

Μεταπτυχιακή Εργασία
Ηράκλειο Κρήτης, Φεβρουάριος 2008

**Στατιστικές Μέθοδοι Χαρακτηρισμού
Ακουστικού Σήματος με Εφαρμογές σε
Αντίστροφα Προβλήματα Ακουστικής Διάδοσης**

Σμαραγδάκης Κώστας

Επιβλέπων : Ταρουδάκης Μιχάλης



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Κατεύθυνση : Μαθηματική Προσομοίωση και Τεχνικές Υπολογισμού

Την εργασία την αφιερώνω στην Ειρήνη

Η μεταπτυχιακή εργασία κατατέθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Φεβρουάριο του 2008. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Μιχάλης Ταρουδάκης. Την επιτροπή αξιολόγησης αποτελούσαν οι : Γ. Μακράκης , Ε. Σκαρσουλής και ο Μ. Ταρουδάκης.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Ευθύ και Αντίστροφο Πρόβλημα Ακουστικής Διάδοσης σε Θαλάσσιο Κυματοδηγό	9
2.1	Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα	9
2.2	Το Ευθύ Πρόβλημα	11
2.2.1	Το Πρόβλημα Βάθους	13
2.2.2	Υπολογισμός των Ιδιομορφών	14
2.2.3	Ακουστική Πίεση που Δημιουργείται από Γκαου- σιανή Πηγή	15
2.3	Το Αντίστροφο Πρόβλημα	15
2.3.1	Μοντελοποίηση του Αντίστροφου Προβλήματος .	16
2.3.2	Το Αντίστροφο Πρόβλημα Ακουστικής Διάδοσης .	17
2.4	Αντιστροφή με Χρήση Στατιστικών Χαρακτηριστικών των Συντελεστών του Μετασχηματισμού Κυματιδίων	19
3	Στατιστικός Χαρακτηρισμός Ακουστικού Σήματος	23
3.1	Ο Μετασχηματισμός Κυματιδίων	23
3.2	Ανάλυση Σήματος σε Επίπεδα	25
3.3	Χαρακτηρισμός Ακουστικού Σήματος με χρήση Συμμε- τρικών Άλφα Ευσταθών Κατανομών	29
3.4	Kullback - Leibler Divergence (KLD)	33
3.5	Απόσταση Ακουστικών Σημάτων D_s	35
3.6	Ευσαιθησία της D_s σε Μεταβολές των Παραμέτρων . . .	36
4	Γενετικοί Αλγόριθμοι	39
4.1	Βασικά Στοιχεία	39
4.2	Ανάλυση Γενετικών Αλγορίθμων	40

4.3	Εφαρμογή των Γενετικών Αλγορίθμων στο Αντίστροφο Πρόβλημα Ακουστικής διάδοσης	42
4.4	Εκ των Υστέρων Στατιστική Κατανομή Πληθυσμού	43
5	Παραδείγματα Αντιστροφής	45
5.1	Παράδειγμα 1	45
5.2	Παράδειγμα 2	48
6	Συμπεράσματα	51

1

Εισαγωγή

Στόχος της μεταπτυχιακής εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας αντιστροφής ακουστικών μετρήσεων για την ανάκτηση κρίσιμων ποσοτήτων οι οποίες περιγράφουν ένα θαλάσσιο περιβάλλον.

Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για την αντιστροφή θα είναι μη γραμμικό και η διαδικασία αντιστροφής θα αναχθεί σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) μιας αντικειμενικής συνάρτησης.

Ως δεδομένα της αντιστροφής θα χρησιμοποιήσουμε στατιστικά χαρακτηριστικά του ακουστικού σήματος. Συγκεκριμένα θα χαρακτηρίσουμε το ακουστικό σήμα με ένα σύνολο από τις στατιστικές παραμέτρους μιας κατάλληλης στατιστικής κατανομής η οποία θα προσεγγίζει τις εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές των συντελεστών του μετασχηματισμού κυματιδίων του σήματος.

Η μέθοδος αυτή έχει παρουσιασθεί στις εργασίες [1] και [2] και η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια συνέχειάς τους. Το νέο στοιχείο της παρούσας εργασίας είναι η μέθοδος βελτιστοποίησης. Στην εργασία [2] χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των Νευρωνικών Δυκτίων για την εκτίμηση των παραμέτρων ενώ εδώ η αντίστοιχη διαδικασία θα γίνει με τους γενετικούς αλγόριθμους, οι οποίοι είναι καταλληλότεροι από τα Νευρωνικά Δύκτια στην αντιμετώπιση πολυδιάστατων προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος εφαρμόζεται σε προβλήματα ακουστικής τομογραφίας όπου στόχος είναι η μελέτη των μεταβολών στο θαλάσσιο περιβάλλον. Επίσης βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα μελέτης της ποιότητας του πυθμένα.

Με την παρούσα μέθοδο βελτιστοποίησης θα προσπαθήσουμε να ανακτήσουμε ταυτόχρονα μεγάλο αριθμό παραμέτρων του θαλάσσιου περιβάλλοντος

Δομή της Εργασίας :

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα ακουστικής διάδοσης. Επιπλέον περιγράφεται με συντομία η διαδικασία που θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια.

Στην αρχή του τρίτου κεφαλαίου θα δούμε αρκετά αναλυτικά τον μετασχηματισμό κυματιδίων και τον τρόπο με τον οποίο ένα σήμα αναλύεται σε επίπεδα συχνότητας. Θα ακολουθήσει η περιγραφή των Συμμετρικών Άλφα Ευσταθών κατανομών και το πως αυτές θα προσεγγίσουν καλά τις εκ των υστέρων κατανομές των συντελεστών του μετασχηματισμού κυματιδίων του σήματος. Τέλος θα ορισθεί μια συνάρτηση που θα εκφράζει απόσταση δύο ακουστικών σημάτων και η οποία θα αποτελέσει στη συνέχεια την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τους γενετικούς αλγόριθμους και τον τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν στο αντίστροφο πρόβλημα ακουστικής διάδοσης καθώς και την μέθοδο παρουσίασης των αποτελεσμάτων με εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές.

Τέλος στο πέμπτο και έκτο κεφάλαιο θα δούμε παραδείγματα αντιστροφής και συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτά για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

2

Ευθύ και Αντίστροφο Πρόβλημα Ακουστικής Διάδοσης σε Θαλάσσιο Κυματοδηγό

2.1 Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Με το όρο σύστημα στη θεωρία διάδοσης σημάτων εννοούμε τη διαδικασία κατά την οποία ένα σήμα το οποίο παράγεται από μια πηγή μετασχηματίζεται από το περιβάλλον του. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε εν συντομία τα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα τα οποία χρειαζόμαστε στην μοντελοποίηση του προβλήματος ακουστικής διάδοσης. Στην περίπτωση μας το αρχικό σήμα (σήμα εισόδου) θα είναι ένα ελεγχόμενο σήμα που θα παραχθεί από μια υποβρύχια ακουστική πηγή και η έξοδος θα είναι το σήμα (σήμα εξόδου) που εκφράζει την μεταβολή της πίεσης σε ένα σημείο μακριά από την πηγή, το οποίο θα καταγράψει ένας δέκτης.

Ένα σύστημα ορίζεται μαθηματικά με ένα τελεστή [3], ο οποίος απεικονίζει το σήμα εισόδου $x(t)$ σε ένα σήμα εξόδου $y(t)$, δηλαδή

$$T : x \rightarrow y \quad (2.1)$$

Τα συστήματα που θα μας απασχολίσουν σε αυτή την εργασία θα είναι γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα και αιτιατά.

