενο θεώρημα του Gallagher.

Θεώρημα 3.1.14 (Gallagher). *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και χ ένας ανάγωγος χαρακτήρας της G τέτοιος ώστε $\chi_N = \theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Τότε, για κάθε $\beta \in \mathrm{Irr}(G/N)$, οι χαρακτήρες $\beta\chi$ είναι ανάγωγοι και διακεκριμένοι, για διακεκριμένα β. Ειδικότερα, αποτελούν όλες τις ανάγωγες συνιστώσες του χαρακτήρα θ^G.*

Απόδειξη. Ταυτίζοντας, όπως υποδεικνύει η σημείωση 3.1.13, το σύνολο $\mathrm{Irr}(G/N)$ με το σύνολο $\mathrm{Irr}(G, 1_N)$, αρκεί να θέσουμε $\phi = 1_N$ στο θεώρημα 3.1.12. □

Θεώρημα 3.1.15. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και H μια υποομάδα της G, τέτοιες ώστε $G = NH$. Έστω ακόμα $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ τέτοιος ώστε $\mathrm{I}_G(\theta) = G$ και $\theta_{N\cap H} \in \mathrm{Irr}(N \cap H)$. Τότε η απεικόνιση*

$$\mathrm{Irr}(G,\theta) \to \mathrm{Irr}(H, \theta_{N\cap H}) \ \ , \ \ \chi \mapsto \chi_H$$

είναι αμφιρριπτική.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς επειδή $\mathrm{I}_G(\theta) = G$ έχουμε προφανώς ότι $\mathrm{I}_H(\theta_{N\cap H}) = H$. Θέτουμε $\mathcal{S} := \mathrm{Irr}(G,\theta)$ και υποθέτουμε ότι $\theta^G = \sum_{\chi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi \, \chi$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.1.10 ισχύει ότι

$$\sum_{\chi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi^2 = [\theta^G, \theta^G] = [\mathrm{I}_G(\theta) : N] = [G : N] \, . \tag{3.5}$$

Επειδή $G = NH$, εφαρμόζοντας την πρόταση 1.4.22, έχουμε

$$(\theta_{N\cap H})^H = (\theta^G)_H = \sum_{\chi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi \, \chi_H \, . \tag{3.6}$$

Επομένως το πόρισμα 3.1.10 μας πληροφορεί ότι

$$\begin{aligned} \sum_{\chi,\psi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi \alpha_\psi \, [\chi_H, \psi_H] \ &\overset{(3.6)}{=} \ [(\theta_{N\cap H})^H, (\theta_{N\cap H})^H] \\ &= \ [\mathrm{I}_H(\theta_{N\cap H}) : N \cap H] \\ &= \ [H : N \cap H] \, . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Από την άλλη έχουμε

$$H/(N \cap H) \cong NH/N = G/N \ ,$$

οπότε $[H : N \cap H] = [G : N]$. Τούτο, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (3.5) και (3.7) μας δίνει ότι

$$\sum_{\chi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi^2 = \sum_{\chi,\psi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi \alpha_\psi \, [\chi_H, \psi_H] \, .$$

Επομένως για κάθε $\psi \in \mathcal{S} := \mathrm{Irr}(G, \theta)$ ισχύει

$$[\chi_H, \psi_H] = \begin{cases} 1 & , \quad \chi = \psi \\ 0 & , \quad \chi \neq \psi \end{cases} .$$

Συνεπώς $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H, \theta_{N\cap H})$ και η απεικόνιση της εκφωνήσεως είναι καλώς ορισμένη και ενριπτική. Επιπροσθέτως, επειδή $(\theta_{N\cap H})^H = \sum_{\chi\in\mathcal{S}} \alpha_\chi \, \chi_H$, ισχύει

$$\{\chi_H \ : \ \chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)\} = \mathrm{Irr}(H, \theta_{H\cap N})$$

και η εν λόγω απεικόνιση είναι τελικά αμφιρριπτική. □

Θεώρημα 3.1.16 (Αντιστοιχία Clifford). *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υπομάδα, θ ένας ανάγωγος χαρακτήρας της N και ας ορίσουμε $I := \mathrm{I}_G(\theta)$. Τότε η απεικόνιση*

$$\mathrm{Irr}(I, \theta) \to \mathrm{Irr}(G, \theta) \ \ , \ \ \psi \mapsto \psi^G$$

είναι καλώς ορισμένη και αμφιρριπτική.

Απόδειξη. Βήμα 1 : Εάν $\psi \in \mathrm{Irr}(I, \theta)$, τότε $\psi^G \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$.
Πράγματι· Ας θεωρήσουμε τυχούσα ανάγωγη συνιστώσα χ του χαρακτήρα ψ^G. Επειδή εξ υποθέσεως το θ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του ψ_N, άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι το χ είναι μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα θ^G, οπότε $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$. Συνεπώς απομένει να δείξουμε ότι ισχύει $\chi = \psi^G$. Ας υποθέσουμε, σύμφωνα με το θεώρημα του Clifford 3.1.7, ότι ο περιορισμός ψ_N γράφεται υπό την μορφή

$$\psi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s) \ ,$$

όπου $m := [\theta, \psi_N] \in \mathbb{N}$ και, δίχως βλάβη της γενικότητας, $\theta = \theta_1$. Επειδή ο χαρακτήρας θ είναι, κατά τρόπο προφανή, αναλλοίωτος μέσα στην ομάδα $\mathrm{I}_I(\theta)$ έχουμε ότι $\mathrm{I}_I(\theta) = I$. Επομένως, από το ίδιο θεώρημα, για τον αριθμό s ισχύει $s = [I : \mathrm{I}_I(\theta)] = 1$. Με άλλα λόγια $\psi_N = m\theta$ και ειδικότερα

$$\psi(1) = m\theta(1) \ . \tag{3.8}$$

Από την άλλη, επειδή το θ αποτελεί επίσης ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_N, έχουμε ότι

$$\chi_N = n \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_t) \ ,$$

όπου $n := [\theta, \chi_N] \in \mathbb{N}$, $t = [G : I]$ και, δίχως βλάβη της γενικότητας, $\theta = \theta_1$. Επιπροσθέτως, το λήμμα 1.4.13(ii) σε συνδυασμό με το ότι το χ αποτελεί ανάγωγη συνιστώσα του ψ^G μας δίνει άμεσα ότι

$$\chi(1) \leq \psi^G(1) = [G : I] \, \psi(1) = t \, \psi(1) \ . \tag{3.9}$$

Επιπροσθέτως, προφανώς ισχύει $m \leq n$, οπότε

$$nt\theta(1) = \chi(1) \overset{(3.9)}{\leq} \psi^G(1) = t\psi(1) \overset{(3.8)}{=} tm\theta(1) \leq nt\theta(1) \ .$$

Επομένως η παραπάνω σειρά οφείλει να αποτελείται αποκλειστικά από ισότητες και άρα έχουμε $\chi(1) = \psi^G(1)$ και $m = n$. Ειδικότερα $\chi = \psi^G$ όπως και ήταν το ζητούμενο.

Βήμα 2 : Η απεικόνιση της εκφώνησης είναι ενριπτική.

Για να δείξουμε την ενριπτικότητα της εν λόγω απεικόνισης αρκεί προφανώς να δείξουμε ότι, εάν $\psi \in \mathrm{Irr}(I, \theta)$ και $\chi = \psi^G$, τότε το ψ είναι η μοναδική ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_I εντός του $\mathrm{Irr}(I, \theta)$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπήρχε κάποια ανάγωγη συνιστώσα $\psi' \neq \psi$ του χ_I, τέτοια ώστε $\psi' \in \mathrm{Irr}(I, \theta)$. Τότε $[\theta, \psi'_N] > 0$ και έχουμε ότι

$$[\theta, \chi_N] \geq [\theta, (\psi + \psi')_N] = [\theta, \psi_N] + [\theta, \psi'_N] > [\theta, \psi_N] \ .$$

Ωστόσο, από το βήμα 1, γνωρίζουμε ότι $[\theta, \chi_N] = n = m = [\theta, \psi_N]$, πράγμα που μας οδηγεί σε άτοπο.

Βήμα 3 : Η απεικόνιση της εκφώνησης είναι επιρριπτική.

Πράγματι· έστω τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$. Εάν για κάθε ανάγωγη συνιστώσα α του χαρακτήρα χ_I ίσχυε ότι $[\alpha_N, \theta] = 0$, τότε άμεσα διαπιστώνουμε ότι θα είχαμε $[\theta, \chi_N] = 0$, πράγμα άτοπο καθώς $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$. Επομένως υπάρχει κάποια ανάγωγη συνιστώσα ψ του χ_I, τέτοια ώστε να ισχύει $[\psi_N, \theta] > 0$. Συνεπώς $\psi \in \mathrm{Irr}(I, \theta)$ και το χ αποτελεί ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα ψ^G. Ωστόσο από το βήμα 1 το ψ^G είναι ανάγωγο, οπότε $\chi = \psi^G$ και η απεικόνιση της εκφώνησης είναι επιρριπτική. □

Πόρισμα 3.1.17. *Στην γραφή (3.2) του χαρακτήρα χ_N, ο φυσικός αριθμός m διαιρεί τον δείκτη $[\mathrm{I}_G(\theta) : N]$.*

Απόδειξη. Έχουμε $m = [\theta, \chi_N]$ και ας θεωρήσουμε τυχόν $\psi \in \mathrm{Irr}\big(I_G(\theta), \theta\big)$. Από το βήμα 1 της απόδειξης του θεωρήματος 3.1.16 γνωρίζουμε ότι $[\theta, \chi_N] = [\theta, \psi_N]$. Από την άλλη, σύμφωνα με την σημείωση 3.1.8 έχουμε ότι το $[\theta, \psi_N]$ οφείλει να διαιρεί τον δείκτη $[\mathrm{I}_G(\theta) : N]$. Επομένως τελικά $m \bigm| [\mathrm{I}_G(\theta) : N]$. □

Πρόταση 3.1.18. *Έστω $N \lhd G$ και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ένας ανάγωγος χαρακτήρας τέτοιος ώστε να ισχύει $\gcd\big(\chi(1), [G : N]\big) = 1$. Τότε $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$.*

Απόδειξη. Έστω θ τυχούσα ανάγωγη συνιστώσα του χ_N και ας υποθέσουμε, βάσει του θεωρήματος του Clifford 3.1.7, ότι $\chi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s)$, όπου $\theta := \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G.

Τότε $s = [G : \mathrm{I}_G(\theta)]$ και βάσει του πορίσματος 3.1.17, το $m = [\theta, \chi_N]$ διαιρεί τον δείκτη $[\mathrm{I}_G(\theta : N]$. Επομένως

$$ms = m \cdot [G : \mathrm{I}_G(\theta)] \, \big| \, [G : \mathrm{I}_G(\theta)] \cdot [\mathrm{I}_G(\theta) : N] = [G : N] \; .$$

Επιπροσθέτως $\chi(1) = ms\,\theta(1)$, οπότε το γινόμενο ms διαιρεί και το $\chi(1)$. Εξ υποθέσεως λοιπόν $ms = 1$ και, επειδή $m, s \in \mathbb{N}$, έχουμε κατ' ανάγκην $m = s = 1$ και $\chi_N = \theta \in \mathrm{Irr}(N)$. □

Ορισμός 3.1.19. Ένας ανάγωγος χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ καλείται **primitive** όταν για κάθε γνήσια υποομάδα H της G και κάθε $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ ισχύει ότι $\psi^G \neq \chi$. Επίσης, ένας χαρακτήρας της G ο οποίος είναι πολλαπλάσιο κάποιου $\theta \in \mathrm{Irr}(G)$ καλείται **ομογενής**. Τέλος, ένας ανάγωγος χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε ο περιορισμός χ_N σε κάθε κανονική υποομάδα N της G να είναι ομογενής, καλείται **quasiprimitive**.

Πρόταση 3.1.20. *Οι primitive χαρακτήρες είναι quasiprimitive.*

Απόδειξη. Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ένας primitive χαρακτήρας και ας θεωρήσουμε τυχούσα κανονική υποομάδα $N \lhd G$. Εάν το $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ είναι μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_N τότε, βάσει του θεωρήματος του Clifford 3.1.7 έχουμε ότι $\chi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s)$, όπου $m = [\theta, \chi_N]$, $s = [G : \mathrm{I}_G(\theta)]$ και δίχως βλάβη της γενικότητας $\theta_1 = \theta$. Ωστόσο $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$ οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.16, υπάρχει κάποιο $\psi \in \mathrm{Irr}\big(\mathrm{I}_G(\theta), \theta\big)$ τέτοιο ώστε $\chi = \psi^G$. Επειδή ο χ είναι εξ υποθέσεως primitive, έχουμε κατ' ανάγκην $\mathrm{I}_G(\theta) = G$ και επομένως $s = 1$. Τελικά λοιπόν $\chi_N = m\theta$ και ο χ είναι quasiprimitive. □

Έστω $N \lhd G$ και θ ένας ανάγωγος χαρακτήρας της N. Εν συνεχεία θα μας απασχολήσουν συνθήκες υπό τις οποίες ο χαρακτήρας θ επιδέχεται κάποια (μοναδική) επέκταση στην ομάδα G (δηλ. υπάρχει κάποιο $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιο ώστε $\chi_N = \theta$). Στην μοναδικότητα μιας τέτοιας επέκτασης σημαντικό ρόλο κατέχει η έννοια της τάξης $o(\chi)$ (βλ. ορισμό 1.4.25). Ξεκινούμε με την ειδική περίπτωση της επέκτασης γραμμικών χαρακτήρων.

Λήμμα 3.1.21. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\lambda \in \mathrm{Irr}(N)$ ένας γραμμικός χαρακτήρας με $\mathrm{I}_G(\lambda) = G$. Τότε $\ker(\lambda) \lhd G$.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $g \in G$ και $h \in \ker(\lambda)$. Επειδή $\mathrm{I}_G(\lambda) = G$ ισχύει ότι $\lambda^g = \lambda$, οπότε

$$\lambda(ghg^{-1}) = \lambda^g(h) = \lambda(h) = 1 \; .$$

Επομένως $ghg^{-1} \in \ker(\lambda)$ και πράγματι $\ker(\lambda) \lhd G$. □

Λήμμα 3.1.22. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\lambda \in \mathrm{Irr}(N)$ ένας γραμμικός χαρακτήρας με $\mathrm{I}_G(\lambda) = G$. Εάν υπάρχει υποομάδα $H \subseteq G$ έτσι ώστε $G = NH$ και $N \cap H = \{1\}$, τότε υπάρχει $\mu \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιο ώστε $\mu_N = \lambda$.*

Απόδειξη. Βλ. [Hu], πρόταση 19.12, σελ. 263. □

Πρόταση 3.1.23. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\lambda \in \mathrm{Irr}(N)$ ένας γραμμικός χαρακτήρας με $\mathrm{I}_G(\lambda) = G$. Εάν $\gcd\big([G:N], o(\lambda)\big) = 1$, τότε υπάρχει μοναδικός χαρακτήρας $\widehat{\lambda} \in \mathrm{Irr}(G)$, τέτοιος ώστε $\widehat{\lambda}_N = \lambda$ και να ισχύει $\gcd\big([G:N], o(\widehat{\lambda})\big) = 1$. Στην περίπτωση αυτή μάλιστα, έχουμε $o(\widehat{\lambda}) = o(\lambda)$.*

Απόδειξη. *Ύπαρξη* : Κατ' αρχάς βάσει του λήμματος 3.1.21, $\ker(\lambda) \lhd G$. Επομένως, δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ker(\lambda) = \{1\}$. (Σε αντίθετη περίπτωση μπορεί κανείς να θεωρήσει την ομάδα $G/\ker(\lambda)$, με τάξη $|G/\ker(\lambda)| < |G|$, και να εργασθεί επαγωγικά ως προς την τάξη της G.) Επειδή $\ker(\lambda) = \{1\}$, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.4.26, έχουμε ότι

$$o(\lambda) = [N : \ker(\lambda)] = |N|$$

και κατ' επέκτασιν $\gcd\big([G:N], |N|\big) = 1$. Επομένως, ως γνωστόν, υπάρχει κάποια υποομάδα $H \subseteq G$ τέτοια ώστε $G = NH$ και $N \cap H = \{1\}$. Βάσει λοιπόν του λήμματος 3.1.22(ii), υπάρχει κάποιος χαρακτήρας $\mu \in \mathrm{Irr}(G)$ έτσι ώστε $\mu_N = \lambda$. Επειδή εξ υποθέσεως $\gcd\big([G:N], o(\lambda)\big) = 1$, υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $m, n \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε

$$m \cdot [G:N] = 1 - n \cdot o(\lambda)\ . \tag{3.10}$$

Ορίζουμε τον γραμμικό χαρακτήρα $\widehat{\lambda} := \mu^{m[G:N]} \in \mathrm{Irr}(G)$ (ο μ είναι προφανώς γραμμικός). Θα αποδείξουμε ότι ο χαρακτήρας $\widehat{\lambda}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Κατ' αρχάς αποτελεί επέκταση του λ στην G, διότι

$$\widehat{\lambda}_N = (\mu_N)^{m[G:N]} = \lambda^{m[G:N]} \overset{(3.10)}{=} \lambda \left(\lambda^{o(\lambda)}\right)^{-n} = \lambda\ .$$

Ειδικότερα, βάσει της σημειώσης 1.4.27, ισχύει $o(\lambda) = o(\widehat{\lambda}_N) \,|\, o(\widehat{\lambda})$. Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι $o(\widehat{\lambda}) \,|\, o(\lambda)$. Θεωρούμε τον γραμμικό χαρακτήρα $\psi := \mu^{o(\lambda)}$ της ομάδας G. Παρατηρούμε ότι

$$\psi_N = (\mu_N)^{o(\lambda)} = \lambda^{o(\lambda)} = 1_N\ ,$$

οπότε $\psi \in \mathrm{Irr}(G, 1_N)$. Ταυτίζοντας, όπως υποδεικνύει η σημείωση 3.1.13, το σύνολο $\mathrm{Irr}(G, 1_N)$ με το σύνολο $\mathrm{Irr}(G/N)$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν την παρατήρηση 1.4.26, έχουμε άμεσα ότι $\mathrm{ord}(\psi) \,\big|\, |G/N|$ και ειδικότερα $\psi^{|G/N|} = 1_G$. Τότε όμως

$$\widehat{\lambda}^{o(\lambda)} = \left(\mu^{m[G:N]}\right)^{o(\lambda)} = \left(\psi^{[G:N]}\right)^m = 1_G\ ,$$

οπότε $o(\widehat{\lambda}) \mid o(\lambda)$. Τελικά λοιπόν $o(\widehat{\lambda}) = o(\lambda)$ και $\gcd\big([G:N], o(\widehat{\lambda})\big) = 1$.