- **Γραμμικότητα** : Εάν $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$ και $y_2(t) = T\{x_2(t)\}$ τότε

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.2)$$

- **Χρονικά Αναλλοίωτο** : Εάν $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$ και $y(t) = T\{x(t)\}$, τότε εάν

$$x_1(t) = x(t - t_0) \implies y_1(t) = y(t - t_0) \quad (2.3)$$

όπου $t_0 \in \mathbb{R}$

• **Αιτιατότητα** : Εάν $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$ και $y_2(t) = T\{x_2(t)\}$ τότε

$$x_1(t) = x_2(t), t \leq t_0 \implies y_1(t) = y_2(t), t \leq t_0 \quad (2.4)$$

όπου $t_0 \in \mathbb{R}$

Μοναδιαία Απόκριση : Για κάθε σήμα $x(t)$ ισχύει

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(k)\delta(t-k)dk = x(t) * \delta(t) \quad (2.5)$$

όπου δ η συνάρτηση Dirac . Για την έξοδο y του συστήματος έχουμε

$$y(t) = T\{x(t)\} = T\left\{\int_{\mathbb{R}} x(k)\delta(t-k)dk\right\} = \int_{\mathbb{R}} x(k)T\{\delta(t-k)\}dk \quad (2.6)$$

ορίζουμε την ποσότητα $h(t) = T\{\delta(t)\}$ και την ονομάζουμε **μοναδιαία απόκριση** του συστήματος. Οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2.7)$$

Μετασχηματισμός Fourier : Έστω $x(t)$ σήμα πεπερασμένης ενέργειας, ο μετασχηματισμός του δίνεται από τη σχέση

$$X(\omega) = \mathbb{F}(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-i\omega t)dt \quad (2.8)$$

και μεταφέρει το σήμα από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Ανακτάμε το σήμα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$x(t) = \mathbb{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp(i\omega t)d\omega \quad (2.9)$$

Θεώρημα 2.1.1 Εάν $y(t) = x(t) * h(t)$ τότε

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (2.10)$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier : Για κάθε $x[n], n = 0, \dots, N-1$ διακριτό σήμα στο πεδίο του χρόνου ορίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος μας δίνει το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων

$$X(\omega_i) = D\mathbb{F}(x[n], n = 0, \dots, N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\omega_i n\right), i = 0, \dots, N \quad (2.11)$$

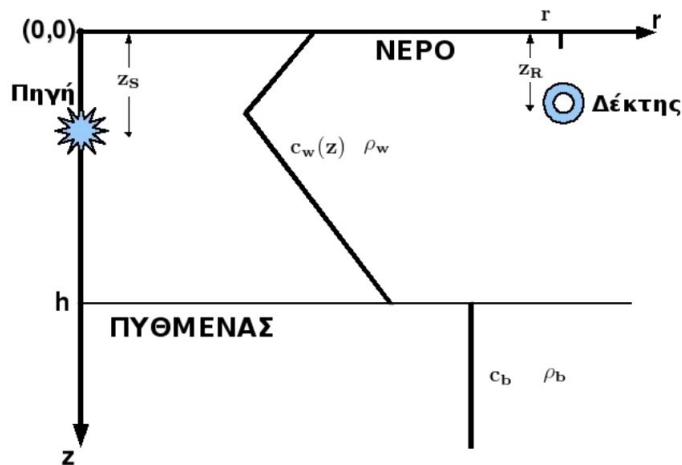
Ανακτάμε το σήμα με τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier που ορίζεται από τη σχέση

$$x[n] = D\mathbb{F}(X(\omega_i), i = 0, \dots, N-1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(\omega_i) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\omega_i n\right), n = 0, \dots, N \quad (2.12)$$

2.2 Το Ευθύ Πρόβλημα

Με τον όρο “Ευθύ Πρόβλημα” στη μαθηματική προσομοίωση χαρακτηρίζουμε ένα πρόβλημα μέσα από το οποίο υπολογίζουμε συναρτήσεις που εκφράζουν κρίσιμες φυσικές ποσότητες όταν είναι γνωστές μονοσήμαντα κάποιες βασικές παράμετροι του προβλήματος. Για να λύσουμε το ευθύ πρόβλημα χρειάζεται να ορίσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα. Το μαθηματικό μοντέλο αποτελείται από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων, οι παράμετροι των οποίων περιγράφουν το φυσικό περιβάλλον. Στα περισσότερα προβλήματα λόγω της πολυπλοκότητας των φυσικών νόμων το μοντέλο που ορίζουμε δεν είναι το πραγματικό, δηλαδή δεν περιγράφει ακριβώς το φυσικό μοντέλο αλλά το προσεγγίζει πολύ καλά με βάση παρατηρήσεις. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε το ευθύ πρόβλημα ακουστικής διαδοχής σε θαλάσσιο περιβάλλον.

Θεωρούμε Θαλάσσιο περιβάλλον (Σχήμα 2.1) το οποίο αποτελείται από νερό βά-



Σχήμα 2.1: Το Θαλάσσιο Περιβάλλον

θους h ($0 \leq z \leq h$) σταθερής πυκνότητας ρ_w (συνήθως $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$) στο οποίο η διάδοση του ήχου γίνεται με ταχύτητα $c_w(z)$ και από ημίαιπρο πυθμένα $z \geq h$ με σταθερή πυκνότητα $\rho_b > \rho_w$ στον οποίο η διάδοση του ήχου γίνεται με σταθερή ταχύτητα c_b , για την οποία συνήθως ισχύει $c_b > \max_{z \in [0, h]} \{c_w(z)\}$.

Στο σημείο $(0, z_S)$ τοποθετούμε σημειακή πηγή και στο (r, z_R) δέκτη. Ονομάζουμε ακουστική πίεση σε ένα σημείο (z, r) του θαλάσσιου περιβάλλοντος την διαταραχή της πίεσης λόγω της ύπαρξης της πηγής και την συμβολίζουμε με P στην περίπτωση της αρμονικής πηγής. Η πίεση είναι συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων, δηλαδή $P(\mathbf{x})$. Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από αξονική συμμετρία με τον άξονα να διέρχεται από την θέση της πηγής.

Η ακουστική πίεση στο πεδίο των συχνοτήτων ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz η οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες και δεδομένης της αξονικής συμμετρίας του προβλήματος γράφεται [4]

$$\frac{\partial^2 P(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P(r, z)}{\partial r} + k^2(z) \frac{\partial^2 P(r, z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_S) \quad (2.13)$$

όπου $k(z) = \omega/c(z)$ κυματάριθμος και ω η κυκλική συχνότητα της αρμονικής πηγής.

Ορίζουμε $P_w(r, z)$, $P_b(r, z)$ τους κλάδους της ακουστικής πίεσης στο νερό και τον πυθμένα αντίστοιχα, δηλαδή

$$P_w(r, z) = P(r, z), 0 \leq z \leq h \quad (2.14)$$

$$P_b(r, z) = P(r, z), z \geq h \quad (2.15)$$

Συνοριακές Συνθήκες : Οι συνοριακές συνθήκες καθορίζονται από την φυσική του προβλήματος και είναι :

- Μηδενική ακουστική πίεση στην επιφάνεια

$$P_w(r, 0) = 0, \forall r \in [0, \infty) \quad (2.16)$$

- Μηδενική ακουστική πίεση σε άπειρο βάθος

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_b(r, z) = 0, \forall r \in [0, \infty) \quad (2.17)$$

- Συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) P = 0 \quad (2.18)$$

Η συνθήκη αυτή εκφράζει ότι το άπειρο δεν επανακτινοβολεί ενέργεια.

Συνθήκες στη Διεπιφάνεια $z = h$:

- Συνέχεια της ακουστικής πίεσης

$$P_w(r, h) = P_b(r, h), \forall r \in [0, \infty) \quad (2.19)$$

- Συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του νερού και του πυθμένα, η οποία είναι ανάλογη της κάθετης παραγώγου της πίεσης

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_w}{\partial z}(r, h) = \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial P_b}{\partial z}(r, h), \forall r \in [0, \infty) \quad (2.20)$$

2.2.1 Το Πρόβλημα Βάθους

Ονομάζουμε πρόβλημα βάθους το πρόβλημα Sturm - Liouville (S-L) [5] που περιγράφεται από τις σχέσεις [4]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z) + (k^2 - \lambda)u(z) = 0 \quad (2.21)$$

$$u_w(0) = 0 \quad (2.22)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 0 \quad (2.23)$$

$$u_w(h) = u_b(h) \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial z} u_w(h) = \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial}{\partial z} u_b(h) \quad (2.25)$$

όπου $u_w(z) = u(z), 0 \leq z \leq h$ και $u_b = u(z), z \geq h$

Δεδομένου ότι το παραπάνω πρόβλημα ορίζεται σε ημιάπειρο χωρίο, είναι ιδιόμορφο. Για ιδιόμορφα προβλήματα ίσχυει το θεώρημα αναπαράστασης που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.2.1 Έστω $\{u_n(z)\}_{n=1}^N, \{u(z, \lambda), \lambda \in S\}$ οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στο διακριτό και συνεχές φάσμα ιδιοτιμών αντίστοιχα ενός προβλήματος (S-L) το οποίο είναι ορισμένο σε ένα διάστημα (a, b) . Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος S-L και έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο στο (a, b) , μπορεί να προσεγγιστεί από την παρακάτω παράσταση [4]

$$f(z) = \sum_{n=1}^N A_n u_n(z) + \int_S b(\lambda) u(z, \lambda) d\lambda \quad (2.26)$$

όπου $A_n \in \mathbb{R}, n = 1, \dots, N$ σταθερές και όπου b συνάρτηση από το S στο \mathbb{R} .

Η ακουστική πίεση είναι συνεχής συνάρτηση του z στο διάστημα $[0, \infty)$ με τμηματικά συνεχή παράγωγο και επιπλέον ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος βάθους, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.2.1.

Έστω $u_1(z), \dots, u_N(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ και $u(z; \lambda)$ οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στα $\lambda \in S$, όπου S το συνεχές φάσμα των ιδιοτιμών του προβλήματος, τότε

$$P(r, z) = \sum_{n=1}^N A_n(r) u_n(z) + \int_S b(\lambda, r) u(z; \lambda) d\lambda \quad (2.27)$$

ο όρος $\int_S b(\lambda, r) u(z; \lambda) d\lambda$ εκφράζει ενέργεια που εισέρχεται στον πυθμένα και δεν συνεισφέρει στο ακουστικό πεδίο μακριά από την πηγή [4] και κατά συνέπεια μπορεί να παραλειφθεί, άρα

$$P(r, z) \approx \sum_{n=1}^N A_n(r) u_n(z) \quad (2.28)$$

Τα $\{u_n(z)\}_{n=1}^N$ ονομάζονται **normal modes** και τα $\{A_n(r)\}$ **ιδιομορφές**. Ο υπολογισμός των normal modes θα προκύψει αριθμητικά, στην περίπτωση που η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι γνωστή συνάρτηση του z

2.2.2 Υπολογισμός των Ιδιομορφών

Αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση (2.28) στην (2.13) και χρησιμοποιήσουμε την ορθοκανονικότητα των ιδιοσυναρτήσεων παίρνουμε την σχέση

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{A_n(r)\rho_w}{u_n(z_s)} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{A_n(r)\rho_w}{u_n(z_s)} \right) + \lambda_n \left(\frac{A_n(r)\rho_w}{u_n(z_s)} \right) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (2.29)$$

Ορίζουμε

$$g_n = \frac{A_n(r)\rho_w}{u_n(z_s)} \quad (2.30)$$

η οποία είναι η συνάρτηση Green της εξίσωσης. Έτσι η (2.29) γράφεται

$$\frac{d^2}{dz^2} g_n(r, z_s) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} g_n(r, z_s) + \lambda_n g_n(r, z_s) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (2.31)$$

Λύνοντας την (2.31) χρησιμοποιώντας την συνθήκη της πηγής

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \frac{dg_n(\varepsilon; z_s)}{dr} \right) = -\frac{1}{2\pi r} \quad (2.32)$$

και την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld στη μορφή

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\frac{dg_n}{dr} - i\sqrt{\lambda_n} g_n \right) = 0 \quad (2.33)$$

για μονοδιάστατο πρόβλημα διάδοσης παίρνουμε [4]

$$g_n(r; z_s) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) \quad (2.34)$$

όπου $H_0^{(1)}$ η συνάρτηση Hankel 1^{ov} είδους. Άρα

$$A_n(r, z_s) = \frac{i}{4\rho_w} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) \quad (2.35)$$

οπότε η ακουστική πίεση γράφεται

$$P(r, z) = \frac{i}{4\rho_w} \sum_{n=1}^N H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) u_n(z_s) u_n(z) = \sum_{n=1}^N P_n(r, z) \quad (2.36)$$

Ασυμπτωτικά όταν $x \gg 1$ ισχύει για την εξίσωση Hankel

$$H_0^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (2.37)$$

Άρα μακριά από την πηγή η ακουστική πίεση του σημείου (r, z) στο πεδίο των συχνοτήτων υπολογίζεται από τη σχέση

$$P(r, z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi\rho(z_s)}} \sum_{n=1}^N \frac{u_n(z_s)u_n(z)}{\sqrt{\lambda_n}} e^{i\sqrt{\lambda_n} r} \quad (2.38)$$

2.2.3 Ακουστική Πίεση που Δημιουργείται από Γκαουσιανή Πηγή

Αν αντικαταστήσουμε τη σημειακή αρμονική πηγή με σημειακή Γκαουσιανή η οποία εκφράζεται στο πεδίο συχνοτήτων από την σχέση [6]

$$S(\omega) = \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}4\pi\right) \quad (2.39)$$

όπου ω_0 η κεντρική συχνότητα και $\Delta\omega$ το εύρος συχνότητας, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση p που προκαλεί αυτή η πηγή χρησιμοποιώντας την έκφραση της ακουστικής πίεσης P που αντιστοιχεί στην περίπτωση της αρμονικής πηγής που παρουσιάστηκε παραπάνω. Η P αποτελεί την μοναδιαία απόκριση του συστήματος και με βάση την θεωρία των γραμμικών φίλτρων παίρνουμε

$$p(r, z; \omega) = P(r, z; \omega)S(\omega) \quad (2.40)$$

Στις πρακτικές εφαρμογές και λόγω της ψηφιοποίησης των σημάτων απαιτείται ο υπολογισμός του σήματος σε διακριτό πεδίο χρόνου - συχνότητας. Για τον λόγο αυτό διαμερίζουμε ομοιόμορφα το διάστημα $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ με κόμβους $\omega_i, i = 1, \dots, M$ και υπολογίζουμε

$$p(r, z; \omega_i) = P(r, z; \omega_i)S(\omega_i), i = 1, \dots, M \quad (2.41)$$

Τώρα μπορούμε να πάρουμε διακριτή προσέγγιση $s[n], n = 1, \dots, N$ του ακουστικού σήματος που θα φτάσει στο δέκτη περνώντας από το πεδίο του συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου με τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier

$$s[n] = p(r, z; t_n) = DF^{-1}[p(r, z; \omega_i)], n = 1, \dots, N \quad (2.42)$$

Σε αυτή την εργασία το σήμα s υπολογίζεται με την βοήθεια του προγράμματος "model" [7].