Μοναδικότητα : Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος χαρακτήρας $\tau \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε $\tau_N = \lambda = \widehat{\lambda}_N$ και να ισχύει $\gcd\big([G:N], o(\tau)\big) = 1$. Οι χαρακτήρες $\widehat{\lambda}$ και τ είναι προφανώς γραμμικοί, οπότε έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε τον γραμμικό χαρακτήρα $\alpha := \widehat{\lambda}\tau^{-1} \in \mathrm{Irr}(G)$. Τότε όμως

$$\alpha_N = (\widehat{\lambda}_N)(\tau_N)^{-1} = \lambda\,\lambda^{-1} = 1_N \ ,$$

οπότε $\alpha_N \in \mathrm{Irr}(G, 1_N)$. Όπως και προηγουμένως, τούτο σημαίνει ότι η τάξη $\mathrm{ord}(\alpha)$ διαιρεί το δείκτη $[G:N]$. Από την άλλη, σύμφωνα με τα προηγούμενα και τη σημείωση 1.4.27, ισχύει

$$o(\widehat{\lambda}) = o(\lambda) = o(\tau_N) \mid o(\tau) \ ,$$

οπότε $\widehat{\lambda}^{o(\tau)} = 1_G$. Επομένως

$$\alpha^{o(\tau)} = (\widehat{\lambda})^{o(\tau)}(\tau^{-1})^{o(\tau)} = 1_G$$

και $\mathrm{ord}(\alpha) \mid o(\tau)$. Ωστόσο $\gcd\big([G:N], o(\tau)\big) = 1$, οπότε $\mathrm{ord}(\alpha) = 1$ και κατ' ανάγκην $\alpha = 1_G$. Τελικά λοιπόν πράγματι $\tau = \widehat{\lambda}$. □

Η απόδειξη του ακολούθου απαιτεί την χρήση "προβολικών αναπαραστάσεων" και μπορεί να βρεθεί στο κεφάλαιο 22 του [Hu].

Πρόταση 3.1.24. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ με $\mathrm{I}_G(\theta) = G$. Εάν $\gcd\big([G:N], \theta(1)\big) = 1$ και ο γραμμικός χαρακτήρας $\det\theta$ επεκτείνεται στην G, τότε υπάρχει κάποιο $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιο ώστε $\chi_N = \theta$.*

Απόδειξη. Βλ. [Hu], θεώρημα 22.3(c), σελ. 295. □

Πρόταση 3.1.25. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ με $\mathrm{I}_G(\theta) = G$. Εάν $\gcd\big([G:N], \theta(1)\big) = 1$ και ο γραμμικός χαρακτήρας $\det\theta$ επεκτείνεται στην G σε κάποιο $\widehat{\lambda} \in \mathrm{Irr}(G)$, τότε υπάρχει μοναδικός $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε $\chi_N = \theta$ και να ισχύει $\det\chi = \widehat{\lambda}$.*

Απόδειξη. *Ύπαρξη* : Θεωρούμε τον γραμμικό χαρακτήρα $\lambda := \det\theta$. Επειδή εξ υποθέσεως αυτός επεκτείνεται στην G και ισχύει $\gcd\big([G:N], \theta(1)\big) = 1$, η πρόταση 3.1.24 μας πληροφορεί ότι υπάρχει κάποιος χαρακτήρας $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε $\psi_N = \theta$. Θέτουμε $\mu := \det\psi$ και θεωρούμε την επέκταση $\widehat{\lambda}$ του λ στην G. Οι χαρακτήρες $\widehat{\lambda}$ και μ είναι προφανώς γραμμικοί, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τον γραμμικό χαρακτήρα $\alpha := \widehat{\lambda}\,\mu^{-1} \in \mathrm{Irr}(G)$. Επειδή $\widehat{\lambda}_N = \lambda$ υπολογίζουμε ότι

$$\alpha_N = \widehat{\lambda}_N\,(\mu_N)^{-1} = \lambda\,(\det\psi_N)^{-1} = \det\theta\,(\det\theta)^{-1} = 1_N \ ,$$

οπότε $\alpha \in \mathrm{Irr}(G, 1_N)$. Ταυτίζοντας, όπως υποδεικνύει η σημείωση 3.1.13, το σύνολο $\mathrm{Irr}(G, 1_N)$ με το σύνολο $\mathrm{Irr}(G/N)$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν την παρατήρηση 1.4.26, έχουμε άμεσα ότι $\mathrm{ord}(\alpha) \,\big|\, |G/N|$ και ειδικότερα $\alpha^{|G/N|} = 1_G$. Ωστόσο $\gcd\big([G : N], \theta(1)\big) = 1$, οπότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $m, n \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε

$$n\theta(1) = 1 - m \cdot |G/N| \,. \tag{3.11}$$

Ορίζουμε τον χαρακτήρα $\chi := \psi\, \alpha^n$ της G, ο οποίος (ως γινόμενο ενός αναγώγου με έναν γραμμικό) είναι ανάγωγος (βλ. [JL], πρόταση 17.14, σελ. 176). Τότε

$$\chi_N = \psi_N(\alpha_N)^n = \theta\, 1_N = \theta$$

και, επειδή $\psi(1) = \theta(1)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det \chi \quad &= \quad \det(\psi\alpha^n) = \alpha^{n\psi(1)} \det \psi = \alpha^{n\theta(1)} \det \psi \\ &\overset{(3.11)}{=} \quad \alpha \left(\alpha^{|G/N|}\right)^{-m} \mu = \alpha\, 1_G\, \mu = \alpha\, \mu = \widehat{\lambda} \,. \end{aligned}$$

Μοναδικότητα : Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος χαρακτήρας $\eta \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε $\eta_N = \theta = \chi_N$ και να ισχύει $\det \eta = \widehat{\lambda} = \det \chi$. Επειδή $\eta \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$, σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.14, έχουμε ότι $\eta = \beta\chi$, για κάποιο $\beta \in \mathrm{Irr}(G/N)$ $\big($όπου και πάλι έχουμε ταυτίσει καταχρηστικά τα σύνολα $\mathrm{Irr}(G/N)$ και $\mathrm{Irr}(G, 1_N)\big)$. Ωστόσο

$$\theta(1) = \eta(1) = \beta(1)\chi(1) = \beta(1)\theta(1) \,,$$

οπότε κατ' ανάγκην $\beta(1) = 1$ και ο χαρακτήρας β οφείλει να είναι γραμμικός. Επιπροσθέτως, επειδή $\chi(1) = \theta(1)$, έχουμε ότι

$$\widehat{\lambda} = \det \eta = \det(\beta\chi) = \beta^{\chi(1)} \det \chi = \beta^{\theta(1)} \widehat{\lambda} \,,$$

οπότε $\beta^{\theta(1)} = 1_G$ και ειδικότερα $\mathrm{ord}(\beta) | \theta(1)$. Από την άλλη, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.4.26, ισχύει ότι $\mathrm{ord}(\beta) \,\big|\, |G/N|$, επομένως η τάξη $\mathrm{ord}(\beta)$ διαιρεί το $\gcd\big([G : N], \theta(1)\big) = 1$. Τελικά λοιπόν $\beta = 1_G$ και $\eta = \chi$. $\square$

Θεώρημα 3.1.26. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ με $\mathrm{I}_G(\theta) = G$. Εάν $\gcd\big([G : N], \theta(1)o(\theta)\big) = 1$, τότε υπάρχει μοναδικός ανάγωγος χαρακτήρας χ της G, τέτοιος ώστε $\chi_N = \theta$ και να ισχύει $\gcd\big([G : N], o(\chi)\big) = 1$. Στην περίπτωση αυτή μάλιστα, έχουμε $o(\chi) = o(\theta)$.*

Απόδειξη. Ύπαρξη : Θεωρούμε τον γραμμικό χαρακτήρα $\lambda := \det \theta$. Επειδή εξ υποθέσεως $\mathrm{I}_G(\theta) = G$, προφανώς ισχύει ότι $\mathrm{I}_G(\lambda) = G$. Επιπροσθέτως, από τη σχέση $\gcd\big([G : N], \theta(1)o(\theta)\big) = 1$ έχουμε άμεσα

$$\gcd\big([G : N], o(\theta)\big) = 1 \quad \text{και} \quad \gcd\big([G : N], \theta(1)\big) = 1 \,.$$

Το πρώτο σε συνδυασμό με την πρόταση 3.1.23 μας πληροφορεί ότι υπάρχει μοναδικός $\widehat{\lambda} \in \mathrm{Irr}(G)$, τέτοιος ώστε $\widehat{\lambda}_N = \lambda$ και να ισχύει $\gcd\big([G:N], o(\widehat{\lambda})\big) = 1$. Μάλιστα έχουμε $o(\widehat{\lambda}) = o(\lambda)$. Το δεύτερο σε συνδυασμό με τα προηγούμενα μας δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.1.25, σύμφωνα με την οποία υπάρχει μοναδικός χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, τέτοιος ώστε $\chi_N = \theta$ και $\det\chi = \widehat{\lambda}$. Επομένως

$$o(\chi) = \mathrm{ord}(\det\chi) = o(\widehat{\lambda}) = o(\lambda) = \mathrm{ord}(\det\theta) = o(\theta)$$

και $\gcd\big([G:N], o(\chi)\big) = \gcd\big([G:N], o(\theta)\big) = 1$.
Μοναδικότητα : Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ τέτοιος ώστε $\psi_N = \theta$ και $\gcd\big([G:N], o(\psi)\big) = 1$. Τότε όμως

$$(\det\psi)_N = \det\psi_N = \det\theta = \lambda\ ,$$

οπότε από την μοναδικότητα του $\widehat{\lambda}$ έχουμε κατ' ανάγκην $\det\psi = \widehat{\lambda}$. Επειδή επιπροσθέτως $\psi_N = \theta$ από τη μοναδικότητα του χαρακτήρα χ ισχύει $\psi = \chi$. □

Ορισμός 3.1.27. Ο μοναδικός χαρακτήρας χ του θεωρήματος 3.1.26 καλείται **κανονική επέκταση** του θ στην G.

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με την έννοια του monomial χαρακτήρα.

Ορισμός 3.1.28. Ένας χαρακτήρας χ της G καλείται **monomial** όταν $\chi = \lambda^G$, για κάποιο γραμμικό χαρακτήρα λ κάποιας υποομάδας της G. Επίσης, μια ομάδα G καλείται monomial όταν κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ είναι monomial χαρακτήρας.

Παρατήρηση 3.1.29. Από τους ορισμούς 3.1.19 και 3.1.28 είναι προφανές ότι ένας monomial χαρακτήρας της G, ο οποίος είναι ταυτοχρόνως και primitive, δεν μπορεί παρά να είναι γραμμικός.

Ορισμός 3.1.30. Μια ομάδα G τάξεως $|G| = p^n$, για κάποιο πρώτο αριθμό p και $n \in \mathbb{N}$ καλείται **p - ομάδα**.

Σημείωση 3.1.31. Πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι το κέντρο $\mathbf{Z}(G)$ (βλ. ορισμό 1.3.25) μιας μη τετριμμένης p - ομάδας G είναι μη τετριμμένο. Εάν λοιπόν η G είναι μη αβελιανή p - ομάδα, τότε $G \neq \mathbf{Z}(G)$ και άρα, βάσει των προηγουμένων,

$$H := \mathbf{Z}\big(G/\mathbf{Z}(G)\big) \neq \{1\}\ .$$

Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : G \to G/\mathbf{Z}(G)$ και ορίζουμε την κανονική υποομάδα $\mathbf{Z}_2(G) := \pi^{-1}(H)$ της G. Εξ ορισμού

$$\mathbf{Z}_2(G)/\mathbf{Z}(G) = \mathbf{Z}\big(G/\mathbf{Z}(G)\big)$$

και προφανώς ισχύει ότι $\mathbf{Z}(G) \subsetneqq \mathbf{Z}_2(G)$.

Λήμμα 3.1.32. *Έστω G μια μη αβελιανή p - ομάδα. Τότε υπάρχει αβελιανή κανονική υποομάδα $N \lhd G$ τέτοια ώστε $N \nsubseteq \mathbf{Z}(G)$.*

Απόδειξη. Επειδή η G είναι εξ υποθέσως μη αβελιανή p - ομάδα, σύμφωνα με τη σημείωση 3.1.31 ισχύει ότι $\mathbf{Z}(G) \subsetneqq \mathbf{Z}_2(G)$. Θεωρούμε στοιχείο $x \in \mathbf{Z}_2(G) \setminus \mathbf{Z}(G)$ και ορίζουμε $N := \big\langle \mathbf{Z}(G), x \big\rangle$. Προφανώς η N αποτελεί μια αβελιανή κανονική γνήσια υποομάδα της G, για την οποία εκ κατασκευής ισχύει $N \nsubseteq \mathbf{Z}(G)$. □

Πρόταση 3.1.33. *Κάθε p - ομάδα είναι monomial.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Εργαζόμαστε επαγωγικά ως προς την τάξη της G. Στην περίπτωση όπου η ομάδα G είναι αβελιανή κάθε ανάγωγος χαρακτήρας της είναι γραμμικός (πρβλ. πόρισμα 1.3.13 καθώς και παρατήρηση 1.3.18) οπότε το ζητούμενο προφανώς ισχύει (το ίδιο και εάν έχουμε ότι $\chi(1) = 1$). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η G είναι μη αβελιανή και ότι $\chi(1) > 1$. Θεωρούμε τον πυρήνα $\ker(\chi)$ του χαρακτήρα χ (βλ. ορισμό 1.3.19) καθώς και το πηλίκο $G/\ker(\chi)$, το οποίο αποτελεί και αυτό προφανώς μια p - ομάδα. Εάν $|\ker(\chi)| > 1$ τότε έχουμε $|G/\ker(\chi)| < |G|$, οπότε από την επαγωγική υπόθεση η $G/\ker(\chi)$ είναι monomial. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι το τελευταίο, σε συνδυασμό με την κατασκευή της ανύψωσης 1.5.5, μας εξασφαλίζει ότι ο χαρακτήρας χ είναι monomial. Μπορούμε επομένως για το υπόλοιπο της απόδειξης, να υποθέσουμε ότι ο χ είναι πιστός (βλ. 1.3.19). Βάσει του λήμματος 3.1.32 έχουμε τη δυνατότητα να θεωρήσουμε μια αβελιανή κανονική υποομάδα N της G, τέτοια ώστε $N \nsubseteq \mathbf{Z}(G)$. Έστω $\lambda \in \mathrm{Irr}(N)$ μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_N και ας υποθέσουμε, σύμφωνα με το θεώρημα του Clifford 3.1.7, ότι

$$\chi_N = m(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) \ ,$$

όπου $\lambda_1 := \lambda$, $m = [\lambda, \chi_N]$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του λ εντός της G. Σημειωτέον ότι, επειδή η υποομάδα N είναι αβελιανή, οι χαρακτήρες $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ είναι όλοι γραμμικοί. Επιπροσθέτως, επειδή ο χαρακτήρας χ είναι πιστός, άμεσα διαπιστώνουμε ότι και ο χαρακτήρας λ είναι επίσης πιστός.

Ισχυρισμός : Έχουμε ότι $I := \mathrm{I}_G(\lambda) \subsetneqq G$.
Πράγματι· κατ' αρχάς ο χαρακτήρας λ είναι γραμμικός και πιστός, οπότε στην ουσία αποτελεί έναν μονομορφισμό. Ας υποθέσουμε ότι ίσχυε $\mathrm{I}_G(\lambda) = G$. Τότε, για κάθε $g \in G$ και για κάθε $h \in N$ θα είχαμε

$$\lambda^g(h) = \lambda(h) \Rightarrow \lambda(ghg^{-1}) = \lambda(h) \Rightarrow \lambda(ghg^{-1}h^{-1}) = 1 \Rightarrow gh = hg \ ,$$

οπότε $N \subseteq \mathbf{Z}(G)$, πράγμα άτοπο. ♢

Επειδή $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\lambda)$, η αντιστοιχία Clifford 3.1.16 μας πληροφορεί ότι υπάρχει κάποιο $\psi \in \mathrm{Irr}(I,\lambda)$ τέτοιο ώστε $\chi = \psi^G$. Ωστόσο $I \subsetneqq G$, οπότε σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, η υποομάδα I είναι monomial και άρα $\psi = \beta^I$, για κάποιο γραμμικό χαρακτήρα $\beta \in \mathrm{Irr}(H)$ και H μια υποομάδα της I (άρα και της ομάδας G). Τότε όμως

$$\chi = \psi^G = \left(\beta^I\right)^G = \beta^G$$

(βλ. λήμμα 1.4.21) και ο χαρακτήρας χ είναι monomial. □

3.2 π - special χαρακτήρες και υποομάδες

Στο παρόν κεφάλαιο με $\mathbb{P}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών και το π θα είναι ένα υποσύνολο αυτών. Τέλος, με π' θα συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του συνόλου π εντός των πρώτων αριθμών, $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$.