2.3 Το Αντίστροφο Πρόβλημα

Τον όρο "Αντίστροφο Πρόβλημα" τον χρησιμοποιούμε για να ονομάσουμε την αντίστροφη διαδικασία του ευθύ προβλήματος. Στο αντίστροφο πρόβλημα ξεκινάμε με αποτελέσματα μετρήσεων της φυσικής ποσότητας που αποτελεί την άγνωστη συνάρτηση του ευθύ μοντέλου τα οποία αποτελούν τα **δεδομένα** του αντίστροφου προβλήματος και παίρνουμε εκτιμήσεις των **παραμέτρων** του μαθηματικού μοντέλου οι οποίες εκφράζουν συνήθως γεωμετρικά ή φυσικά χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος.

2.3.1 Μοντελοποίηση του Αντίστροφου Προβλήματος

Αρχικά θα περιγράψουμε τα δεδομένα του αντίστροφου προβλήματος, τα οποία αποτελούν συνιστώσες ενός διανύσματος διάστασης N , όπου N το πλήθος των μετρήσεων. Το διάνυσμα των δεδομένων το συμβολίζουμε με \mathbf{d} , δηλαδή

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T \quad (2.43)$$

όπου με T συμβολίζουμε τον ανάστροφο ενός πίνακα. Όμοια, οι παράμετροι του μοντέλου μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα διάνυσμα διάστασης M , όπου M το πλήθος των παραμέτρων. Το διάνυσμα των παραμέτρων το συμβολίζουμε με \mathbf{m} , δηλαδή

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_M]^T \quad (2.44)$$

Το μαθηματικό μοντέλο συσχετίζει τα δεδομένα του προβλήματος και τις παραμέτρους με μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N * \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^L$, όπου L φυσικός αριθμός. Την συνάρτηση \mathbf{f} την συναντάμε συνήθως σε μη γραμμική, πεπλεγμένη μορφή και το αντίστροφο πρόβλημα περιγράφεται από την εξίσωση [8]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 \quad (2.45)$$

Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις στις οποίες η συνάρτηση \mathbf{f} έχει πιο απλή μορφή και κατά συνέπεια η διαδικασία αντιστροφής απλοποιείται. Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή τέτοιων περιπτώσεων τις οποίες συναντάμε σε αντίστροφα προβλήματα.

Έμμεση Γραμμική Μορφή : Η συνάρτηση \mathbf{f} είναι γραμμική ως προς \mathbf{d} και \mathbf{m} επομένως το αντίστροφο πρόβλημα εκφράζεται σαν μια εξίσωση πινάκων, δηλαδή

$$\mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

όπου \mathbf{F} ένας πίνακας διάστασης $L * (N + M)$.

Άμεση Μορφή : Σε μερικά προβλήματα είναι δυνατόν να διαχωρισθούν τα δεδομένα από τις παραμέτρους του μοντέλου. Έαν η εξίσωση είναι γραμμική ως προς τα δεδομένα το αντίστροφο πρόβλημα εκφράζεται από την εξίσωση

$$\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) = 0 \iff \mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{d} \quad (2.47)$$

όπου g διανυσματική συνάρτηση διάστασης N η οποία είναι εν γένει μη γραμμική. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $L = N$.

Άμεση Γραμμική Μορφή : Σ' αυτή την περίπτωση η g της παραπάνω περιγραφής είναι γραμμική ως προς \mathbf{m} , άρα η (2.47) μπορεί να γραφτεί στη μορφή :

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (2.48)$$

όπου \mathbf{G} πίνακας διάστασης $N * M$.

- **Καλά Ορισμένο Πρόβλημα** : Όταν το πλήθος των παραμέτρων είναι ίσο με το πλήθος των δεδομένων και επιπλέον υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα G τότε η εκτίμηση των παραμέτρων δίνεται από την σχέση :

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d} \quad (2.49)$$

- **Υπό-Ορισμένο Πρόβλημα** : Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των παραμέτρων του προβλήματος είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των δεδομένων, δηλαδή $N > M$. Η εκτίμηση των παραμέτρων δίνεται με την μέθοδο του ελάχιστου μήκους λύσης. από την σχέση :

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}\mathbf{d} \quad (2.50)$$

- **Υπέρ-Ορισμένο Πρόβλημα** : Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των παραμέτρων είναι μεγαλύτερος από αυτό των δεδομένων, δηλαδή $M > N$. Εδώ χρησιμοποιούμε την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων που δίνεται από την σχέση :

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} \quad (2.51)$$

2.3.2 Το Αντίστροφο Πρόβλημα Ακουστικής Διάδοσης

Η ανάκτηση των περιβαλλοντικών παραμέτρων του θαλάσσιου περιβάλλοντος καθώς και των παραμέτρων θέσης της ακουστικής πηγής αποτελούν τα κύρια αντικείμενα των αντίστροφων προβλημάτων υποβρυχίας ακουστικής. Θεωρούμε το θαλάσσιο περιβάλλον του σχήματος (2.2). Στο σημείο $(0, z_S)$ υπάρχει σημειακή Γκαουσιανή Πήγη, η οποία περιγράφεται από τη σχέση (2.39) και στο σημείο (r, z_R) δέκτης. Σε αυτό το σημείο θα περιγράψουμε με συντομία μοντέλα που εφαρμόζονται για την αντιστροφή προβλημάτων ακουστικής διάδοσης τα οποία χωρίζονται σε δύο ομάδες, τα γραμμικά και τα μη γραμμικά. Τυπικά στα γραμμικά μοντέλα η προς ανάκτηση παράμετρος θα είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου που χαρακτηρίζει ένα μέσο ακουστικής διάδοσης.

1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Ακολουθεί σύντομη παρουσίαση αντιπροσωπευτικών μεθόδων γραμμικών μοντέλων αντιστροφής, οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί στην αντιστροφή προβλημάτων ακουστικής διάδοσης σε θαλάσσιο περιβάλλον [9]

- **Αντιστροφή με Θεωρία Ακτίνων** : Αρχικά, η θαλάσσια ακουστική βασιζόταν στη θεωρία ακτίνων. Σε αυτή την μέθοδο, ο χρόνος ταξιδιού των ακτίνων από την πηγή στο δέκτη δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες για τον υπολογισμό του προφίλ ταχύτητας. Γραμμικοποιώντας το πρόβλημα ως προς ένα γνωστό περιβάλλον αναφοράς παίρνουμε ότι η μεταβολή του χρόνου ταξιδιού μιας

ορισμένης ακτίνας Γ_i συνδέεται με την μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης του ήχου από την έκφραση

$$\delta\tau_i = \int_{\Gamma_i} \frac{\delta c(\mathbf{x})}{c_0^2(\mathbf{x})} ds \quad (2.52)$$

όπου c_0 είναι η ταχύτητα του ήχου στο περιβάλλον αναφοράς. Παίρνοντας N μετρήσεις και χρησιμοποιώντας κάποιον κανόνα ολοκλήρωσης μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε την παραπάνω σχέση καταλήγοντας σε ένα σύστημα άμεσης γραμμικής μορφής.

$$G\delta\mathbf{C} = \delta\mathbf{T} \quad (2.53)$$

Αντιστρέφοντας το γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα που πρόκειται, έχουμε το προφίλ ταχύτητας κατά μήκος των ακτίνων και κατά επέκταση το προφίλ ταχύτητας σε διάφορα βάθη.

- **Αντιστροφή με Θεωρία Διάδοσης Κυματοπακέτων :** Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε τους χρόνους μεταφοράς κυματοπακέτων από την πηγή στο δέκτη για τη διαδικασία αντιστροφής. Αυτή η προσέγγιση είναι καταλληλότερη για περιοχές όπου έχουμε ρηχή θάλασσα. Η ταχύτητα ομάδας ενός κυματοπακέτου ορίζεται ως [6]

$$\nu_{gn} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_n} \right|_{\omega_0} \quad (2.54)$$

όπου k_n είναι η ιδιοτιμή n τάξης του προβλήματος βάθους. Η παρακάτω σχέση συνδέει την μεταβολή από το περιβάλλον αναφοράς του χρόνου διάδοσης ενός κυματοπακέτου με την αντίστοιχη της ταχύτητας διάδοσης του ήχου

$$\delta\tau_n = \int_S \left. \frac{\partial Q_n}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \delta c(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.55)$$

όπου S είναι η περιοχή στην οποία η ταχύτητα διάδοσης του ήχου αποκλίνει από αυτή του περιβάλλοντος αναφοράς και η ποσότητα Q_n εξαρτάται από τις παραμέτρους του περιβάλλοντος αναφοράς. Παίρνοντας N μετρήσεις και χρησιμοποιώντας κάποιο αριθμητικό κανόνα ολοκλήρωσης καταλήγουμε όπως και στην προηγούμενη μέθοδο σε ένα διακριτό αντίστροφο πρόβλημα.

2. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Στις παραπάνω μεθόδους προκύπτουν διακριτά αντίστροφα προβλήματα τα οποία απαιτούν γνώση του περιβάλλοντος αναφοράς. Όταν δεν έχουμε εκ των προτέρων πληροφορίες για τις παραμέτρους του θαλάσσιου περιβάλλοντος, το μοντέλο δεν γραμμικοποιείται, επομένως σε αυτή την περίπτωση έχουμε να λύσουμε μη γραμμικά αντίστροφα προβλήματα.

Η αντιστροφή στα μη γραμμικά μοντέλα γίνεται ορίζοντας προβλήματα βελτιστοποίησης ως προς τις άγνωστες παραμέτρους του περιβάλλοντος. Πρόβλημα βελτιστοποίησης ονομάζουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης.

Η αντικειμενική συνάρτηση f συνδέει το διάνυσμα των παραμέτρων \mathbf{m} με τις παρατηρήσεις, με τέτοιο τρόπο ώστε η f να λαμβάνει ολικό ακρότατο όταν οι παράμετροι παίρνουν τις πραγματικές τιμές τους, δηλαδή

$$\mathbf{m}^{true} = \arg \min_{\mathbf{m}} f(\mathbf{m}) \quad (2.56)$$

στην περίπτωση του προβλήματος ελαχιστοποίησης, και

$$\mathbf{m}^{true} = \arg \max_{\mathbf{m}} f(\mathbf{m}) \quad (2.57)$$

στην περίπτωση προβλήματος μεγιστοποίησης.

Εσωτερικά η f περιέχει τη διαδικασία επίλυσης του ευθέως προβλήματος, καθώς αντιπροσωπεύει ένα μέτρο που δηλώνει κατά πόσο τα αποτελέσματα του ευθέως προβλήματος ταιριάζουν με τις πειραματικές μετρήσεις, επομένως ο υπολογισμός των αποτελεσμάτων του ευθέως προβλήματος για κάθε διάνυσμα \mathbf{m} ενός χώρου αναζήτησης είναι αναγκαίως.

Εάν και ως ιδέα είναι απλή, η υλοποίηση τέτοιων μεθόδων είναι δύσκολη, λόγω της απαίτησης επίλυσης του ευθέως προβλήματος πολλές φορές. Για τον λόγο αυτό χρειαζόμαστε κατάλληλους αλγόριθμους που έχουν την ιδιότητα να μεταφέρουν την αναζήτηση σε περιοχές στις οποίες υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να περιέχονται οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Τέτοιοι αλγόριθμοι είναι τα νευρωνικά δίκτυα και οι γεννητικοί αλγόριθμοι που έχουν χρησιμοποιηθεί και οι δύο στην αντιστροφή του προβλήματος ακουστικής διάδοσης.

Σε αυτή την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό τύπο δεδομένων. Τα δεδομένα θα αποτελούνται από ένα σύνολο στατιστικών παραμέτρων, κατάλληλων στατιστικών κατανομών. Οι κατανομές αυτές θα προσεγγίζουν τις εκ των υστέρων κατανομές ενός συνόλου συντελεστών που θα προκύψουν μετά από κατάλληλο μετασχηματισμό του ακουστικού σήματος.

Πλεονεκτήματα της Χρήσης των Νέων Δεδομένων :

- Η μόνη γνώση που χρειαζόμαστε για την αντιστροφή είναι το σήμα αναφοράς, το οποίο είναι εύκολο να καταγραφεί.
- Το σήμα αναφοράς έχει την απαιτούμενη ευαισθησία σε αλλαγές των παραμέτρων του περιβάλλοντος [1].

Το ακουστικό σήμα που λαμβάνει ο δέκτης το συμβολίζουμε με S_{obs} , ενώ με $S_{\mathbf{m}}$ συμβολίζουμε την λύση του ευθέως προβλήματος για δεδομένο διάνυσμα παραμέτρων \mathbf{m} .

2.4 Αντιστροφή με Χρήση Στατιστικών Χαρακτηριστικών των Συντελεστών του Μετασχηματισμού Κυματιδίων

Για την διαδικασία της αντιστροφής θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλο μετασχηματισμό του σήματος, ο οποίος θα μας δώσει τη δυνατότητα χαρακτηρισμού του

μέσω στατιστικών κατανομών των αντίστοιχων συντελεστών του. Ακολουθώντας την πρακτική που εφαρμόζεται στη επεξεργασία εικόνας [13] χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό κυματιδίων (wavelet transform).