Ορισμός 3.2.1. Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **π - αριθμός** όταν είναι γινόμενο μη αρνητικών δυνάμεων πρώτων από το σύνολο π. Προφανώς, κάθε διαιρέτης ενός π - αριθμού είναι π - αριθμός. Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η έννοια του π' - αριθμού.

Ορισμός 3.2.2. Μια ομάδα G καλείται **π - ομάδα**, όταν η τάξη $|G|$ είναι ένας π - αριθμός. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η έννοια της π' - ομάδας.

Ορισμός 3.2.3. Καλούμε **κανονική σειρά** μιας ομάδας G μια αλυσίδα υποομάδων, της μορφής :

$$\{1\} = N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_{k-1} \lhd N_k = G\,.$$

Οι ομάδες πηλίκα N_i/N_{i-1}, $i = 1, \ldots, k$ ονομάζονται **παράγοντες** της σειράς.

Ορισμός 3.2.4. Μια υποομάδα N της G καλείται **υποκανονική** (και συμβολίζεται $N \lhd\lhd G$), όταν υπάρχουν υποομάδες $N_1, \ldots, N_k$ τέτοιες ώστε

$$N = N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_{k-1} \lhd N_k = G\,.$$

Ορισμός 3.2.5. Μια ομάδα G καλείται

(i) **επιλύσιμη** $\Leftrightarrow$ διαθέτει μια κανονική σειρά, όλοι οι παράγοντες της οποίας είναι αβελιανές ομάδες.

(ii) **π - επιλύσιμη** $\Leftrightarrow$ διαθέτει μια κανονική σειρά, όλοι οι παράγοντες της οποίας είναι είτε επιλύσιμες π - ομάδες είτε π' - ομάδες.

(iii) **π - διαχωρίσιμη** $\Leftrightarrow$ διαθέτει μια κανονική σειρά, όλοι οι παράγοντες της οποίας είναι είτε π - ομάδες είτε π' - ομάδες.

Σημειωτέον ότι μια επιλύσιμη ομάδα είναι π - επιλύσιμη, για κάθε σύνολο πρώτων π, ενώ μια π - επιλύσιμη ομάδα οφείλει προφανώς να είναι π - διαχωρίσιμη.

Ορισμός 3.2.6. Ένας ανάγωγος χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ καλείται π - **special,** όταν πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις :

(i) Το $\chi(1)$ είναι ένας π - αριθμός, και

(ii) Εάν $N \lhd \lhd G$ και το θ είναι μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_N, τότε το $o(\theta)$ είναι ένας π - αριθμός (βλ. ορισμό 1.4.25).

Συμβολίζουμε το σύνολο των π - special χαρακτήρων της G με $\mathfrak{X}_\pi(G)$. Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η έννοια του π' - special χαρακτήρα. Το σύνολο των τελευταίων θα συμβολίζεται με $\mathfrak{X}_{\pi'}(G)$.

Σημείωση 3.2.7. Άμεσα διαπιστώνει κανείς από τον ορισμό ότι ο τετριμμένος χαρακτήρας 1_G είναι π - special (διότι το 1 είναι ένας π - αριθμός). Επιπροσθέτως, εάν $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, τότε (επιλέγοντας $N = G$ στον ορισμό 3.2.6) έχουμε ότι η τάξη $o(\chi)$ είναι ένας π - αριθμός. Επίσης είναι προφανές ότι όλοι οι συζυγείς χαρακτήρες ενός π - special χαρακτήρα είναι επίσης π - special.

Πρόταση 3.2.8. *Έστω $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, $N \lhd \lhd G$ τυχούσα υποκανονική υποομάδα και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_N. Τότε $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N)$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, το $\chi(1)$ είναι εξ ορισμού ένας π - αριθμός και, βάσει του πορίσματος 3.1.9, το $\theta(1)$ διαιρεί το $\chi(1)$. Επομένως το $\theta(1)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. Ας θεωρήσουμε εν συνεχεία τυχούσα υποομάδα $N_1 \lhd \lhd N$ καθώς και μια ανάγωγη συνιστώσα $\phi \in \mathrm{Irr}(N_1)$ του χαρακτήρα θ_{N_1}. Άμεσα διαπιστώνουμε ότι το ϕ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_{N_1} επί της υποκανονικής υποομάδας $N_1 \lhd \lhd G$. Επειδή εξ υποθέσεως $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, ο ορισμός 3.2.6 μας εξασφαλίζει ότι πράγματι το $o(\phi)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. $\square$

Πρόταση 3.2.9. *Εάν η G είναι π - ομάδα, τότε $\mathfrak{X}_\pi(G) = \mathrm{Irr}(G)$. Επιπροσθέτως, εάν η G είναι π' - ομάδα, τότε $\mathfrak{X}_\pi(G) = \{1_G\}$.*

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η G είναι π - ομάδα και ας θεωρήσουμε τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Βάσει της προτάσεως 1.4.11, το $\chi(1)$ διαιρεί τον π - αριθμό $|G|$, οπότε είναι π - αριθμός. Έστω ακόμα τυχούσα $N \lhd \lhd G$ και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_N. Σύμφωνα με την παρατήρηση 1.4.26, το $o(\theta)$ διαιρεί την τάξη της N και κατ' επέκτασιν διαιρεί την τάξη της G. Επομένως, το $o(\theta)$ είναι επίσης ένας π - αριθμός και τελικά $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$.
(ii) Ας υποθέσουμε ότι η G είναι π' - ομάδα. Βάσει της σημείωσης 3.2.7 ισχύει παντοτε ο εγκλεισμός $\{1_G\} \subseteq \mathfrak{X}_\pi(G)$. Έστω λοιπόν τυχόν $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$. Σύμφωνα

με την πρόταση 1.4.11, ο π - αριθμός $\chi(1)$ διαιρεί τον π' - αριθμό $|G|$, οπότε κατ' ανάγκην $\chi(1) = 1$ και ο χ είναι γραμμικός χαρακτήρας. Επιπροσθέτως, βάσει της σημείωσης 3.2.7, η τάξη $o(\chi)$ είναι ένας π - αριθμός, ο οποίος οφείλει να διαιρεί τον π' - αριθμό $|G|$. Κατ' ανάγκην λοιπόν $o(\chi) = 1 = \chi(1)$ και τελικά $\chi = 1_G$. □

Πρόταση 3.2.10. *Ένας ανάγωγος χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ είναι π - special εάν και μόνον εάν τα $\chi(1)$ και $o(\chi)$ αποτελούν π - αριθμούς και επιπροσθέτως, για κάθε μεγιστοτική κανονική υποομάδα M της G και κάθε ανάγωγη συνιστώσα θ του χαρακτήρα χ_M, ισχύει ότι $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(M)$.*

Απόδειξη. Το ευθύ είναι άμεσο, βάσει του ορισμού 3.2.6, της σημείωσης 3.2.7 καθώς και της πρότασης 3.2.8. Για το αντίστροφο τώρα, θεωρούμε τυχούσα υποκανονική υποομάδα $N \lhd \lhd G$ καθώς και ανάγωγη συνιστώσα ϕ του χ_N. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η τάξη $o(\phi)$ είναι ένας π - αριθμός. Εάν ισχύει $N = G$, τότε $o(\phi) = o(\chi)$ και το ζητούμενο ισχύει. Έστω λοιπόν ότι $N \subsetneqq G$ και ας θεωρήσουμε μια κανονική σειρά

$$N \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_{k-1} \lhd G\ .$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η N_{k-1} αποτελεί μεγιστοτική κανονική υποομάδα της G. Έστω ότι ο χαρακτήρας ϕ αποτελεί ανάγωγη συνιστώσα του θ_N, όπου θ είναι μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού $\chi_{N_{k-1}}$. Εξ υποθέσεως $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N_{k-1})$ και, επειδή $N \lhd \lhd N_{k-1}$, ο ορισμός 3.2.6 μας πληροφορεί ότι πράγματι η τάξη $o(\phi)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. □

Λήμμα 3.2.11. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα τέτοια ώστε το πηλίκο G/N να είναι π - ομάδα, $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$. Τότε τόσο το $\chi(1)$ όσο και η τάξη $o(\chi)$ είναι π - αριθμοί.*

Απόδειξη. Επειδή το θ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_N, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\theta := \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G και άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Clifford 3.1.7, ότι $\chi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s)$, όπου $m := [\chi_N, \theta]$. Τότε $\chi(1) = m\, s\, \theta(1)$ και, βάσει του ίδιου θεωρήματος και της σημείωσης 3.1.8, τόσο το s όσο και το m διαιρούν τον π - αριθμό $[G : N]$. Επιπροσθέτως, επειδή ο χαρακτήρας θ είναι π - special, το $\theta(1)$ είναι επίσης π - αριθμός. Συνολικά λοιπόν το γινόμενο $\chi(1) = ms\theta(1)$ αποτελεί πράγματι έναν π - αριθμό. Θέτουμε $\lambda := \det \chi$ και παρατηρούμε ότι προφανώς

$$\lambda_N = \det \chi_N = (\det \theta_1 \cdot \det \theta_2 \cdots \det \theta_s)^m\ .$$

Επειδή τα $\theta_1, \ldots, \theta_s$ είναι συζυγή, έχουμε ότι $o(\theta_1) = o(\theta_2) = \cdots = o(\theta_s)$, όπου το $n := o(\theta_1)$ αποτελεί έναν π - αριθμό (εξ υποθέσεως το θ είναι π - special). Επομένως $(\lambda_N)^n = 1_N$ και άρα το $o(\chi_N) := \mathrm{ord}(\lambda_N)$, ως διαιρέτης του π -

αριθμού n, είναι ένας π - αριθμός. Από την άλλη, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.4.26, ισχύει ότι

$$o(\chi_N) = \Big[N : \ker\big((\det\chi)_N\big)\Big] = [N : \ker(\det\chi)]\ ,$$

οπότε τελικά το

$$o(\chi) = [G : \ker(\det\chi)] = [G : N]\cdot[N : \ker(\det\chi)]$$

είναι πράγματι ένας π - αριθμός. □

Πρόταση 3.2.12. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα τέτοια ώστε το πηλίκο G/N να είναι π - ομάδα και έστω $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N)$. Τότε κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\theta)$ είναι π - special χαρακτήρας της G.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\theta)$ και εργαζόμαστε επαγωγικά ως προς την τάξη της G. Βάσει της πρότασης 3.2.10 και του λήμματος 3.2.11 αρκεί να αποδείξουμε ότι εάν η M είναι μια μεγιστοτική κανονική υποομάδα της G και το ϕ μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_M, τότε το ϕ είναι π - special. Επειδή η M είναι μεγιστοτική, είτε $N \lhd M$ είτε $G = MN$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $N \lhd M$. Τότε προφανώς $\phi \in \mathrm{Irr}(M,\theta)$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση για την π - ομάδα M/N, η οποία μας εξασφαλίζει ότι πράγματι ο χαρακτήρας ϕ είναι π - special. Στην δεύτερη περίπτωση, όπου $G = MN$, μπορούμε να εργασθούμε με την τομή $N \cap M \lhd M$. Παρατηρούμε ότι

$$M/(N\cap M) \cong MN/N = G/N\ ,$$

οπότε η $M/(N\cap M)$ είναι μια π - ομάδα. Επομένως, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, αρκεί να βρούμε κάποιο $\tau \in \mathfrak{X}_\pi(N\cap M)$, τέτοιο ώστε $\phi \in \mathrm{Irr}(M,\tau)$. Εξ υποθέσεως το ϕ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του χ_M, οπότε υπάρχει κάποια ανάγωγη συνιστώσα τ του περιορισμού $\chi_{N\cap M} = (\chi_M)_{N\cap M}$, τέτοια ώστε $\phi \in \mathrm{Irr}(M,\tau)$. Ωστόσο, βάσει του θεωρήματος του Clifford 3.1.7, έχουμε ότι $\chi_N = m\cdot(\theta_1 + \cdots + \theta_s)$, όπου $m = [\theta,\chi_N]$ και τα $\theta := \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G. Επομένως

$$\chi_{N\cap M} = (\chi_N)_{N\cap M} = \Big(m\cdot(\theta_1 + \cdots + \theta_s)\Big)_{N\cap M}\ . \tag{3.12}$$

Επειδή το $\theta := \theta_1$ είναι εξ υποθέσεως π - special, όλα τα συζυγή $\theta_2, \ldots, \theta_s$ είναι ομοίως π - special (πρβλ. σημείωση 3.2.7). Επομένως η σχέση (3.12) σε συνδυασμό με την πρόταση 3.2.8 μας πληροφορεί ότι όλες οι ανάγωγες συνιστώσες του χαρακτήρα $\chi_{N\cap M}$ είναι π - special. Ειδικότερα $\tau \in \mathfrak{X}_\pi(N\cap M)$ και, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, το $\phi \in \mathrm{Irr}(M,\tau)$ είναι τελικά π - special χαρακτήρας. □

Πρόταση 3.2.13. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα τέτοια ώστε το πηλίκο G/N να είναι π' - ομάδα και έστω $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ τέτοιος ώστε $\mathrm{I}_G(\theta) = G$. Τότε υπάρχει μοναδικός π - special χαρακτήρας $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\theta)$.*

Απόδειξη. Μοναδικότητα : Έστω τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\theta) \cap \mathfrak{X}_\pi(G)$. Τότε, βάσει του θεωρήματος του Clifford 3.1.7, έχουμε $\chi_N = m \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_s)$, όπου $m = [\theta, \chi_N]$ και τα $\theta := \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του θ εντός της G. Εξ υποθέσεως $\mathrm{I}_G(\theta) = G$ οπότε, σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα, έχουμε $s = [G : \mathrm{I}_G(\theta)] = 1$. Επομένως $\chi_N = m\theta$ και ειδικότερα $\chi(1) = m\theta(1)$. Ωστόσο $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, οπότε το m διαιρεί τον π - αριθμό $\chi(1)$. Από την άλλη, βάσει της σημείωσης 3.1.8, το m οφείλει ταυτοχρόνως να διαιρεί και τον π' - αριθμό $[G : N]$. Συνεπώς $m = 1$ και $\chi_N = \theta$. Επιπροσθέτως, επειδή τόσο το χ όσο και το θ είναι π - special, άμεσα διαπιστώνουμε ότι

$$\gcd\big([G : N], o(\theta)\theta(1)\big) = \gcd\big([G : N], o(\chi)\big) = 1 \,.$$

Επομένως η μοναδικότητα του χ εξασφαλίζεται από την πρόταση 3.1.26.
Ύπαρξη : Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\theta)$ η μοναδική επέκταση του θ για την οποία ισχύει $\gcd\big([G : N], o(\chi)\big) = 1$, την ύπαρξη της οποίας μας εξασφαλίζει η πρόταση 3.1.26. Απομένει να δείξουμε ότι $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, για το οποίο και εργαζόμαστε επαγωγικά ως προς την τάξη της G. Κατ' αρχάς, βάσει της πρότασης 3.1.26, έχουμε $o(\chi) = o(\theta)$, οπότε το $o(\chi)$ είναι εξ υποθέσεως π - αριθμός. Επειδή επιπροσθέτως $\chi_N = \theta$, το $\chi(1) = \theta(1)$ είναι επίσης π - αριθμός. Σύμφωνα λοιπόν με την πρόταση 3.2.10 αρκεί να αποδείξουμε ότι, εάν η M είναι μια μεγιστοτική κανονική υποομάδα της G και το ϕ μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_M, τότε το ϕ είναι π - special. Επειδή η M είναι μεγιστοτική, είτε $N \lhd M$ είτε $G = MN$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $N \lhd M$. Τότε ο δείκτης $[G : M]$ είναι ένας π' - αριθμός και, όπως ήδη έχουμε δεί, το $\chi(1)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.18, $\chi_M \in \mathrm{Irr}(M)$ και κατ' επέκτασιν $\phi = \chi_M$. Συνεπώς $o(\phi) \,|\, o(\chi)$ (βλ. σημείωση 1.4.27), οπότε η τάξη $o(\phi)$ είναι π - αριθμός. Από την άλλη έχουμε προφανώς $\phi \in \mathrm{Irr}(M,\theta)$ και άρα το ϕ αποτελεί την μοναδική επέκταση του θ (στην ομάδα M) για την οποία ισχύει $\gcd\big([M : N], o(\phi)\big) = 1$ (ο δείκτης $[M : N]$ είναι προφανώς και αυτός ένας π' - αριθμός). Από την επαγωγική υπόθεση λοιπόν έπεται πράγματι ότι $\phi \in \mathfrak{X}_\pi(M)$. Ας υποθέσουμε εν συνεχεία ότι ισχύει $G = NM$. Τότε

$$M/(N \cap M) \cong NM/N = G/N \,,$$

οπότε η $M/(N \cap M)$ είναι μια π' - ομάδα. Επειδή το ϕ αποτελεί εξ υποθέσεως μια ανάγωγη συνιστώσα του χ_M, σύμφωνα με το πόρισμα 3.1.9 ισχύει $\phi(1) \,|\, \chi(1)$, οπότε το $\phi(1)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. Ειδικότερα, βάσει της προτάσεως 3.1.18, ο περιορισμός $\phi_{N\cap M}$ οφείλει να είναι ανάγωγος. Με άλλα λόγια το $\phi_{N\cap M}$ αποτελεί

μια ανάγωγη συνιστώσα του $\chi_{N\cap M}$ και, επειδή $\theta = \chi_N$ και $\chi_{N\cap M} = \theta_{N\cap M}$, τελικά το $\phi_{N\cap M}$ είναι μια ανάγωγη συνιστώσα του $\theta_{N\cap M}$. Ωστόσο εξ υποθέσεως ο χαρακτήρας θ είναι π - special, οπότε η πρόταση 3.2.8 μας πληροφορεί ότι $\phi_{N\cap M} \in \mathfrak{X}_\pi(N\cap M)$. Επομένως εάν αποδείξουμε ότι η τάξη $o(\phi)$ είναι π - αριθμός, τότε, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, ο χαρακτήρας $\phi \in \mathrm{Irr}(M, \phi_{N\cap M})$ θα είναι π - special και η απόδειξη ολοκληρώνεται.
Επειδή $\phi_{N\cap M} \in \mathfrak{X}_\pi(N\cap M)$, τόσο το $\phi_{N\cap M}(1)$ όσο και η τάξη $o(\phi_{N\cap M})$ είναι π - αριθμοί. Επομένως

$$\gcd\Big([M : N\cap M], \phi_{N\cap M}(1)\, o(\phi_{N\cap M})\Big) = 1\ ,$$

οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε την κανονική επέκταση $\widehat{\phi} \in \mathrm{Irr}(M, \phi_{N\cap M})$ του $\phi_{N\cap M}$ στην M (βλ. ορισμό 3.1.27). Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.26 ισχύει $o(\widehat{\phi}) = o(\phi_{N\cap M})$ και άρα η τάξη $o(\widehat{\phi})$ είναι ένας π - αριθμός.