Αρχικά το ακουστικό σήμα θα αναλυθεί σε διάφορα επίπεδα συχνοτήτων με χρήση ενός πολλαπλών επιπέδων μονοδιάστατου διακριτού μετασχηματισμού κυματιδίων (multilevel discrete wavelet transform) για τον οποίο έχει δειχθεί ότι μπορεί να χαρακτηρίσει πολύ καλά τα ακουστικά σήματα και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αντίστροφα προβλήματα ακουστικής διάδοσης. Ο μετασχηματισμός κυματιδίων λειτουργεί ως εξής [10],[11] :

Ξεκινά με ένα διακριτό σήμα $s[n], n = 1, \dots, N$ όπου N δυναμική του 2, το οποίο προκύπτει με διακριτοποίηση ενός ακουστικού σήματος $s(t)$ και υπολογίζει την πρώτη κλίμακα του συμβολισμού η οποία αποτελείται από δύο διανύσματα \mathbf{a}_1 και \mathbf{d}_1 (διακριτά σήματα) διάστασης $N/2$ το καθένα. Αυτά τα διανύσματα προκύπτουν με συνέλιξη του σήματος με κατάλληλα διακριτά φίλτρα και έπειτα υπο-δειγματοληψία (downsample). Το \mathbf{a}_1 προκύπτει από το πέρασμα του σήματος από ένα κατάλληλο βαθυπερατό (low - pass) φίλτρο L και ονομάζεται **διάνυσμα συντελεστών προσέγγισης** πρώτης τάξης ενώ το \mathbf{d}_1 προκύπτει από το πέρασμα του σήματος από ένα κατάλληλο υψηπερατό (high - pass) φίλτρο H και ονομάζεται **διάνυσμα συντελεστών λεπτομέρειας** πρώτης τάξης. Στο δεύτερο επίπεδο του συμβολισμού το διάνυσμα \mathbf{a}_1 των συντελεστών προσέγγισης πρώτης τάξης παίζει το ρόλο του σήματος $s[n]$ στον υπολογισμό του πρώτου επιπέδου και θα αναλυθεί σε δύο διανύσματα συντελεστών διάστασης $N/2^2$, το διάνυσμα συντελεστών προσέγγισης δεύτερης τάξης \mathbf{a}_2 και το διάνυσμα συντελεστών λεπτομέρειας δεύτερης τάξης \mathbf{d}_2 . Η διαδικασία θα συνεχιστεί με τον ίδιο τρόπο μέχρι το L -επίπεδο του συμβολισμού, όπου L φυσικός αριθμός, στο οποίο θα αναλυθεί το διάνυσμα των συντελεστών προσέγγισης $L - 1$ τάξης \mathbf{a}_{L-1} στα διανύσματα συντελεστών \mathbf{a}_L και \mathbf{d}_L διάστασης $N/2^L$. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο το σήμα $s[n]$ μπορεί να ανακτηθεί από τα διανύσματα $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_L$ και \mathbf{a}_L .

Παρατήρηση : Για να αναλύσουμε το σήμα σε L - επίπεδα θα πρέπει να επιλέξουμε το N ώστε $N = 2^\lambda$, όπου $\lambda \geq L$.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει ο στατιστικός χαρακτηρισμός των συντελεστών. Αρχικά θα σχηματίσουμε τις εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές των συντελεστών $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_L, \mathbf{a}_L$ και θα προσεγγίσουμε κάθε μια από αυτές με μια κατανομή η οποία θα ανοίκει σε μια οικογένεια στατιστικών κατανομών που θα επιλέξουμε στη συνέχεια.

Τέλος θα χρειαστεί να ορίσουμε μια συνάρτηση απόστασης δύο στατιστικών κατανομών Φ_1 και Φ_2 την οποία θα συμβολίσουμε με $D(\Phi_1||\Phi_2)$. Σε αυτή την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την **Kullback Leibler Divergence (KLD)** [12] την οποία θα περιγράψουμε αργότερα. Το αντίστροφο πρόβλημα θα μπορούσε να εκφραστεί ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων \mathbf{m} , μιας συνάρτησης D_s η οποία θα οριστεί μέσο της KLD .

Ορισμός Απόστασης δύο Σημάτων : Ορίζουμε ως απόσταση δύο σημάτων την ποσότητα

$$D_s(S_1, S_2) = \sum_{k=0}^L D(\Phi_1^k || \Phi_2^k) \quad (2.58)$$

όπου $\Phi_j^0, j = 1, 2$ η κατανομή που προσεγγίζει τη στατιστική κατανομή του διανύσματος των συντελεστών προσέγγισης L τάξης του σήματος j και όπου $\Phi_j^k, j = 1, 2, k = 1, \dots, L$ η κατανομή που προσεγγίζει τη στατιστική κατανομή του διανύσματος λεπτομέρειας L τάξης του σήματος j .

Χώρος Αναζήτησης : Θα γίνει αναζήτηση καθε παραμέτρου $m_j, j = 1, \dots, M$ σε ένα διάστημα $[a_j, b_j]$. Θεωρούμε ως πιθανές τιμές της m_j τους αριθμούς $m_j^{k_j}, k_j = 1, \dots, q_j$ όπου $q_j \in \mathbb{N}$, οι οποίοι διαμερίζουν το διάστημα $[a_j, b_j]$. Σχηματίζουμε το χώρο αναζήτησης A ως εξής :

$$A = \{\mathbf{m}_{k_1, k_2, \dots, k_M} = (m_1^{k_1}, m_2^{k_2}, \dots, m_M^{k_M}) | k_j = 1, \dots, q_j, j = 1, \dots, M\} \quad (2.59)$$

Διαδικασία Αντιστροφής : Το σύνολο A αποτελείται από $q = \prod_{j=1}^M q_j$ διανύσματα παραμέτρων. Στην διαδικασία της αντιστροφής υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $D_s(S_{obs}, S_{\mathbf{m}})$ για κάθε $\mathbf{m} \in A$ και διαλέγουμε ως βέλτιστη τιμή του \mathbf{m} το $\mathbf{m}^{est} \in A$ για το οποίο ισχύει

$$D_s(S_{obs}, S_{\mathbf{m}^{est}}) \leq D_s(S_{obs}, S_{\mathbf{m}}), \forall \mathbf{m} \in A \quad (2.60)$$

Χρόνος Αντιστροφής : Στη διαδικασία αντιστροφής υπολογίζουμε τη συνάρτηση D_s για όλα τα $\mathbf{m} \in A$, δηλαδή λύνουμε το ευθύ πρόβλημα q φορές. Όταν ο αριθμός M των αγνώστων παραμέτρων είναι μεγάλος τότε το q γίνεται πολύ μεγάλο και η αντιστροφή απαιτεί πολύ χρόνο. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $M = 6$ αγνωστες παραμέτρους και επιλέγουμε $q_1 = q_2 = \dots = q_6 = 50$ γνωρίζοντας ότι η λύση του ευθύ προβλήματος από το πρόγραμμα 'MODE1' χρειάζεται περίπου 8 δευτερόλεπτα, η διαδικασία αντιστροφής θα διαρκίσει περίπου 4.000 χρόνια !

Αντιστροφή με Γενετικούς Αλγορίθμους : Λόγω του μεγάλου χρόνου που απαιτεί η προηγούμενη μέθοδος αντιστροφής, χρειαζόμαστε μια περισσότερο έξυπνη μέθοδο η οποία δεν θα απαιτεί την λύση του ευθύ προβλήματος για όλα τα $\mathbf{m} \in A$. Παλαιότερα το πρόβλημα όπως περιγράφεται είχε αντιστραφεί με επιτυχία με χρήση νευρωνικών δικτύων [2]. Στην εργασία αυτή η αντιστροφή του προβλήματος ακουστικής διάδοσης θα γίνει με την βοήθεια των γενετικών αλγορίθμων που παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο. Με τους γενετικούς αλγορίθμους θα αντιστρέψουμε το αντίστροφο πρόβλημα ακουστικής διάδοσης αποτελεσματικά σε μερικές ώρες.

3

Στατιστικός Χαρακτηρισμός Ακουστικού Σήματος

3.1 Ο Μετασχηματισμός Κυματιδίων

Ορισμός 3.1.1 Έαν μια συνάρτηση $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ ικανοποιεί την συνθήκη

$$C_\Psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (3.1)$$

όπου $\hat{\Psi}$ ο μετασχηματισμός Fourier της Ψ και επιπλέον ικανοποιεί την σχέση κανονικοποίησης

$$\int_{\mathbb{R}} |\Psi(t)|^2 dt = 1 \quad (3.2)$$

τότε ονομάζεται **κυματίδιο (wavelet)**.

Παρατήρηση : $C_\Psi < \infty \Rightarrow \hat{\Psi}(0) = 0 \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0 \quad (3.3)$$

Ορισμός 3.1.2 Ο Συνεχής Μετασχηματισμός κυματιδίων της συνάρτησης $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ως προς το wavelet $\Psi(t)$ σε χρόνο u και κλίμακα s ορίζεται ως εξής [10],[11] :

$$W_\Psi f(u, s) = \langle f, \Psi_{u,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad (3.4)$$

Όσο μικρότερο είναι το s τόσο περισσότερη πληροφορία έχουμε για τις διαταραχές υψηλής συχνότητας της f

Πρόταση 3.1.1 Μπορούμε να ανακτήσουμε κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{R})$ από τον κυματιδικό μετασχηματισμό της, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό κυματιδίων

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\Psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (3.5)$$

Όταν ο μετασχηματισμός Wavelet της f είναι γνωστός μόνο για $s < s_0$, όπου $s_0 > 0$, τότε για να ανακτήσουμε την f χρειαζόμαστε μια πληροφορία που θα αντιστοιχεί στις τιμές $W_\Psi f(u, s)$ για $s \geq s_0$. Γι' αυτή την πληροφορία θα χρειαστεί η **συναρτηση κλίμακας (scaling function) Φ** , η οποία ορίζεται μέσω της Ψ από την παρακάτω εξίσωση [10]

$$|\hat{\Phi}(\omega)|^2 = \int_1^\infty |\hat{\Psi}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s} = \int_\omega^\infty \frac{|\hat{\Psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \quad (3.6)$$

Η Φ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt = 1 \quad (3.7)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi(t)|^2 dt = 1 \quad (3.8)$$

Εάν η $f(t)$ εκφράζει ένα συνεχές σήμα τότε η συνάρτηση κλίμακας μπορεί να ερμηνευθεί ως η μοναδιαία απόκριση ενός βαθυπεράτου φίλτρου αρκεί να ορίσουμε τις ποσότητες

$$\Phi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Phi\left(\frac{t}{s}\right) \quad (3.9)$$

και

$$\bar{\Phi}_s(t) = \Phi_s^*(-t) \quad (3.10)$$

όπου Φ_s^* ο μιγαδικός συζυγής του Φ_s .

Πρόταση 3.1.2 Η προσέγγιση χαμηλών συχνοτήτων του σήματος f στην κλίμακα s_0 δίνεται από την σχέση:

$$L_\Phi f(u, s_0) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s_0}} \Phi\left(\frac{t-u}{s_0}\right) \right\rangle = f * \bar{\Phi}_{s_0}(u) \quad (3.11)$$

Η ποσότητα $L_\Phi f(u, s_0)$ περιέχει όλη την επιπλέον πληροφορία που χρειαζόμαστε.

Πρόταση 3.1.3 Μπορούμε να ανακτήσουμε κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{R})$ γνωρίζοντας την ποσότητα $W_\Psi f(u, s)$ για $s < s_0$ από την σχέση

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^{s_0} W_\Psi f(\cdot, s) * \Psi_s(t) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_\Psi} L_\Phi f(\cdot, s_0) * \Phi_{s_0}(t) \quad (3.12)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της προηγούμενης σχέσης εκφράζει την προσέγγιση των υψηλών συχνοτήτων της f .

3.2 Ανάλυση Σήματος σε Επίπεδα

Ορισμός 3.2.1 Μια ακολουθία $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ από κλειστούς υπόχωρους του $L^2(\mathbb{R})$ καλείται **multi-resolution analysis** εάν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες [10],[11] :

- $$V_j \subset V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

- $$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{Closure}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j\right) = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.14)$$

- $$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (3.15)$$

- $$f(t) \in V_j \iff f(2^j t) \in V_0, \forall j \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

- $$f(t) \in V_0 \iff f(t - n) \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.17)$$

- Υπάρχει συνάρτηση κλίμακας (scaling function) $\phi(t) \in V_0$ τέτοια ώστε η $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ να είναι ορθοκανονική βάση του V_0

Πρόταση 3.2.1 Το σύνολο

$$\{\Phi_{n,j} = 2^{-j/2} \Phi(2^{-j}t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.18)$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του V_j .

Ορισμός 3.2.2 Ορίζουμε ως W_j το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V_j στο V_{j-1} , δηλαδή

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (3.19)$$

Πρόταση 3.2.2

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (3.20)$$

Πρόταση 3.2.3 Το σύνολο

$$\{\Psi_{n,j} = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - n)\}_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.21)$$

όπου $\Psi(t) \in W_0$, είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$, άρα για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ ισχύει

$$f(t) = \sum_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2} C_{n,j} \Psi_{n,j}(t) \quad (3.22)$$

όπου $C_{n,j} = \langle f, \Psi_{n,j} \rangle$.

Από την σχέση (;) ισχύει: Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_{V_j} f = f \quad (3.23)$$

όπου $P_{V_j} f$ η προβολή της f στο χώρο V_j η οποία ορίζεται :

$$P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_j[n; f] \Phi_{n,j}(t) \quad (3.24)$$

με $\mathbf{a}_j[n; f] = \langle f, \Phi_{n,j} \rangle$.

Επίσης η προβολή της f στο χώρο W_j ορίζεται ως :

$$P_{W_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_j[n; f] \Psi_{n,j}(t) \quad (3.25)$$

με $\mathbf{d}_j[n; f] = \langle f, \Psi_{n,j} \rangle$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ έχουμε

$$P_{V_j} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j+1}[n; f] \Phi_{n,j+1}(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_{j+1}[n; f] \Psi_{n,j+1}(t) \quad (3.26)$$

αναδρομικά για $k \in \mathbb{N}$ παίρνουμε

$$P_{V_j} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j+k}[n; f] \Phi_{n,j+k}(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_{j+i}[n; f] \Psi_{n,j+i}(t), \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.27)$$

την παραπάνω σχέση την γράφουμε στη μορφή

$$P_{V_j} = A_k(t) + \sum_{i=1}^k D_i(t), \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.28)$$

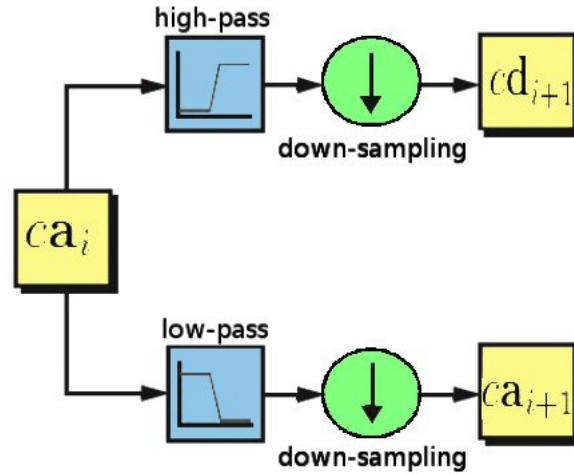
όπου

$$A_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_k[n; f] \Phi_{n,j+k} \quad (3.29)$$