Ισχυρισμός : Έχουμε ότι $\phi = \beta\widehat{\phi}$, για κάποιο γραμμικό χαρακτήρα β της ομάδας $M/(N\cap M)$.
Πράγματι· επειδή το ϕ αποτελεί προφανώς μια ανάγωγη συνιστώσα του $(\phi_{N\cap M})^M$, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gallagher 3.1.14 (για τα $M, N\cap M, \widehat{\phi}$ και $\phi_{N\cap M}$ στην θέση των G, N, χ και θ, αντιστοίχως) λαμβάνουμε ότι $\phi = \beta\widehat{\phi}$, για κάποιον χαρακτήρα $\beta \in \mathrm{Irr}(M/N\cap M)$. Ωστόσο τότε $\phi(1) = \beta(1)\widehat{\phi}(1)$ και $\beta(1) \mid \phi(1)$, οπότε το $\beta(1)$ οφείλει να είναι π - αριθμός. Από την άλλη, συμφωνα με την πρόταση 1.4.11, έχουμε ότι το $\beta(1)$ διαιρεί το $|M/N\cap M|$ και άρα το $\beta(1)$ είναι ταυτοχρόνως και π' - αριθμός. Κατ' ανάγκην $\beta(1) = 1$ και ο χαρακτήρας β είναι γραμμικός. $\diamondsuit$

Βάσει του θεωρήματος του Clifford 3.1.7, $\chi_M = m(\phi_1 + \cdots + \phi_s)$, όπου $\phi_1 := \phi$, $m = [\phi, \chi_M]$ και τα $\phi_1, \ldots, \phi_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του ϕ εντός της G. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, επειδή $G = NM$, αρκεί να υποθέσουμε ότι τα $\phi_1, \ldots, \phi_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του ϕ εντός της N.

Ισχυρισμός : Για κάθε $g \in N$ ισχύει $\beta^g = \beta$.
Πράγματι· ταυτίζοντας το σύνολο $\mathrm{Irr}\big(M/(N\cap M)\big)$ με το σύνολο $\mathrm{Irr}(M, 1_{N\cap M})$, έχουμε προφανώς ότι $\beta(x) = 1$, για κάθε $x \in N\cap M$. Έστω $g \in N$ και $m \in M$. Επειδή τόσο η M όσο και η N αποτελούν κανονικές υποομάδες της G ισχύει ότι $gmg^{-1}m^{-1} \in N\cap M$. Επιπροσθέτως, ο χαρακτήρας β είναι γραμμικός, οπότε αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων (πρβλ. ορισμό 1.4.23). Επομένως

$$\beta^g(m) = \beta(gmg^{-1}) = \beta(gmg^{-1}m^{-1})\beta(m) = 1\cdot\beta(m)$$

και ισχύει το ζητούμενο. $\diamondsuit$

Επειδή $\phi = \beta\widehat{\phi}$, βάσει του προηγούμενου ισχυρισμού έχουμε ότι

$$\chi_M = m\beta(\widehat{\phi}_1 + \cdots + \widehat{\phi}_s) \tag{3.13}$$

όπου $\widehat{\phi}_1 := \widehat{\phi}$ και τα $\widehat{\phi}_1, \ldots, \widehat{\phi}_s$ είναι οι διακεκριμένοι συζυγείς χαρακτήρες του $\widehat{\phi}$ εντός της N. Από τη σχέση (3.13) έπεται άμεσα ότι

$$\det(\chi_M) = \beta^{ms\widehat{\phi}(1)} \cdot \big(\det\widehat{\phi}_1 \cdots \det\widehat{\phi}_s\big)^m .$$

Εάν λοιπόν θέσουμε $a := o(\widehat{\phi}_1)$, $b := o(\chi_M)$ και $c := ms\widehat{\phi}(1)ab$, τότε $\beta^c = 1_M$ και άρα $o(\beta)\,|\,c$. Ωστόσο $\chi(1) = ms\widehat{\phi}(1)$, οπότε το $ms\widehat{\phi}(1)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. Επίσης γνωρίζουμε ήδη ότι η τάξη $o(\widehat{\phi}_1) = o(\widehat{\phi})$ είναι π - αριθμός και επιπροσθέτως, βάσει της σημείωσης 1.4.27, η τάξη $o(\chi_M)$ διαιρεί τον π - αριθμό $o(\chi)$. Συνολικά λοιπόν το c είναι ένας π - αριθμός και κατ' επέκτασιν το ίδιο ισχύει και για το $o(\beta)$. Από την άλλη, επειδή $\beta \in \mathrm{Irr}(M/N \cap M)$, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.4.26 η τάξη $o(\beta)$ διαιρεί τον π' - αριθμό $|M/N \cap M|$. Τελικά $o(\beta) = 1 = \beta(1)$ και κατ' ανάγκην $\beta = 1_M$. Επομένως $\phi = \widehat{\phi}$ και, ειδικότερα, το $o(\phi) = o(\widehat{\phi})$ είναι πράγματι ένας π - αριθμός. □

Ορισμός 3.2.14. Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathfrak{X}_\pi(G,\theta) := \mathrm{Irr}(G,\theta) \cap \mathfrak{X}_\pi(G) .$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα των προτάσεων 3.2.12 και 3.2.13 στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.15. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα και $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N)$.*

(i) Εάν η G/N είναι π - ομάδα, τότε $\mathfrak{X}_\pi(G,\theta) = \mathrm{Irr}(G,\theta)$.

(ii) Εάν η G/N είναι π' - ομάδα, τότε $\mathfrak{X}_\pi(G,\theta) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{I}_G(\theta) = G$.
Ειδικότερα τότε $\mathfrak{X}_\pi(G,\theta) = \{\widehat{\theta}\}$, όπου $\widehat{\theta}$ είναι η κανονική επέκταση του χαρακτήρα θ στην G (βλ. ορισμό 3.1.27).

Απόδειξη. Το σκέλος (i) είναι άμεση απόρροια της πρότασης 3.2.12. Ως προς το σκέλος (ii), βάσει της προτάσεως 3.2.13 και των όσων αναγράφονται στην απόδειξη αυτής, απομένει να δείξουμε ότι εάν το σύνολο $\mathfrak{X}_\pi(G,\theta)$ είναι μη κενό, τότε ο χαρακτήρας θ είναι G - αναλλοίωτος (δηλ. $\mathrm{I}_G(\theta) = G$). Έστω λοιπόν $\psi \in \mathfrak{X}_\pi(G,\theta)$. Τότε το $\psi(1)$ είναι εξ ορισμού ένας π - αριθμός και, επειδή εξ υποθέσεως ο δείκτης $[G:N]$ είναι π' - αριθμός, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.18, έχουμε ότι $\psi_N \in \mathrm{Irr}(N)$ και ειδικότερα $\psi_N = \theta$. Επομένως $\mathrm{I}_G(\theta) = G$. □

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση 3.2.9 αποτελεί ειδική περίπτωση του πορίσματος 3.2.15 (για N την τετριμμένη υποομάδα και $\theta = 1_N$).

Θεώρημα 3.2.16. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $H \subseteq G$ μια υποομάδα τέτοια ώστε ο δείκτης $[G : H]$ να είναι ένας π' - αριθμός. Τότε η απεικόνιση*

$$\mathfrak{X}_\pi(G) \to \mathfrak{X}_\pi(H) \ \ , \ \ \chi \mapsto \chi_H$$

είναι καλώς ορισμένη και ενριπτική.

Απόδειξη. Έστω $\chi, \psi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ τέτοιοι ώστε $\chi_H = \psi_H$. Εργαζόμαστε επαγωγικά ως προς την τάξη της G και αποδεικνύουμε ταυτοχρόνως ότι $\chi_H \in \mathfrak{X}_\pi(H)$ καθώς και ότι $\chi = \psi$. Θεωρούμε τυχούσα μεγιστοτική κανονική υποομάδα $N \lhd G$. Επειδή εξ υποθέσεως η G είναι π - διαχωρίσιμη, το πηλίκο G/N είτε είναι π - ομάδα είτε είναι π' - ομάδα.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η G/N είναι π' - ομάδα. Τότε $\gcd\big([G : N], \chi(1)\big) = 1$, οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.1.18, $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$. Κατ' επέκτασιν, βάσει της προτάσεως 3.2.8, έχουμε $\chi_N \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και ομοίως $\psi_N \in \mathfrak{X}_\pi(N)$. Επειδή ωστόσο $[N : N \cap H] = [NH : H]$ και ο δείκτης $[G : H]$ είναι εξ υποθέσεως π' - αριθμός, το $[N : N \cap H]$ αποτελεί έναν π' - αριθμό. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\chi_{N\cap H} = (\chi_N)_{N\cap H} \in \mathfrak{X}_\pi(N \cap H) \ .$$

Ειδικότερα $(\chi_H)_{N\cap H} = \chi_{N\cap H} \in \mathrm{Irr}(N\cap H)$ και άρα $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$. Επιπροσθέτως, η σημείωση 1.4.27 μας πληροφορεί ότι η τάξη $o(\chi_H)$ διαιρεί τον π - αριθμό $o(\chi)$, οπότε αυτή αποτελεί έναν π - αριθμό. Επίσης $[H : N \cap H] = [NH : N]$ και ο δείκτης $[G : N]$ είναι π' - αριθμός, οπότε το $[H : N \cap H]$ είναι π' - αριθμός. Επομένως $\gcd\big([H : N \cap H], o(\chi_H)\big) = 1$ και, όπως άμεσα διαπιστώνουμε, το χ_H αποτελεί την κανονική επέκταση του $\chi_{N\cap H}$ στην H (πρβλ. θεώρημα 3.1.26). Βάσει λοιπόν του πορίσματος 3.2.15 έχουμε πράγματι ότι $\chi_H \in \mathrm{X}_\pi(H)$. Επιπροσθέτως,

$$(\chi_N)_{N\cap H} = (\chi_H)_{N\cap H} = (\psi_H)_{N\cap H} = (\psi_N)_{N\cap H} \ . \tag{3.14}$$

Επειδή $\chi_N, \psi_N \in \mathfrak{X}_\pi(N)$, η επαγωγική υπόθεση σε συνδυασμό με τη σχέση (3.14) μας δίνει $\chi_N = \psi_N$. Επομένως τώρα οι π - special χαρακτήρες χ και ψ αποτελούν δυο επεκτάσεις του $\chi_N \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και άρα, βάσει του πορίσματος 3.2.15, κατ' ανάγκην έχουμε $\chi = \psi$.

Ας υποθέσουμε εν συνεχεία ότι η G/N είναι π - ομάδα. Επειδή

$$\gcd\big([G : H], [G : N]\big) = 1 \ ,$$

ισχύει ότι $G = NH$ και άρα ο δείκτης

$$[N : N \cap H] = [NH : H] = [G : H]$$

είναι ένας π' - αριθμός. Έστω θ μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_N. Βάσει της πρότασης 3.2.8 έχουμε $\theta \in \mathfrak{X}_\pi(N)$, οπότε από την επαγωγική υπόθεση $\theta_{N\cap H} \in \mathfrak{X}_\pi(N\cap H)$. Θέτουμε $I := \mathrm{I}_G(\theta)$ και $J := \mathrm{I}_H(\theta_{N\cap H})$.

Ισχυρισμός : Ισχύει ότι $I \cap H = J$ καθώς και ότι $I = NJ$.
Πράγματι· για το πρώτο παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι ο εγκλεισμός $I\cap H \subseteq J$ είναι προφανής. Έστω λοιπόν τυχόν $g \in J$. Τότε $g \in H$ και ακόμα

$$\theta_{N\cap H} = (\theta_{N\cap H})^g = (\theta^g)_{N\cap H} .$$

Ωστόσο $\theta, \theta^g \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ (πρβλ. σημείωση 3.2.7), οπότε η προηγούμενη σχέση σε συνδυασμό με την επαγωγική υπόθεση μας δίνει $\theta = \theta^g$ και τελικά $g \in I \cap H$. Ως προς το δεύτερο, επειδή $N \subseteq I$, ισχύει $I \cap NH = N(I\cap H)$. Επομένως, βάσει των προηγουμένων, έχουμε ότι

$$I = I \cap G = I \cap NH = N(I\cap H) = NJ$$

και η δεύτερη σχέση είναι αληθής. ♢

Εξ υποθέσεως $\chi \in \mathrm{Irr}(G,\theta)$, οπότε η αντιστοιχία Clifford

$$\mathrm{Irr}(I,\theta) \to \mathrm{Irr}(G,\theta) \ \ , \ \ \alpha \mapsto \alpha^G \ , \tag{3.15}$$

του θεωρήματος 3.1.16 μας πληροφορεί ότι $\chi = \eta^G$, για κάποιο $\eta \in \mathrm{Irr}(I,\theta)$. Σημειωτέον ότι, επειδή $N \subseteq I$, βάσει του παραπάνω ισχυρισμού έχουμε

$$N \cap J = N \cap (I \cap H) = (N \cap I) \cap H = N \cap H .$$

Παρατηρούμε ότι $N \lhd I$, $I = NJ$, $\theta_{N\cap H} = \theta_{N\cap J} \in \mathrm{Irr}(N\cap J)$ και, προφανώς, $\mathrm{I}_I(\theta) = I$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.1.15 (για τα $I = NJ, J$ και N στη θέση των G, H και N, αντιστοίχως), το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη αμφιρριπτικής απεικόνισης

$$\mathrm{Irr}(I,\theta) \to \mathrm{Irr}(J,\theta_{N\cap H}) \ \ , \ \ \alpha \mapsto \alpha_J \ . \tag{3.16}$$

Ειδικότερα, έχουμε $\eta_J \in \mathrm{Irr}(J,\theta_{N\cap H})$. Επειδή $J := \mathrm{I}_H(\theta_{N\cap H})$, έχουμε τη δυνατότητα να θεωρήσουμε την αντιστοιχία Clifford

$$\mathrm{Irr}(J,\theta_{N\cap H}) \to \mathrm{Irr}(H,\theta_{N\cap H}) \ \ , \ \ \alpha \mapsto \alpha^H \ , \tag{3.17}$$

του θεωρήματος 3.1.16, η οποία μας πληροφορεί ότι $(\eta_J)^H \in \mathrm{Irr}(H,\theta_{N\cap H})$. Ωστόσο $I = NJ$ και $J \subseteq H$, οπότε

$$IH = (NJ)H = NH = G .$$

Επομένως, με την βοήθεια της πρότασης 1.4.22, για τον περιορισμό του χαρακτήρα $\chi = \eta^G$ στην H υπολογίζουμε ότι

$$\chi_H = (\eta^G)_H = (\eta^{IH})_H = (\eta_{I\cap H})^H = (\eta_J)^H \in \mathrm{Irr}(H, \theta_{N\cap H}) \ .$$

Από την άλλη έχουμε

$$H/(N\cap H) \cong NH/N = G/N \ ,$$

οπότε η $H/(N\cap H)$ είναι μια π - ομάδα και, βάσει του πορίσματος 3.2.15, ισχύει η ισότητα $\mathrm{Irr}(H,\theta_{N\cap H}) = \mathfrak{X}_\pi(H,\theta_{N\cap H})$. Τελικά λοιπόν πράγματι $\chi_H \in \mathfrak{X}_\pi(H)$. Απομένει να δείξουμε ότι $\chi = \psi$. Υπενθυμίζουμε ότι εξ αρχής έχουμε θεωρήσει μια ανάγωγη συνιστώσα θ του χ_N. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε το θ έτσι ώστε αυτό να αποτελεί ταυτοχρόνως και ανάγωγη συνιστώσα του ψ_N. Πράγματι· επειδή οι χαρακτήρες χ και ψ είναι εξ υποθέσεως π - special, σύμφωνα με την πρόταση 3.2.8, οι ανάγωγες συνιστώσες του χ_N καθώς και του ψ_N είναι π - special. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση, περιορίζοντας στο $N\cap H$, αυτές παραμένουν π - special (ειδικότερα ανάγωγες) και διακεκριμένες, εφόσον εξ αρχής ήταν διακεκριμένες. Ωστόσο

$$\chi_{N\cap H} = (\chi_H)_{N\cap H} = (\psi_H)_{N\cap H} = \psi_{N\cap H}$$

και άρα πράγματι μπορούμε να επιλέξουμε το θ έτσι ώστε να αποτελεί ανάγωγη συνιστώσα και του ψ_N. Με άλλα λόγια $\psi \in \mathrm{Irr}(G,\theta)$, οπότε σύμφωνα με την αντιστοιχία (3.15) έχουμε $\psi = \phi^G$, για κάποιο $\phi \in \mathrm{Irr}(I,\theta)$. Ειδικότερα, βάσει των αντιστοιχιών (3.16) και (3.17), ισχύει $\phi_J \in \mathrm{Irr}(J,\theta_{N\cap H})$ και $(\phi_J)^H \in \mathrm{Irr}(H,\theta_{N\cap H})$. Επίσης, ομοίως με προηγουμένως, καταλήγουμε στο ότι $\psi_H = (\phi_J)^H$. Επομένως

$$(\eta_J)^H = \chi_H = \psi_H = (\phi_J)^H$$

και η ενριπτικότητα της (3.17) μας δίνει $\eta_J = \phi_J$. Το τελευταίο σε συνδυασμό με την ενριπτικότητα της (3.16) μας πληροφορεί ότι $\eta = \phi$ και άρα τελικά έχουμε $\chi = \eta^G = \phi^G = \psi$. □

Ορισμός 3.2.17. Μια υποομάδα H της G καλείται π **- Hall υποομάδα**, όταν είναι π - ομάδα και ο δείκτης $[G:H]$ είναι ένας π' - αριθμός.

Αποδεικνύεται ότι κάθε π - διαχωρίσιμη ομάδα διαθέτει τουλάχιστον μία π - Hall υποομάδα καθώς και ότι δυο π - Hall υποομάδες οφείλουν να είναι συζυγείς. Για την απόδειξη αυτού, βλ. [Su], θεώρημα 3.7, σελ. 169 καθώς και ορισμούς 3.1, σελ. 166 και 5.10, σελ. 107.

Πόρισμα 3.2.18. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα. Εάν δυο π - special χαρακτήρες της G ταυτίζονται σε κάποια π - Hall υποομάδα της G, τότε είναι ίσοι.*

Απόδειξη. Έστω $\chi, \psi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και H μια π - Hall υποομάδα της G, τέτοια ώστε $\chi_H = \psi_H$. Επειδή η H είναι εξ ορισμού π - ομάδα, η πρόταση 3.2.9 μας πληροφορεί ότι $\mathfrak{X}_\pi(H) = \mathrm{Irr}(H)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.16, ο περιορισμός στην H επάγει μια ενριπτική απεικόνιση $\mathfrak{X}_\pi(G) \to \mathrm{Irr}(H)$ και τελικά $\chi = \psi$. □

Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Υπενθυμίζουμε (βλ. ορισμούς 2.1.1 και 2.3.1) ότι με G^* συμβολίζουμε το σύνολο των p - regular στοιχείων μιας ομάδας G και χ^* είναι ο περιορισμός ενός χαρακτήρα χ της G επί του $G^* \subseteq G$.

Πόρισμα 3.2.19. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$. Τότε $\chi^* \in \mathrm{IBr}_p(G)$, για κάθε $p \in \pi'$.*

Απόδειξη. Έστω $H \subseteq G$ μια π - Hall υποομάδα. Επειδή εξ υποθέσεως $p \notin \pi$ και η H είναι μια π - ομάδα, έχουμε ότι το p δεν διαιρεί την τάξη της H. Επομένως $H^* = H$ και κατ' επέκτασιν $\chi_H = (\chi^*)_H$. Επιπροσθέτως ο δείκτης $[G : H]$ είναι εξ ορισμού ένας π' - αριθμός, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.16, $\chi_H \in \mathfrak{X}_\pi(H)$. Ειδικότερα $(\chi^*)_H = \chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$ και επειδή $p \nmid |H|$, το θεώρημα 2.3.16 μας πληροφορεί ότι $\mathrm{Irr}(H) = \mathrm{IBr}_p(H)$. Συνεπώς $(\chi^*)_H \in \mathrm{IBr}_p(H)$ και κατ' επέκτασιν $\chi^* \in \mathrm{IBr}_p(G)$. □

3.3 π - παραγοντοποιήση χαρακτήρων

Θεώρημα 3.3.1 (Gajendragadkar). *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$. Τότε το γινόμενο $\alpha\beta$ αποτελεί έναν ανάγωγο χαρακτήρα της G. Επιπροσθέτως, εάν $\alpha' \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta' \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, με $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, τότε $\alpha = \alpha'$ και $\beta = \beta'$.*

Απόδειξη. Έστω $N \lhd G$ τυχούσα μεγιστοτική κανονική υποομάδα της G. Επειδή εξ υποθέσεως η G είναι π - διαχωρίσιμη, το πηλίκο G/N είναι είτε μια π - ομάδα είτε μια π' - ομάδα. Ας υποθέσουμε (δίχως βλάβη της γενικότητας) ότι είναι π - ομάδα (όλα τα επιχειρήματα που ακολουθούν στην απόδειξη είναι συμμετρικά ως προς τα σύνολα π και π'). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta, \beta' \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, τέτοιους ώστε να ισχύει $\alpha\beta = \alpha'\beta'$. Εργαζόμαστε επαγωγικά ως προς την τάξη $|G|$. Το $\beta(1)$ είναι εξ ορισμού ένας π' - αριθμός και ο δείκτης $[G : N]$ είναι εξ υποθέσεως π - αριθμός. Επομένως $\gcd\big(\beta(1), [G : N]\big) = 1$, οπότε βάσει της προτάσεως 3.1.18, ο περιορισμός β_N είναι ανάγωγος. Ομοίως και ο β'_N είναι ανάγωγος. Ως προς τους περιορισμούς των α και α' αντιστοίχως, υποθέτουμε ότι

$$\alpha_N = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \quad \text{και} \quad \alpha'_N = \sum_{j=0}^{m'} \alpha'_j \ ,$$

για κάποιους ανάγωγους χαρακτήρες α_i, α'_i της N. Σημειωτέον ότι βάσει της προτάσεως 3.2.8 έχουμε ότι

$$\beta_N, \beta'_N \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N) \quad \text{και} \quad \alpha_i, \alpha'_j \in \mathfrak{X}_{\pi}(N)\,,\ \forall\, i = 0, \ldots, m\,,\ \forall\, j = 0, \ldots, m'\,.$$

Επομένως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\alpha_i \beta_N, \alpha'_j \beta'_N \in \mathrm{Irr}(N)\,,\ \forall\, i = 0, \ldots, m\,,\ \forall\, j = 0, \ldots, m'\,. \tag{3.18}$$

Επιπροσθέτως ισχύει

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_N = (\alpha\beta)_N = (\alpha'\beta')_N = \sum_{j=0}^{m'} \alpha'_j \beta'_N\,,$$

οπότε λόγω της (3.18) μπορούμε δίχως βλάβη της γενικότητας (με ενδεχόμενη αναδιάταξη των δεικτών) να υποθέσουμε ότι $\alpha_0 \beta_N = \alpha'_0 \beta'_N$. Ωστόσο, από τη επαγωγική υπόθεση, τούτο συνεπάγεται ότι $\alpha_0 = \alpha'_0$ και $\beta_N = \beta'_N$.

<u>Βήμα 1</u> : Έχουμε $\beta = \beta'$.

Πράγματι· επειδή $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, το $\beta_N(1) = \beta(1)$ όπως και η τάξη $o(\beta_N)$ αποτελούν εξ ορισμού π' - αριθμούς. Ωστόσο το πηλίκο G/N είναι εξ υποθέσεως π - ομάδα, οπότε $\gcd\big([G:N], \beta_N(1) o(\beta_N)\big) = 1$. Επιπροσθέτως, επειδή $\beta, \beta' \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, οι τάξεις $o(\beta)$ και $o(\beta')$ είναι επίσης π' - αριθμοί (πρβλ. σημείωση 3.2.7). Επομένως

$$\gcd\big([G:N], o(\beta)\big) = \gcd\big([G:N], o(\beta')\big) = 1\,.$$

Ακόμη προφανώς ισχύει ότι $I_G(\beta_N) = G$, οπότε όλα τα παραπάνω μας δίνουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.1.26 (για το β_N στη θέση του θ και για $\chi \in \{\beta, \beta'\}$ με $\beta_N = \beta'_N = \theta$), από την μοναδικότητα του οποίου έπεται τελικά το ζητούμενο $\beta = \beta'$.

<u>Βήμα 2</u> : Ισχύει ότι $\alpha\beta \in \mathrm{Irr}(G)$.

Πράγματι· θέτουμε $I := \mathrm{I}_G(\alpha_0)$ και θεωρούμε την αντιστοιχία Clifford

$$\mathrm{Irr}(I, \alpha_0) \to \mathrm{Irr}(G, \alpha_0)\ \ ,\ \ \psi \mapsto \psi^G$$

του θεωρήματος 3.1.16. Επειδή $\alpha_0 = \alpha'_0$, έχουμε προφανώς ότι $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Irr}(G, \alpha_0)$ και άρα υπάρχουν κάποια $\psi, \psi' \in \mathrm{Irr}(I, \alpha_0)$, τέτοια ώστε $\alpha = \psi^G$ και $\alpha' = \psi'^G$. Εν συνεχεία θεωρούμε τον περιορισμό β_I του $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$. Επειδή προφανώς το $[G:I]$ διαιρεί το $[G:N]$, ο δείκτης $[G:I]$ είναι ένας π - αριθμός. Επομένως $\gcd\big([G:I], \beta(1)\big) = 1$ και σύμφωνα με την πρόταση 3.1.18 έχουμε $\beta_I \in \mathrm{Irr}(I)$.

Παρατηρούμε ότι (για $\theta = \beta_N$, $\chi = \beta_I$, $\phi = \alpha_0$ και $G = I$) πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 3.1.12, οπότε έχουμε αντιστοιχία

$$\mathrm{Irr}(I, \alpha_0) \to \mathrm{Irr}(I, \alpha_0\beta_N) \ , \ \ \omega \mapsto \omega\beta_I \ . \tag{3.19}$$

Ειδικότερα, για τα $\psi, \psi' \in \mathrm{Irr}(I, \alpha_0)$ που επιλέξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\psi\beta_I, \psi'\beta_I \in \mathrm{Irr}(I, \alpha_0\beta_N) \ .$$

Ισχυρισμός : Έχουμε ότι $I := \mathrm{I}_G(\alpha_0) = \mathrm{I}_G(\alpha_0\beta_N)$.

Πράγματι· επειδή προφανώς $\mathrm{I}_G(\beta_N) = G$, ο εγκλεισμός $I \subseteq \mathrm{I}_G(\alpha_0\beta_N)$ ισχύει τετριμμένα. Έστω λοιπόν τυχόν $g \in \mathrm{I}_G(\alpha_0\beta_N)$. Τότε

$$\alpha_0^g\beta_N = \alpha_0^g\beta_N^g = (\alpha_0\beta_N)^g = \alpha_0\beta_N \ .$$

Ωστόσο $\alpha_0 \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ οπότε $\alpha_0^g \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ (βλ. σημείωση 3.2.7). Επειδή $\beta_N \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N)$, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\alpha_0^g = \alpha_0$ και $g \in \mathrm{I}_G(\alpha_0)$. $\diamondsuit$

Βάσει του παραπάνω ισχυρισμού και των προηγουμένων έχουμε

$$\psi\beta_I, \psi'\beta_I \in \mathrm{Irr}\big(\mathrm{I}_G(\alpha_0\beta_N), \alpha_0\beta_N\big) \ , \tag{3.20}$$

οπότε η αντιστοιχία Cliford 3.1.16

$$\mathrm{Irr}\big(\mathrm{I}_G(\alpha_0\beta_N), \alpha_0\beta_N\big) \to \mathrm{Irr}(G, \alpha_0\beta_N) \tag{3.21}$$

μας δίνει ότι $(\psi\beta_I)^G \in \mathrm{Irr}(G, \alpha_0\beta_N)$. Ειδικότερα, από την πρόταση 1.4.20, έχουμε

$$\alpha\beta = \psi^G\beta = (\psi\beta_I)^G \in \mathrm{Irr}(G) \ .$$

Βήμα 3 : Έχουμε $\alpha = \alpha'$.

Πράγματι· από το βήμα 1, την πρόταση 1.4.20 και τα όσα περιέχονται στο βήμα 2 έχουμε

$$(\psi'\beta_I)^G = \psi'^G\beta = \psi'^G\beta' = \alpha'\beta' = \alpha\beta = (\psi\beta_I)^G \ .$$

Ωστόσο, από τη σχέση (3.20) και την ενριπτικότητα της (3.21), τούτο συνεπάγεται ότι $\psi'\beta_I = \psi\beta_I$. Επειδή $\psi, \psi' \in \mathrm{Irr}(I, \alpha_0)$, η ενριπτικότητα της (3.19), με τη σειρά της, μας δίνει $\psi' = \psi$. Ειδικότερα $\alpha = \psi^G = \psi'^G = \alpha'$. $\square$

Ορισμός 3.3.2. Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα. Ένα $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ καλείται π **- παραγοντοποιήσιμος** χαρακτήρας, όταν μπορεί να γραφεί στην μορφή $\chi = \alpha\beta$, για κάποια $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$. Το θεώρημα 3.3.1 μας πληροφορεί ότι η π - παραγοντοποιήση ενός χαρακτήρα (εφόσον υπάρχει) είναι μοναδική.

Πόρισμα 3.3.3. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $N \lhd \lhd G$ τυχούσα υποκανονική υποομάδα. Εάν ο $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ είναι π - παραγοντοποιήσιμος, τότε κάθε ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ_N είναι π - παραγοντοποιήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\chi = \alpha\beta$, για κάποια $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$ και ας υποθέσουμε ότι $\alpha_N = \phi_1 + \cdots + \phi_k$, $\beta_N = \theta_1 + \cdots + \theta_\lambda$, για κάποια $\phi_i, \theta_j \in \mathrm{Irr}(N)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$. Τότε

$$\chi_N = \alpha_N \beta_N = (\phi_1 + \cdots + \phi_k) \cdot (\theta_1 + \cdots + \theta_\lambda) \ .$$

Ωστόσο, σύμφωνα με την πρόταση 3.2.8, $\phi_i \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και $\theta_j \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N)$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$. Επομένως όλα τα γινόμενα $\phi_i\theta_j$ είναι π - παραγοντοποιήσιμοι χαρακτήρες, οι οποίοι μάλιστα, σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.1, ανήκουν στο $\mathrm{Irr}(N)$ και άρα αποτελούν τις ανάγωγες συνιστώσες του χ_N. □

Εν συνεχεία, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε συνθήκες υπό τις οποίες εξασφαλίζεται η ύπαρξη π - παραγοντοποιήσης για έναν χαρακτήρα.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $U, V \lhd G$ κανονικές υποομάδες τέτοιες ώστε η G/U να είναι π' - ομάδα και η G/V να είναι π - ομάδα. Θέτουμε $N := U \cap V$ και θεωρούμε χαρακτήρες $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N)$, για τους οποίους ισχύει $V \subseteq \mathrm{I}_G(\alpha)$ και $U \subseteq \mathrm{I}_G(\beta)$. Τότε κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \alpha\beta)$ είναι π - παραγοντοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς επειδή $\gcd\big([G : U], [G : V]\big) = 1$, έχουμε ότι $G = UV$. Επομένως

$$V/N = V/(U \cap V) \cong (UV)/U = G/U \ ,$$

οπότε η V/N είναι π' - ομάδα. Επειδή εξ υποθέσεως $V \subseteq \mathrm{I}_G(\alpha)$, έχουμε προφανώς ότι $\mathrm{I}_V(\alpha) = V$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.2.13 (για τον χαρακτήρα $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ στην θέση του θ και για $G = V$), η οποία μας δίνει κάποιο μοναδικό $\bar{\alpha} \in \mathrm{Irr}(V, \alpha) \cap \mathfrak{X}_\pi(V)$. Ομοίως

$$U/N = U/(U \cap V) \cong (UV)/V = G/V \ ,$$

οπότε η U/N είναι π - ομάδα. Και πάλι είναι προφανές ότι $\mathrm{I}_U(\beta) = U$, οπότε έχουμε τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.2.13 (για τον χαρακτήρα $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N)$ στην θέση του θ, για $G = U$ και εναλλάσοντας τους ρόλους των συνόλων π και π'), η οποία μας δίνει κάποιο μοναδικό $\bar{\beta} \in \mathrm{Irr}(U, \beta) \cap \mathfrak{X}_{\pi'}(U)$. Από την μοναδικότητα των $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ έχουμε ότι $\bar{\alpha}_N = \alpha$ και $\bar{\beta}_N = \beta$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 1.4.22 ισχύει ότι

$$\bar{\alpha}^G \bar{\beta}^G = (\bar{\alpha}_N \bar{\beta}_N)^G = (\alpha\beta)^G \ .$$

Εάν λοιπόν έχουμε τυχόν $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \alpha\beta)$, τότε σύμφωνα με το παραπάνω το χ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του $\bar{\alpha}^G \bar{\beta}^G$, οπότε υπάρχουν κάποιοι χαρακτήρες $\psi_1 \in \mathrm{Irr}(G, \bar{\alpha})$ και $\psi_2 \in \mathrm{Irr}(G, \bar{\beta})$, τέτοιοι ώστε το χ να αποτελεί ανάγωγη συνιστώσα του $\psi_1\psi_2$. Ωστόσο $\bar{\alpha} \in \mathfrak{X}_\pi(V)$ και το πηλίκο G/V είναι εξ υποθέσεως π - ομάδα. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.2.12 (για το $\bar{\alpha}$ στην θέση του θ και για $N = V$), η οποία μας πληροφορεί ότι το $\psi_1 \in \mathrm{Irr}(G, \bar{\alpha})$ οφείλει να είναι π - special χαρακτήρας της G. Κατ' αναλογίαν, επειδή $\bar{\beta} \in \mathfrak{X}_{\pi'}(U)$ και το πηλίκο G/U είναι εξ υποθέσεως π' - ομάδα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.2.12 (για το $\bar{\beta}$ στην θέση του θ, για $N = U$ και εναλάσσοντας τους ρόλους των συνόλων π και π'), η οποία μας εξασφαλίζει ότι το $\psi_2 \in \mathrm{Irr}(G, \bar{\beta})$ είναι ένας π' - special χαρακτήρας της G. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα του Gajendragadkar 3.3.1, το γινόμενο $\psi_1\psi_2$ αποτελεί έναν ανάγωγο χαρακτήρα της G. Ειδικότερα έχουμε $\chi = \psi_1\psi_2$ και ο χ είναι τελικά π - παραγοντοποιήσιμος. □

Λήμμα 3.3.5. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα τέτοια ώστε το πηλίκο G/N να είναι είτε π - ομάδα είτε π' - ομάδα. Έστω ακόμα $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N)$. Εάν ισχύει ότι $\mathrm{I}_G(\alpha\beta) = G$, τότε κάθε $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \alpha\beta)$ είναι π - παραγοντοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, ότι το πηλίκο G/N είναι π - ομάδα και ας θέσουμε $V = N$ και $U = G$ στην πρόταση 3.3.4. Για την εφαρμογή αυτής (και την ολοκλήρωση της απόδειξης) απομένει να δείξουμε ότι $N \subseteq \mathrm{I}_G(\alpha)$ και $G \subseteq \mathrm{I}_G(\beta)$. Ωστόσο εξ υποθέσεως $\mathrm{I}_G(\alpha\beta) = G$, οπότε για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$\alpha^g \beta^g = (\alpha\beta)^g = \alpha\beta \; . \tag{3.22}$$

Σύμφωνα με την σημείωση 3.2.7 έχουμε $\alpha, \alpha^g \in \mathfrak{X}_\pi(N)$ και $\beta, \beta^g \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N)$, οπότε η σχέση (3.22) σε συνδυασμό με την μοναδικότητα της π - παραγοντοποιήσης (βλ. 3.3.1) μας δίνει ότι $\alpha^g = \alpha$ και $\beta^g = \beta$, για κάθε $g \in G$. Με άλλα λόγια έχουμε $\mathrm{I}_G(\alpha) = \mathrm{I}_G(\beta) = G$ και οι ζητούμενοι εγκλεισμοί ισχύουν κατά τρόπο προφανή. □

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ένας quasiprimitive χαρακτήρας (βλ. 3.1.19). Τότε ο χ είναι π - παραγοντοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Επειδή η ομάδα G είναι π - διαχωρίσιμη, μπορούμε να επιλέξουμε μια κανονική σειρά

$$\{1\} = N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_{m-1} \lhd N_m = G \; ,$$

τέτοια ώστε όλοι οι παράγοντες αυτής να είναι είτε π - ομάδες είτε π' - ομάδες. Εξ υποθέσεως, για κάθε δείκτη $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, υπάρχουν ανάγωγοι χαρακτήρες

$\theta_i \in \mathrm{Irr}(N_i)$ καθώς και θετικοί ακέραιοι e_i, τέτοιοι ώστε $\chi_{N_i} = e_i\theta_i$. Κατ' αρχάς είναι προφανές ότι $\theta_{i+1} \in \mathrm{Irr}(N_{i+1}, \theta_i)$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Επιπροσθέτως, οι χαρακτήρες θ_i είναι όλοι G - αναλλοίωτοι (δηλ. $\mathrm{I}_G(\theta_i) = G$), οπότε ειδικότερα έχουμε $\mathrm{I}_{N_{i+1}}(\theta_i) = N_{i+1}$. Αποδεικνύουμε ότι οι χαρακτήρες θ_i είναι όλοι π - παραγοντοποιήσιμοι, εργαζόμενοι επαγωγικά ως προς το i. Για $i = 0$ και τον τετριμμένο χαρακτήρα θ_0 τούτο είναι προφανές. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ισχύει για κάποιο $j < m$ και άρα ότι $\theta_j = \alpha\beta$, για κάποια $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(N_j)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(N_j)$. Τότε όμως $\theta_{j+1} \in \mathrm{Irr}(N_{j+1}, \alpha\beta)$ και $\mathrm{I}_{N_{j+1}}(\alpha\beta) = \mathrm{I}_{N_{j+1}}(\theta_j) = N_{j+1}$. Επομένως πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του λήμματος 3.3.4, το οποίο και μας εξασφαλίζει ότι ο χαρακτήρας θ_{j+1} είναι π - παραγοντοποιήσιμος. Ειδικότερα, για $i = m$, ο χαρακτήρας $\chi = \theta_m$ είναι π - παραγοντοποιήσιμος. □

Το θεώρημα 3.3.6 σε συνδυασμό με την πρόταση 3.1.20 μας πληροφορεί ότι σε μια π - διαχωρίσιμη ομάδα, κάθε primitive χαρακτήρας είναι π - παραγοντοποιήσιμος.

3.4 Αριθμητικές εφαρμογές

Στην παρούσα ενότητα με $\mathbb{Q}_m$ θα συμβολίζουμε το m - οστό κυκλοτομικό σώμα, δηλαδή την επέκταση του $\mathbb{Q}$ η οποία παράγεται από κάποια πρωταρχική m - ρίζα της μονάδος. Επίσης, με $\mathrm{Aut}(F)$ θα συμβολίζουμε την ομάδα των αυτομορφισμών ενός σώματος F. Τέλος το $\mathrm{Gal}(L/K)$ θα δηλώνει την ομάδα Galois της πεπερασμένης και κανονικής επέκτασης σωμάτων $K \subseteq L$.

Ορισμός 3.4.1. Εάν το χ είναι ένας μιγαδικός χαρακτήρας της G, τότε ορίζουμε την επέκταση του $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}(\chi) := \mathbb{Q}\big(\chi(g) : g \in G\big) ,$$

η οποία παράγεται από το σύνολο των τιμών $\{\chi(g) : g \in G\}$.

Ορισμός 3.4.2. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Καλούμε **εκθέτη** (exponent) της G τον ελάχιστο φυσικό $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $g^n = 1$, για κάθε $g \in G$. Συμβολίζουμε $\exp(G) = n$ και προφανώς ισχύει ότι $\exp(G) \,\big|\, |G|$.

Λήμμα 3.4.3. *Εάν το χ είναι ένας μιγαδικός χαρακτήρας της G και $g \in G$, τότε $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$, όπου $m := \mathrm{ord}(g)$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(G)} \subseteq \mathbb{Q}_{|G|}$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο χαρακτήρας χ αντιστοιχεί σε μια μιγαδική αναπαράσταση $\mathcal{X}$, βαθμού n. Εάν $m := \mathrm{ord}(g)$, τότε

$$\big(\mathcal{X}(g)\big)^m = \mathcal{X}(g^m) = \mathcal{X}(1) = I_n ,$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathcal{X}(g)$ αποτελούν m - ρίζες της μονάδος. Κατ' επέκτασιν και το ίχνος $\chi(g) = \operatorname{tr}\big(\mathcal{X}(g)\big)$, ως άθροισμα αυτών, ανήκει το $\mathbb{Q}_m$. Επιπροσθέτως, επειδή για κάθε $g \in G$ ισχύει $\operatorname{ord}(g) \mid \exp(G)$, έχουμε

$$\chi(g) \in \mathbb{Q}_{\operatorname{ord}(g)} \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(G)} ,$$

οπότε $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(G)}$. Τέλος, ο εγκλεισμός $\mathbb{Q}_{\exp(G)} \subseteq \mathbb{Q}_{|G|}$ είναι προφανής, διότι ο εκθέτης της G διαιρεί την τάξη $|G|$. □

Ορισμός 3.4.4. Έστω χ ένας μιγαδικός χαρακτήρας της G και $L \subseteq \mathbb{Q}_{|G|}$ ένα σώμα, τέτοιο ώστε $\chi(g) \in L$, για κάθε $g \in G$. Εάν $\sigma \in \operatorname{Aut}(L)$, ορίζουμε συνάρτηση χ^σ μέσω του τύπου $\chi^\sigma(g) = \chi(g)^\sigma$, για κάθε $g \in G$.

Πρόταση 3.4.5. *Η συνάρτηση χ^σ του ορισμού 3.4.4 αποτελεί έναν μιγαδικό χαρακτήρα της G. Επιπροσθέτως, $\chi^\sigma \in \operatorname{Irr}(G)$ εάν και μόνον εάν $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς αξίζει να σημειώσουμε ότι εν γένει δεν είναι πάντα εφικτό να βρούμε μια αναπαράσταση $\mathcal{X}$ της G με χαρακτήρα τον χ και όλες τις εγγραφές των πινάκων $\mathcal{X}(g)$ στο σώμα L. Ωστόσο, σύμφωνα με την πρόταση 2.3.7, έχουμε τη δυνατότητα να υποθέσουμε ότι ο χαρακτήρας χ αντιστοιχεί σε μια αναπαράσταση $\mathcal{X}(g) = \big(a_{ij}(g)\big)$, τέτοια ώστε όλα τα $a_{ij}(g) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Επειδή $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, από τη θεωρία Galois είναι γνωστό ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον αυτομορφισμό σ του L σε αυτομορφισμό $\widehat{\sigma}$ του σώματος $\overline{\mathbb{Q}}$. Εάν λοιπόν ορίσουμε

$$\mathcal{X}^{\widehat{\sigma}}(g) := \big(a_{ij}(g)^{\widehat{\sigma}}\big) ,$$

τότε άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι αυτή αποτελεί μια αναπαράσταση της G με χαρακτήρα τον χ^σ. Τέλος, είναι προφανές ότι $[\chi^\sigma, \chi^\sigma] = [\chi, \chi]^\sigma$ (πρβλ. ορισμό 1.4.3), οπότε από το λήμμα 1.4.5 έπεται άμεσα ο τελευταίος ισχυρισμός. □

Παρατήρηση 3.4.6. Έστω χ ένας μιγαδικός χαρακτήρας της G και σ ένας αυτομορφισμός, όπως στον ορισμό 3.4.4. Επειδή προφανώς $\det \chi^\sigma = (\det \chi)^\sigma$ έχουμε $o(\chi^\sigma) = o(\chi)$. Επιπροσθέτως, εάν το θ είναι μια ανάγωγη συνιστώσα του χαρακτήρα χ^σ, τότε άμεσα διαπιστώνουμε ότι $\theta = \phi^\sigma$, για κάποια ανάγωγη συνιστώσα ϕ του χαρακτήρα χ.

Σημείωση 3.4.7. Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα και ψ ένας χαρακτήρας της H. Εάν $\sigma \in \operatorname{Aut}\big(\mathbb{Q}(\psi)\big)$, τότε είναι προφανές από τον ορισμό 3.4.4 καθώς και τον ορισμό 1.4.12 ότι ισχύει η ισότητα $(\psi^\sigma)^G = \big(\psi^G\big)^\sigma$.

Πρόταση 3.4.8. *Έστω $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\chi) \subseteq L$ μια κανονική και πεπερασμένη επέκταση. Τότε $\chi^\sigma \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, για κάθε $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, βάσει της προτάσεως 3.4.5, $\chi^\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$. Επειδή επιπροσθέτως $\chi(1) \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, έχουμε ότι $\chi^\sigma(1) = \chi(1)^\sigma = \chi(1)$, οπότε το $\chi^\sigma(1)$ αποτελεί έναν π - αριθμό. Έστω $N \lhd\lhd G$ τυχούσα υποκανονική υποομάδα της G και θ μια ανάγωγη συνιστώσα του $(\chi^\sigma)_N = (\chi_N)^\sigma$. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3.4.6 έχουμε $\theta = \phi^\sigma$, για κάποια ανάγωγη συνιστώσα ϕ του περιορισμού χ_N και άρα, βάσει της ίδιας παρατήρησης, $o(\theta) = o(\phi^\sigma) = o(\phi)$. Ωστόσο ο χαρακτήρας χ είναι π - special, οπότε η τάξη $o(\phi)$ αποτελεί εξ ορισμού έναν π - αριθμό. □

Πρόταση 3.4.9. *Έστω G μια π - διαχωρίσιμη ομάδα και $H \subseteq G$ μια π - Hall υποομάδα της. Εάν $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ τότε $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi_H) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(H)}$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς είναι εξ ορισμού προφανές ότι $\mathbb{Q}(\chi_H) \subseteq \mathbb{Q}(\chi)$. Έστω λοιπόν τυχόν $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}(\chi_H)\big)$. Τότε

$$(\chi^\sigma)_H = (\chi_H)^\sigma = \chi_H \ . \tag{3.23}$$

Ωστόσο, βάσει της προτάσεως 3.4.8, $\chi, \chi^\sigma \in \mathfrak{X}_\pi(G)$, οπότε η σχέση (3.23) σε συνδυασμό με το πόρισμα 3.2.18, μας δίνει ότι $\chi^\sigma = \chi$. Επομένως ο (τυχαίος) αυτομορφισμός σ είναι ο τετριμμένος και $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi_H)$. Το ότι ισχύει $\mathbb{Q}(\chi_H) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(H)}$ μας είναι ήδη γνωστό από το λήμμα 3.4.3. □

Ορισμός 3.4.10. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και π ένα σύνολο πρώτων αριθμών. Συμβολίζουμε με n_π το τμήμα της παραγοντοποιήσης του φυσικού n το οποίο αποτελείται αποκλειστικά από δυνάμεις πρώτων από το σύνολο π.

Πόρισμα 3.4.11. *Εάν η G είναι μια π - διαχωρίσιμη ομάδα, τότε $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{|G|_\pi}$ για κάθε $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(G)$.*

Απόδειξη. Έστω $H \subseteq G$ μια π - Hall υποομάδα της G. Εξ ορισμού η τάξη της H είναι ένας π - αριθμός, οπότε διαιρεί τον αριθμό $|G|_\pi$. Ειδικότερα $\exp(H) \,\big|\, |G|_\pi$, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 3.4.9, έχουμε ότι $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(H)} \subseteq \mathbb{Q}_{|G|_\pi}$. □

Ορισμός 3.4.12. Έστω χ ένας ανάγωγος μιγαδικός χαρακτήρας της G. Από το λήμμα 3.4.3 γνωρίζουμε ότι η επέκταση $\mathbb{Q}(\chi)$ περιέχεται σε κάποιο κυκλοτομικό σώμα. Έστω $f(\chi)$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\chi)}$. Καλούμε το $f(\chi)$ **conductor** του χαρακτήρα χ.

Παρατήρηση 3.4.13. Εάν ο $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$ είναι γραμμικός χαρακτήρας, τότε το $\mathbb{Q}(\lambda)$ είναι το κυκλοτομικό σώμα $\mathbb{Q}_{\mathrm{ord}(\lambda)}$, όπου $\mathrm{ord}(\lambda)$ είναι η τάξη του χαρακτήρα λ εντός της ομάδας των γραμμικών χαρακτήρων της G. Επομένως ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{Q}_{f(\lambda)} : \mathbb{Q}(\lambda)]$ είναι ένα.

Εν συνεχεία ακοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι σε μία επιλύσιμη ομάδα G, ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{Q}_{f(\chi)} : \mathbb{Q}(\chi)]$ οφείλει να είναι σχετικά μικρός και ειδικότερα να διαιρεί το $\chi(1)$.

Ορισμός 3.4.14. Έστω $H \subseteq G$ μια υποομάδα. Ορίζουμε τον **κανονικοποιητή** της H εντός της G ως το σύνολο

$$\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \ : \ gH = Hg\} \ .$$

Ο κανονικοποιητής αποτελεί υποομάδα και προφανώς $H \lhd \mathrm{N}_G(H)$.

Λήμμα 3.4.15. *Έστω $N \lhd G$ μια κανονική υποομάδα, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ και θ μια ανάγωγη συνιστώσα του περιορισμού χ_N, με $I := \mathrm{I}_G(\theta)$. Επειδή $\chi \in \mathrm{Irr}(G, \theta)$, σύμφωνα με την αντιστοιχία Clifford 3.1.16, έχουμε ότι $\chi = \psi^G$, για κάποιο $\psi \in \mathrm{Irr}(I, \theta)$. Τότε ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{Q}(\psi) : \mathbb{Q}(\chi)]$ διαιρεί τον αριθμό $\chi(1)/\psi(1)$.*

Απόδειξη. **Βήμα 1** : Ισχύει ότι $\mathbb{Q}(\chi)\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\psi)$.
Κατ' αρχάς έχουμε άμεσα $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\psi^G) \subseteq \mathbb{Q}(\psi)$. Επιπροσθέτως το θ αποτελεί μια ανάγωγη συνιστώσα του ψ_N, οπότε $\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{Q}(\psi)$ και ισχύει ο εγκλεισμός $\mathbb{Q}(\chi)\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{Q}(\psi)$. Από την άλλη, σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.7 ισχύει

$$\psi_N = m\theta \ \ , \ \ m = [\theta, \psi_N] \ .$$

Εάν λοιπόν το $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\psi) \,/\, \mathbb{Q}(\chi)\mathbb{Q}(\theta)\big)$ είναι τυχόν, τότε

$$(\psi^\sigma)_N = (\psi_N)^\sigma = (m\theta)^\sigma = m\theta^\sigma = m\theta \ ,$$

πράγμα το οποίο μας πληροφορεί ότι $\psi^\sigma \in \mathrm{Irr}(I, \theta)$. Βάσει της σημείωσης 3.4.7,

$$(\psi^\sigma)^G = (\psi^G)^\sigma = \chi^\sigma = \chi = \psi^G \ ,$$

οπότε από την ενριπτικότητα της αντιστοιχίας Clifford 3.1.16 έχουμε $\psi^\sigma = \psi$. Επειδή ο αυτομορφισμός σ ήταν τυχόν καταλήγουμε στο ότι $\mathbb{Q}(\chi)\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\psi)$.

Βήμα 2 : Υπάρχει μονομορφισμός ομάδων $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\psi) \,/\, \mathbb{Q}(\chi)\big) \to \mathrm{N}_G(I)/I$, όπου $\mathrm{N}_G(I)$ είναι ο κανονικοποιητής της I εντός της G (βλ. ορισμό 3.4.14).
Έστω $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\psi) \,/\, \mathbb{Q}(\chi)\big)$. Τότε

$$0 < [\chi_N, \theta] = [\chi_N, \theta]^\sigma = [(\chi_N)^\sigma, \theta^\sigma] = [\chi_N, \theta^\sigma] \ ,$$

οπότε υπάρχει κάποιο $g_\sigma \in G$ τέτοιο ώστε $\theta^\sigma = \theta^{g_\sigma}$. Άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι $\mathrm{I}_G(\theta) = \mathrm{I}_G(\theta^\sigma)$ και άρα $I = \mathrm{I}_G(\theta^\sigma) = \mathrm{I}_G(\theta^{g_\sigma})$. Επομενως, σύμφωνα με το λήμμα 3.1.6(ii), ισχύει

$$I = \mathrm{I}_G(\theta^{g_\sigma}) = g_\sigma \, \mathrm{I}_G(\theta) \, g_\sigma^{-1} = g_\sigma \, I \, g_\sigma^{-1} \ .$$

Συνεπώς $g_\sigma I = I g_\sigma$ και άρα $g_\sigma \in \mathrm{N}_G(I)$. Σημειωτέον ότι το στοιχείο g_σ είναι μοναδικά καθορισμένο (mod$I$) από τον αυτομορφισμό σ και άρα έχουμε καλά ορισμένο ομομορφισμό ομάδων

$$\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\psi)\,/\,\mathbb{Q}(\chi)\big) \to \mathrm{N}_G(I)/I \ \ , \ \ \sigma \mapsto g_\sigma I \ .$$

Ο εν λόγω ομομορφισμός είναι μονομορφισμός, διότι εάν $g_\sigma \in I$, τότε $\theta^\sigma = \theta^{g_\sigma} = \theta$ και άρα $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\psi)\,/\,\mathbb{Q}(\chi)\mathbb{Q}(\theta)\big)$. Ωστόσο, από το βήμα 1, η τελευταία ομάδα είναι τετριμμένη.

Βήμα 3: Το $[\mathbb{Q}(\psi):\mathbb{Q}(\chi)]$ διαιρεί τον αριθμό $\chi(1)/\psi(1)$.
Από το βήμα 2, ο εν λόγω βαθμός διαιρεί την τάξη της $\mathrm{N}_G(I)/I$ και ειδικότερα $[\mathbb{Q}(\psi):\mathbb{Q}(\chi)]\,\big|\,[G:I]$. Ωστόσο $\psi \in \mathrm{Irr}(I)$ οπότε, σύμφωνα με το λήμμα 1.4.13(ii), έχουμε ότι

$$\chi(1) = \psi^G(1) = [G:I]\,\psi(1)\ .$$

Επομένως πράγματι ο βαθμός $[\mathbb{Q}(\psi):\mathbb{Q}(\chi)]$ διαιρεί τον αριθμό $\chi(1)/\psi(1)$. □

Σημείωση 3.4.16. Αποδεικνύεται (βλ. [Is1], θεώρημα 11.33, σελ 191) ότι εάν η G είναι επιλύσιμη ομάδα, τότε κάθε quasiprimitive χαρακτήρας είναι primitive. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.20, οι δύο αυτές έννοιες σε μια επιλύσιμη ομάδα ταυτίζονται.

Θεώρημα 3.4.17. *Έστω G μια επιλύσιμη ομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Τότε ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{Q}_{f(\chi)}:\mathbb{Q}(\chi)]$ διαιρεί το $\chi(1)$.*

Απόδειξη. Εργαζόμαστε επαγωγικά ως προς την τάξη της G. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει κανονική υποομάδα $N \lhd G$ και ανάγωγη συνιστώσα θ του χ_N, έτσι ώστε $I := \mathrm{I}_G(\theta) \subsetneqq G$. Σύμφωνα με την αντιστοιχία Clifford 3.1.16 υπάρχει κάποιο $\psi \in \mathrm{Irr}(I,\theta)$, τέτοιο ώστε $\chi = \psi^G$. Από την επαγωγική υπόθεση, ο βαθμός $[\mathbb{Q}_{f(\psi)}:\mathbb{Q}(\psi)]$ διαιρεί την τιμή $\psi(1)$. Από την άλλη, βάσει του λήμματος 3.4.15, ο βαθμός $[\mathbb{Q}(\psi):\mathbb{Q}(\chi)]$ διαιρεί τον αριθμό $\chi(1)/\psi(1)$. Επομένως

$$[\mathbb{Q}_{f(\psi)}:\mathbb{Q}(\chi)] = [\mathbb{Q}_{f(\psi)}:\mathbb{Q}(\psi)]\cdot[\mathbb{Q}(\psi):\mathbb{Q}(\chi)]\ \big|\ \psi(1)\cdot\frac{\chi(1)}{\psi(1)} = \chi(1)\ .$$

Ωστόσο $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\psi)}$, οπότε εξ ορισμού του conductor, $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\chi)} \subseteq \mathbb{Q}_{f(\psi)}$. Ειδικότερα, βάσει των προηγουμένων, το $[\mathbb{Q}_{f(\chi)}:\mathbb{Q}(\chi)]$ διαιρεί πράγματι το $\chi(1)$.
Ας υποθέσουμε εν συνεχεία ότι δεν υπάρχει τέτοια κανονική υποομάδα, πράγμα το οποίο, όπως άμεσα διαπιστώνει κανείς, συνεπάγεται ότι ο χαρακτήρας χ είναι quasiprimitive. Θεωρούμε και σταθεροποιούμε κάποιον πρώτο διαιρέτη p της $|G|$ και ορίζουμε $\pi := \{p\}$ και $\pi' := \mathbb{P}\setminus\{p\}$. Η ομάδα G είναι π - διαχωρίσιμη και,

βάσει του θεωρήματος 3.3.6, υπάρχουν χαρακτήρες $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, έτσι ώστε $\chi = \alpha\beta$.

Ισχυρισμός : Έχουμε ότι $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)$.
Πράγματι· επειδή $\chi = \alpha\beta$ ο εγκλεισμός $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)$ είναι προφανής. Έστω λοιπόν τυχόν $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta) \,/\, \mathbb{Q}(\chi)\big)$. Τότε

$$\alpha\beta = \chi = \chi^\sigma = (\alpha\beta)^\sigma = \alpha^\sigma\beta^\sigma \ .$$

Ωστόσο, βάσει της προτάσεως 3.4.8, $\alpha, \alpha^\sigma \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta, \beta^\sigma \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$. Επομένως, η μοναδικότητα της παραγοντοποιήσης του θεωρήματος 3.3.1 μας δίνει $\alpha = \alpha^\sigma$ και $\beta = \beta^\sigma$. Συνεπώς ο σ οφείλει να είναι ο τετριμμένος και κατ' επέκτασιν ισχύει η ισότητα $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)$. $\diamondsuit$

Σταθεροποιούμε μια p - Sylow υποομάδα P της G καθώς και μια π' - Hall υποομάδα H (σημειωτεόν ότι για $\pi = \{p\}$ η έννοια της p - Sylow υποομάδας ταυτίζεται με την έννοια της π - Hall υποομάδας). Επειδή ο χαρακτήρας α είναι π - special και η P είναι π - Hall υποομάδα, σύμφωνα με την πρόταση 3.4.9 ισχύει ότι

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_P) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(P)} \ .$$

Ομοίως, (εναλλάσοντας τους ρόλους των συνόλων π και π' στην 3.4.9) έχουμε

$$\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta_H) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(H)} \ .$$

Επομένως, ως προς τους conductors $f(\alpha) = f(\alpha_P)$ και $f(\beta) = f(\beta_H)$, ισχύει $f(\alpha) \,|\, \exp(P)$ και $f(\beta) \,|\, \exp(H)$. Επειδή προφανώς $\gcd\big(\exp(P), \exp(H)\big) = 1$ τούτο σημαίνει ότι $\gcd\big(f(\alpha), f(\beta)\big) = 1$ και, ως γνωστόν, $\mathbb{Q}_{f(\alpha)} \cap \mathbb{Q}_{f(\beta)} = \mathbb{Q}$. Συνεπώς

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\alpha)} \cap \mathbb{Q}_{f(\beta)} = \mathbb{Q} \ ,$$

οπότε $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}_{f(\alpha)} \cap \mathbb{Q}_{f(\beta)} = \mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}_{f(\alpha)}\mathbb{Q}_{f(\beta)} = \mathbb{Q}_{f(\alpha)f(\beta)}$.
Προφανώς $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\alpha)f(\beta)}$ και, βάσει των προηγουμένων,

$$[\mathbb{Q}_{f(\alpha)f(\beta)} : \mathbb{Q}(\chi)] = [\mathbb{Q}_{f(\alpha)}\mathbb{Q}_{f(\beta)} : \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)] \ .$$

Επιπροσθέτως, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι

$$[\mathbb{Q}_{f(\alpha)}\mathbb{Q}_{f(\beta)} : \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)] = [\mathbb{Q}_{f(\alpha)} : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}_{f(\beta)} : \mathbb{Q}(\beta)] \ .$$

Εξ επιλογής της υποομάδας H έχουμε $H \subsetneqq G$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση, ο βαθμός $[\mathbb{Q}_{f(\beta)} : \mathbb{Q}(\beta)] = [\mathbb{Q}_{f(\beta_H)} : \mathbb{Q}(\beta_H)]$ διαιρεί το $\beta_H(1) = \beta(1)$. Στην περίπτωση όπου έχουμε $P \subsetneqq G$, ομοίως καταλήγουμε στο ότι ο βαθμός

$[\mathbb{Q}_{f(\alpha)} : \mathbb{Q}(\alpha)]$ διαιρεί την τιμή $\alpha(1)$. Ας υποθέσουμε ότι $G = P$. Τότε η G είναι μια π - ομάδα και ο χαρακτήρας β είναι π' - special. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 3.2.9, $\beta = 1_G$ και $\chi = \alpha$. Τότε όμως ο χαρακτήρας α είναι quasiprimitive και, επειδή η ομάδα G είναι επιλύσιμη, σύμφωνα με τη σημείωση 3.4.16, ο χαρακτήρας α είναι primitive. Ωστόσο η $G = P$ είναι p - ομάδα και άρα, βάσει της προτάσεως 3.1.33, monomial. Συνεπώς ο χαρακτήρας α είναι monomial και primitive, οπότε βάσει της παρατηρήσεως 3.1.29, κατ' ανάγκην είναι γραμμικός. Επομένως $[\mathbb{Q}_{f(\alpha)} : \mathbb{Q}(\alpha)] = 1 = \alpha(1)$ (βλ. παρατήρηση 3.4.13). Σε κάθε περίπτωση, ο βαθμός $[\mathbb{Q}_{f(\alpha)} : \mathbb{Q}(\alpha)]$ διαιρεί την τιμή $\alpha(1)$ και άρα συνολικά

$$[\mathbb{Q}_{f(\alpha)f(\beta)} : \mathbb{Q}(\chi)] = [\mathbb{Q}_{f(\alpha)} : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}_{f(\beta)} : \mathbb{Q}(\beta)] \mid \alpha(1)\beta(1) = \chi(1) .$$

Ωστόσο $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\chi)} \subseteq \mathbb{Q}_{f(\alpha)f(\beta)}$, οπότε $[\mathbb{Q}_{f(\chi)} : \mathbb{Q}(\chi)] \mid \chi(1)$. □

Εάν $f(\chi)$ είναι ο conductor ενός χαρακτήρα $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ τότε, βάσει του ορισμού 3.4.12 καθώς και του λήμματος 3.4.3, έχουμε $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\chi)} \subseteq \mathbb{Q}_{|G|}$ οπότε το $f(\chi)$ αποτελεί έναν διαιρέτη της τάξης της G. Ένα φυσικό ερώτημα λοιπόν είναι το κατά πόσον η ομάδα G διαθέτει στοιχείο τάξεως $f(\chi)$. Εν συνεχεία αποδεικνύουμε (θεώρημα 3.4.22) ότι στην περίπτωση όπου η ομάδα G είναι επιλύσιμη, τούτο ισχύει.

Σημείωση 3.4.18. Έστω $\mathbb{Q}_m$ το m - οστό κυκλοτομικό σώμα. Υπενθυμίζουμε ότι $[\mathbb{Q}_m : \mathbb{Q}] = \left|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})\right| = \phi(m)$, όπου το ϕ είναι η συνάρτηση του Euler. Εάν λοιπόν το p είναι ένας πρώτος διαιρέτης του αριθμού m, τότε (μέσω στοιχειώδους θεωρίας αριθμών) άμεσα διαπιστώνουμε ότι η ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q}_{\frac{m}{p}})$ είναι κυκλική και μάλιστα ότι

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q}_{\frac{m}{p}}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p & , \quad p^2 | m \\ \mathbb{Z}_{p-1} & , \quad p^2 \nmid m \end{cases} .$$

Ορισμός 3.4.19. Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ και $f(\chi)$ ο conductor του χ. Ορίζουμε $\mathcal{D}_\chi$ να είναι το σύνολο των πρώτων διαιρετών του αριθμού $f(\chi)$. Για κάθε $p \in \mathcal{D}_\chi$ συμβολίζουμε με σ_p^χ έναν γεννήτορα της κυκλικής ομάδας $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{p}})$. Σημειωτέον ότι από την 3.4.18 έχουμε ότι

$$\mathrm{ord}\left(\sigma_p^\chi\right) = \begin{cases} p & , \quad p^2 | f(\chi) \\ p-1 & , \quad p^2 \nmid f(\chi) \end{cases} .$$

Λήμμα 3.4.20. *Εάν $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ και $p \in \mathcal{D}_\chi$ τότε $\chi^{\sigma_p^\chi} \neq \chi$.*

Απόδειξη. Εάν ίσχυε ότι $\chi^{\sigma_p^\chi} = \chi$ τότε $\sigma_p^\chi \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}(\chi)\big)$ και άρα η ομάδα $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{p}}\big)$ θα αποτελούσε υποομάδα της $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}(\chi)\big)$. Τούτο όμως σημαίνει ότι $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{p}}$, πράγμα άτοπο διότι ο conductor $f(\chi)$ αποτελεί τον ελάχιστο με αυτή την ιδιότητα. □

Το κλειδί για την απόδειξη του θεωρήματος 3.4.22 αποτελεί η παρακάτω πρόταση. Στο σημείο αυτό σημειώνουμε απλώς ότι η διαφορά δυο χαρακτήρων μιας ομάδας G καλείται γενικευμένος χαρακτήρας.

Πρόταση 3.4.21. *Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Εάν η ομάδα G δεν περιέχει κανένα στοιχείο τάξης $f(\chi)$ τότε υπάρχει πρώτος $p \in \mathcal{D}_\chi$ τέτοιος ώστε $p^2 \nmid f(\chi)$ και*

$$\chi^{\sigma_p^\chi} = \chi^\tau \,, \quad \textit{για κάποιο } \tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p) \,.$$

Απόδειξη. Έστω $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ένας ανάγωγος χαρακτήρας της G και $f(\chi)$ ο conductor του. Επιλέγουμε ένα τυχαίο στοιχείο $g \in G$. Βάσει του λήμματος 3.4.3 ισχύει $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{\mathrm{ord}(g)}$ και επειδή $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\chi)}$, έχουμε ότι

$$\chi(g) \in \mathbb{Q}_{\mathrm{ord}(g)} \cap \mathbb{Q}_{f(\chi)} = \mathbb{Q}_d \,,$$

όπου $d := \gcd\big(f(\chi), \mathrm{ord}(g)\big)$. Εξ υποθέσεως όμως $\mathrm{ord}(g) \neq f(\chi)$ και κατ' επέκτασιν $f(\chi) \nmid \mathrm{ord}(g)$ $\big($εάν ίσχυε $f(\chi) \,|\, \mathrm{ord}(g)$ τότε, ορίζοντας $k := \mathrm{ord}(g)/f(\chi)$, άμεσα θα διαπιστώναμε ότι το στοιχείο $g^k \in G$ θα είχε τάξη $f(\chi)$, πράγμα άτοπο$\big)$. Συνεπώς $d < f(\chi)$ και άρα υπάρχει κάποιος πρώτος $\alpha \in \mathcal{D}_\chi$ (προφανώς εξαρτόμενος από το στοιχείο $g \in G$), έτσι ώστε $d \,|\, \frac{f(\chi)}{\alpha}$. Επομένως, για κάθε $g \in G$, έχουμε ότι

$$\chi(g) \in \mathbb{Q}_{f(\chi)/\alpha} \,, \text{ για κάποιο } \alpha = \alpha(g) \in \mathcal{D}_\chi \,. \tag{3.24}$$

Θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $H := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q})$ καθώς και το υποσύνολο των class functions της G :

$$\mathcal{A} := \sum_{\sigma \in H} \mathbb{Z}\chi^\sigma \,.$$

Για κάθε $\psi \in \mathcal{A}$ και $\sigma \in H$ ορίζουμε "πολλαπλασιασμό" $\psi \cdot \sigma = \psi^\sigma$. Το $\mathcal{A}$ με την εν λόγω πράξη καθίσταται ένα $\mathbb{Z}[H]$ - module. Εάν $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{f(\chi)/\alpha}$, τότε θεωρούμε το γεννήτορα σ_α^χ της κυκλικής ομάδας $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_{f(\chi)/\alpha})$ του ορισμού 3.4.19. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\chi(g)^{\sigma_\alpha^\chi} = \chi(g)$ και άρα $\chi \cdot (1 - \sigma_\alpha^\chi)(g) = 0$. Επειδή, από τη σχέση (3.24), για κάθε $g \in G$ υπάρχει κάποιο τέτοιο $\alpha \in \mathcal{D}_\chi$ έχουμε προφανώς

$$\chi \cdot \prod_{q \in \mathcal{D}_\chi} (1 - \sigma_q^\chi) = 0 \,.$$

Σημειωτέον ότι κάθε $\psi \in \mathcal{A}$ γράφεται ως $\psi = \chi \cdot h$, για κάποιο $h \in \mathbb{Z}[H]$. Επειδή η ομάδα H είναι αβελιανή, εάν $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{f(\chi)/\alpha}$ υπολογίζουμε ότι

$$\big(\psi\cdot(1-\sigma_\alpha^\chi)\big)(g) = \big(\chi\cdot h\cdot(1-\sigma_\alpha^\chi)\big)(g) = \chi\cdot\big((1-\sigma_\alpha^\chi)\cdot h\big)(g) = \big(\chi\cdot(1-\sigma_\alpha^\chi)\big)\cdot h(g) = 0 \,.$$

Συνεπώς

$$\mathcal{A} \cdot \prod_{q \in \mathcal{D}} (1 - \sigma_q^\chi) = 0 \,.$$

Επιλέγουμε υποσύνολο $\widehat{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}_\chi$ ελαχιστοτικό ως προς την ιδιότητα

$$\chi \cdot \prod_{q \in \widehat{\mathcal{D}}} (1 - \sigma_q^\chi) = 0 \, .$$

Επίσης θεωρούμε ως p τον μεγαλύτερο πρώτο εντός του συνόλου $\widehat{\mathcal{D}}$. Αποδεικνύουμε ότι ο συγκεκριμένος πρώτος $p \in \mathcal{D}_\chi$ ικανοποιεί τα ζητούμενα της εκφώνησης. Κατ' αρχάς θέτουμε $\mathcal{D} := \widehat{\mathcal{D}} \setminus \{p\}$ και ορίζουμε τον γενικευμένο χαρακτήρα

$$\Psi := \chi \cdot \prod_{q \in \mathcal{D}} (1 - \sigma_q^\chi) \, . \tag{3.25}$$

Εξ επιλογής του συνόλου $\widehat{\mathcal{D}}$ έχουμε προφανώς ότι $\Psi \neq 0$. Επιπροσθέτως,

$$\Psi \cdot (1 - \sigma_p^\chi) = \chi \cdot \prod_{q \in \widehat{\mathcal{D}}} (1 - \sigma_q^\chi) = 0 \, ,$$

οπότε $0 \neq \Psi = \Psi^{\sigma_p^\chi}$. Από τη σχέση (3.25) διαπιστώνουμε ότι οι ανάγωγες συνιστώσες του $\Psi = \Psi^{\sigma_p^\chi}$ είναι της μορφής $\chi^\mu = \chi^{\nu\sigma_p^\chi}$, όπου

$$\mu, \nu \in \mathcal{B} := \langle \sigma_q^\chi \ : \ q \in \mathcal{D} \rangle \, .$$

Εάν λοιπόν ορίσουμε $\tau := \mu\nu^{-1} \in \mathcal{B}$ τότε έχουμε $\chi^{\sigma_p^\chi} = \chi^\tau$. Απομένει να δείξουμε ότι $p^2 \nmid f(\chi)$ καθώς και ότι $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p)$. Για το πρώτο, ας υποθέσουμε ότι ίσχυε $p^2 \,|\, f(\chi)$. Σύμφωνα με τον ορισμό 3.4.19 στην περίπτωση αυτή θα είχαμε ότι $\mathrm{ord}(\sigma_p^\chi) = p$ και άρα

$$\chi^{\tau^p} = \chi^{(\sigma_p^\chi)^p} = \chi \, . \tag{3.26}$$

Έστω τυχόν $\sigma_q^\chi \in \mathcal{B}$. Κατ' αρχάς, βάσει του ορισμού 3.4.19, $\mathrm{ord}(\sigma_q^\chi) \in \{q, q-1\}$. Επιπροσθέτως, επειδή $q \in \mathcal{D} \subset \widehat{\mathcal{D}}$, εξ επιλογής του πρώτου αριθμού p ισχύει ότι $q < p$. Επομένως $\mathrm{ord}(\sigma_q^\chi) \leq q < p$ για κάθε $\sigma_q^\chi \in \mathcal{B}$. Επειδή το $\tau \in \mathcal{B}$ είναι γινόμενο τέτοιων στοιχείων, έπεται άμεσα ότι $p \nmid \mathrm{ord}(\tau)$. Η σχέση (3.26) σε συνδυασμό με το τελευταίο μας δίνει $\chi = \chi^\tau = \chi^{\sigma_p^\chi}$, πράγμα άτοπο από το λήμμα 3.4.20. Ως προς το ότι $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $q \in \mathcal{D}$, έχουμε $q|f(\chi)$, $p|f(\chi)$ αλλά $q \neq p$, οπότε προφανώς $p \,|\, \frac{f(\chi)}{q}$. Επομένως $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{q}}$ και άρα για κάθε $\sigma_q^\chi \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\sigma_q^\chi \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{q}}\big) \subseteq \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p\big) \, .$$

Κατ' επέκτασιν και ο αυτομορφισμός $\tau \in \mathcal{B}$, ως γινόμενο αυτών, ανήκει πράγματι στην ομάδα $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p\big)$. $\square$

Θεώρημα 3.4.22. *Έστω G μια επιλύσιμη ομάδα και $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $\mathrm{ord}(g) = f(\chi)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η ομάδα G αποτελεί ένα *ελάχιστο αντιπαράδειγμα* στο εν λόγω θεώρημα.

Ισχυρισμός 1 : Ο χαρακτήρας χ οφείλει να είναι primitive.

Πράγματι· έστω ότι υπάρχει κάποια γνήσια υποομάδα $H \subsetneqq G$ και $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ έτσι ώστε $\chi = \psi^G$. Τότε όμως

$$\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\psi^G) \subseteq \mathbb{Q}(\psi) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\psi)} \ ,$$

οπότε κατ' ανάγκην $\mathbb{Q}_{f(\chi)} \subseteq \mathbb{Q}_{f(\psi)}$ και $f(\chi) \,|\, f(\psi)$. Ωστόσο, επειδή η $H \subsetneqq G$ δεν αποτελεί αντιπαράδειγμα στο θεώρημα, υπάρχει κάποιο στοιχείο $h \in H$, τέτοιο ώστε $\mathrm{ord}(h) = f(\psi)$. Επειδή $f(\chi) \,|\, f(\psi)$, ορίζοντας $k := f(\psi)/f(\chi)$ καθώς και $g := h^k \in G$, άμεσα διαπιστώνουμε ότι $\mathrm{ord}(g) = f(\chi)$. Άτοπο, διότι η G αποτελεί αντιπαράδειγμα. $\diamondsuit$

Επειδή η ομάδα G δεν περιέχει εξ υποθέσεως στοιχεία τάξης $f(\chi)$, η πρόταση 3.4.21 μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε έναν πρώτο αριθμό $p \in \mathcal{D}_\chi$, έτσι ώστε $p^2 \nmid f(\chi)$ και $\chi^{\sigma_p^\chi} = \chi^\tau$, για κάποιο $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p)$. Ορίζουμε τα σύνολα $\pi := \{p\}$ και $\pi' := \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Η ομάδα G είναι π - επιλύσιμη και, βάσει του ισχυρισμού 1, ο χαρακτήρας χ είναι primitive. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.6, $\chi = \alpha\beta$, για κάποια $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$.

Ισχυρισμός 2 : Έχουμε ότι $\mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}_{f(\chi)}$.

Πράγματι· εξ ορισμού του conductor αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\chi)$. Επειδή $\chi = \alpha\beta$ ο εγκλεισμός $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)$ είναι προφανής. Από την άλλη, εάν το $\sigma \in \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta) \,/\, \mathbb{Q}(\chi)\big)$ είναι τυχόν, τότε

$$\alpha\beta = \chi = \chi^\sigma = (\alpha\beta)^\sigma = \alpha^\sigma\beta^\sigma \ .$$

Ωστόσο, βάσει της προτάσεως 3.4.8, $\alpha, \alpha^\sigma \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta, \beta^\sigma \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, οπότε η μοναδικότητα της παραγοντοποιήσης του θεωρήματος 3.3.1 μας δίνει $\alpha = \alpha^\sigma$ και $\beta = \beta^\sigma$. Συνεπώς ο σ οφείλει να είναι ο τετριμμένος και κατ' επέκτασιν ισχύει η ισότητα $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\beta)$. $\diamondsuit$

Εν συνεχεία, σταθεροποιούμε μια p - Sylow υποομάδα P της G (εν προκειμένω δηλαδή μια π - Hall υποομάδα) καθώς και μια π' - Hall υποομάδα H της G. Επειδή $\alpha \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, σύμφωνα με την πρόταση 3.4.9 ισχύει

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_P) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(P)} \quad \text{και} \quad \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta_H) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(H)} \ .$$

Ωστόσο, βάσει του ισχυρισμού 2, τόσο το $\mathbb{Q}(\alpha)$ όσο και το $\mathbb{Q}(\beta)$ περιέχονται στο σώμα $\mathbb{Q}_{f(\chi)}$. Επομένως

$$\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(P)} \cap \mathbb{Q}_{f(\chi)} = \mathbb{Q}_{d_1} \quad \text{και} \quad \mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}_{\exp(H)} \cap \mathbb{Q}_{f(\chi)} = \mathbb{Q}_{d_2}$$

όπου $d_1 := \gcd\big(\exp(P), f(\chi)\big)$ και $d_2 := \gcd\big(\exp(H), f(\chi)\big)$. Επειδή η P είναι μια $\{p\}$ - ομάδα, $p \in \mathcal{D}_\chi$ και $p^2 \nmid f(\chi)$, έχουμε άμεσα ότι $d_1 = p$. Επιπροσθέτως, επειδή $p \nmid |H|$, $p \in \mathcal{D}_\chi$ και $p^2 \nmid f(\chi)$, ισχύει προφανώς ότι $d_2 \mid \frac{f(\chi)}{p}$. Συνεπώς

$$\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}_p \quad \text{και} \quad \mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{p}} \ .$$

Θεωρούμε τώρα τον αυτομορφισμό $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_p)$ για τον οποίο $\chi^{\sigma_p^\chi} = \chi^\tau$ (η ύπαρξη του τ είναι εξασφαλισμένη από την επιλογή του πρώτου p και την πρόταση 3.4.21). Κατ' αρχάς, επειδή $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}_p$, έχουμε άμεσα $\alpha^\tau = \alpha$. Από την άλλη,

$$\alpha^{\sigma_p^\chi}\beta^{\sigma_p^\chi} = (\alpha\beta)^{\sigma_p^\chi} = \chi^{\sigma_p^\chi} = \chi^\tau = (\alpha\beta)^\tau = \alpha^\tau\beta^\tau \ .$$

Η πρόταση 3.4.8 ας πληροφορεί ότι $\alpha^{\sigma_p^\chi}, \alpha^\tau \in \mathfrak{X}_\pi(G)$ και $\beta^{\sigma_p^\chi}, \beta^\tau \in \mathfrak{X}_{\pi'}(G)$, οπότε η μοναδικότητα του θεωρήματος 3.3.1 μας δίνει $\beta^\tau = \beta^{\sigma_p^\chi}$. Ωστόσο $\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{p}}$ και $\sigma_p^\chi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{f(\chi)}/\mathbb{Q}_{\frac{f(\chi)}{p}})$, επομένως $\beta^\tau = \beta^{\sigma_p^\chi} = \beta$. Τότε όμως

$$\chi^{\sigma_p^\chi} = \chi^\tau = (\alpha\beta)^\tau = \alpha^\tau\beta^\tau = \alpha\beta = \chi \ ,$$

πράγμα άτοπο, βάσει του λήμματος 3.4.20. □

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με ορισμένες παρατηρήσεις ως προς την αδυναμία επέκτασης των αποτελεσμάτων 3.3.1 και 3.4.17 σε οποιαδήποτε πεπερασμένη ομάδα G. Για τον σκοπό αυτό θας μας φανεί χρήσιμη η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_5$. Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathfrak{A}_5$ διαθέτει πέντε κλάσεις συζυγίας $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_5$ με αντιπροσώπους τις μεταθέσεις 1, (12)(34), (123), (12345) και (13452), αντιστοίχως. Σημειωτέον ότι $|\mathcal{C}_1| = 1$, $|\mathcal{C}_2| = 15$, $|\mathcal{C}_3| = 20$ και $|\mathcal{C}_4| = |\mathcal{C}_5| = 12$. Ο πίνακας των χαρακτήρων της (ο οποίος μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στο [Is1], σελ. 288) είναι ο ακόλουθος :

$\mathfrak{A}_5$	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(13452)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	τ	σ
χ_5	3	-1	0	σ	τ

όπου $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι ο χρυσός λόγος και $\sigma := 1 - \tau$.

Παρατήρηση 3.4.23. Στο θεώρημα 3.3.1 είναι απαραίτητη η συνθήκη της π - διαχωρισιμότητας. Ας υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε για $\pi = \{3\}$ και την απλή ομάδα $G = \mathfrak{A}_5$, η οποία προφανώς δεν είναι π - διαχωρίσιμη. Θεωρούμε τους χαρακτήρες $\chi := \chi_4$ και $\psi := \chi_2$ του παραπάνω πίνακα. Οι χαρακτήρες $\det\chi$ και

$\det\psi$ είναι γραμμικοί και άρα, όπως φαίνεται και από τον πίνακα, κατ' ανάγκην $\det\chi = \det\psi = \chi_1 = 1_{\mathfrak{A}_5}$. Επομένως $o(\chi) = o(\psi) = 1$ και $\chi(1) = 3$, $\psi(1) = 4$, οπότε $\chi \in \mathfrak{X}_\pi(\mathfrak{A}_5)$ και $\psi \in \mathfrak{X}_{\pi'}(\mathfrak{A}_5)$. Ωστόσο οι τιμές του γινομένου $\chi\psi$ είναι οι

$\mathfrak{A}_5$	1	$(12)(34)$	(123)	(12345)	(13452)
$\chi\psi$	12	0	0	$-\tau$	$-\sigma$

και άρα

$$[\chi\psi, \chi\psi] = \frac{1}{60} \cdot \sum_{g \in \mathcal{C}_i} \chi\psi(g) \cdot \overline{\chi\psi(g)} = \frac{1}{60} \cdot \left(12^2 + 12\tau^2 + 12(1-\tau)^2\right) = 3 \, .$$

Σύμφωνα λοιπόν με το λήμμα 1.4.5 έχουμε ότι $\chi\psi \notin \mathrm{Irr}(\mathfrak{A}_5)$.

Σημείωση 3.4.24. Στο θεώρημα 3.4.17 η συνθήκη της επιλυσιμότητας είναι απαραίτητη. Ας υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε και πάλι με την μη επιλύσιμη ομάδα $\mathfrak{A}_5$ και ας θεωρήσουμε τον χαρακτήρα $\chi := \chi_4$. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, οι τιμές του χ είναι είτε ρητές είτε τα $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sigma := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ οπότε $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Επιπροσθέτως επειδή, ως γνωστόν, ισχύει ότι

$$\tau = 1 + \zeta + \zeta^4 \quad \text{και} \quad \sigma = 1 + \zeta^2 + \zeta^3 \, ,$$

όπου $\zeta := \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}}$, άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι ο conductor $f(\chi)$ του χ οφείλει να είναι 5. Επειδή $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}_5$, $[\mathbb{Q}_5 : \mathbb{Q}] = \phi(5) = 4$ και $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$ έχουμε ότι

$$[\mathbb{Q}_{f(\chi)} : \mathbb{Q}(\chi)] = [\mathbb{Q}_5 : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2 \, .$$

Ωστόσο $\chi(1) = 3$ και άρα $[\mathbb{Q}_{f(\chi)} : \mathbb{Q}(\chi)] \nmid \chi(1)$.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[CR] C. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, John Wiley & Sons, 1962.

[Ga] D. Gajendragadkar, A Characteristic Class of Characters of Finite π-separable Groups, *J. Algebra* **59** (1979) 237 - 259.

[Hu] B. Huppert, *Character Theory of Finite Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.

[Is1] I.M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1976.

[Is2] I.M. Isaacs, Characters of π - Separable Groups, *J. Algebra* **86** (1984) p. 98 - 128.

[JL] G. James and M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press, 2001.

[MW] O. Manz and T. Wolf, *Representations of Solvable Groups*, Cambridge University Press, 1993.

[Na] G. Navarro, *Characters and Blocks of Finite Groups*, Cambridge University Press, 1998.

[Su] M. Suzuki, *Group Theory II*, Springer-Verlag, 1986.

[We] S. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups : Algebra and Arithmetic*, American Mathematical Society, 2003.