προσέγγιση της f τάξης k (Προσέγγιση Χαμηλών Συχνοτήτων) και όπου

$$D_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_i[n; f] \Psi_{n,j+i} \quad (3.30)$$

λεπτομέρεια της f τάξης i (Προσέγγιση Υψηλών Συχνοτήτων)



Σχήμα 3.1: Περιγραφή της μετάβασης από το επίπεδο i του συμβολισμού στο επίπεδο $i + 1$

Θεώρημα 3.2.1 [10]

$$\mathbf{a}_{j+1}[n; f] = \mathbf{a}_j * L[2n] \quad (3.31)$$

και

$$\mathbf{d}_{j+1}[n; f] = \mathbf{a}_j * H[2n] \quad (3.32)$$

όπου L είναι βαθυπερατό και H υψηπερατό φίλτρο. Επίσης

$$\mathbf{a}_j[n; f] = \mathbf{a}_{j+1}^d * L[n] + \mathbf{d}_{j+1}^d * H[n] \quad (3.33)$$

$$\text{όπου } x^d[n] = \begin{cases} x[p], & n = 2p \\ 0, & n = 2p + 1 \end{cases}$$

Απόδειξη:

Έχουμε $\Phi_{n,j+1} \in V_{j+1} \subset V_j$ και $\{\Phi_{p,j}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ ορθοκανονική βάση του V_j , άρα

$$\phi_{n,j+1} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle \Phi_{n,j+1}, \Phi_{p,j} \rangle \Phi_{p,j} \quad (3.34)$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\langle \Phi_{n,j+1}, \Phi_{p,j} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{t}{2}\right), \Phi(t + (2n - p)) \right\rangle = L[2n - p] \quad (3.35)$$

άρα

$$\Phi_{n,j+1} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} L[2n - p] \Phi_{p,j} \quad (3.36)$$

Παίρνοντας τώρα το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με την f έχουμε

$$\mathbf{a}_{j+1}[n; f] = \langle f, \Phi_{n,j+1} \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} L[2n - p] \mathbf{a}_j[p] = \mathbf{a}_j * L[2n] \quad (3.37)$$

Αντίστοιχα έχουμε $\psi_{n,j+1} \in W_{j+1} \subset V_j$ και

$$\Psi_{n,j+1} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle \Psi_{n,j+1}, \Phi_{p,j} \rangle \Phi_{p,j} \quad (3.38)$$

$$\langle \Psi_{n,j+1}, \Phi_{p,j} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi\left(\frac{t}{2}\right), \Phi(t + (2n - p)) \right\rangle = H[2n - p] \quad (3.39)$$

Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με την f προκύπτει

$$\mathbf{d}_{j+1}[n; f] = \langle f, \Psi_{n,j+1} \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} H[2n - p] \mathbf{a}_j[p] = \mathbf{a}_j * H[2n] \quad (3.40)$$

Ανακατασκευή: Αφού το W_{j+1} είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V_{j+1} στο V_j τότε η ένωση των συνόλων $\{\Psi_{p,j+1}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ και $\{\Phi_{p,j+1}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική βάση του V_j , άρα η $\Phi_{n,j}$ μπορεί να εκφρασθεί ως εξής :

$$\Phi_{n,j} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} L[2p - n] \Phi_{p,j+1} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} H[2p - n] \Psi_{p,j+1} \quad (3.41)$$

παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με f προκύπτει

$$\mathbf{a}_j[n; f] = \mathbf{a}_{j+1}^d * L[n] + \mathbf{d}_{j+1}^d * H[n] \quad (3.42)$$

Αρχικοποίηση : Έστω $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ συνεχές σήμα και $\mathbf{s}[n] = f(nT)$ η διακριτοποίησή του, με $T = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sqrt{2^j}} \mathbf{a}_j[n; f] = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Phi(2^{-j}t - n) dt = \int_{\mathbb{R}} f(2^j t + n2^j) \Phi(t) dt \quad (3.43)$$

Από την $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt = 1$ βλέπουμε ότι το δεξιότερο μέλος της προηγούμενης σχέσης δίνει ένα μέσο όρο της $f(2^j t + n2^j)$ γύρω από το $t = 0$, άρα περιμένουμε

$$\mathbf{s}[n] = f(nT) \approx \frac{1}{\sqrt{2^j}} \mathbf{a}_j[n; f]$$

Αρχικοποιούμε την \mathbf{a}_j ως εξής :

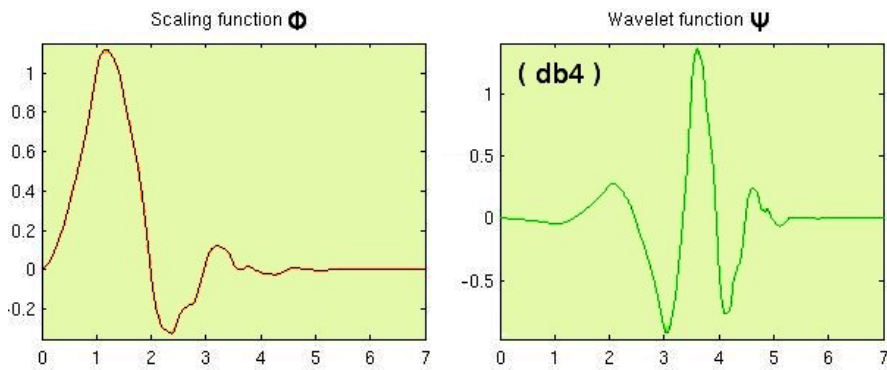
$$\mathbf{a}_j[n; f] = \sqrt{2^j} \mathbf{s}[n] \quad (3.44)$$

Συμβολισμός : Για ευκολία θα γράφουμε $\mathbf{a}_i[n]$ αντί για $\mathbf{a}_{j+i}[n; f]$ και $\mathbf{d}_i[n]$ αντί για $\mathbf{d}_{j+i}[n; f]$, ακόμα θα συμβολίσουμε τη σταθερά $\sqrt{2^j}$ ως $1/c$. Άρα

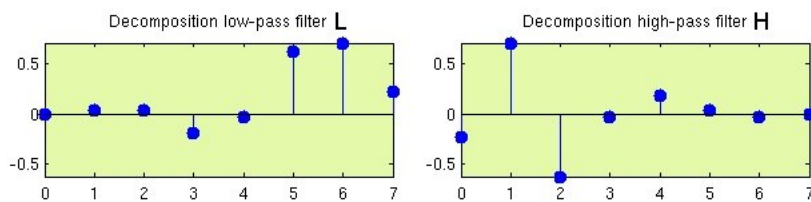
$$\mathbf{s}[n] = c \cdot \mathbf{a}_0[n] \quad (3.45)$$

Τα $\mathbf{a}_i[n]$ ονομάζονται συντελεστές προσέγγισης i τάξης και τα $\mathbf{d}_i[n]$ ονομάζονται συντελεστές λεπτομέρειας i τάξης.

To Wavelet 'db4' : Σε αυτή την εργασία η ανάλυση των ακουστικών σημάτων σε επίπεδα θα γίνει με το wavelet 'db4'. Στο σχήμα (3.2) φαίνονται το wavelet και η συνάρτηση κλίμακας που αντιστοιχούν στο 'db4'. Επίσης στο σχήμα (3.3) περιγράφονται τα διακριτά φίλτρα L και H .



Σχήμα 3.2: Περιγραφή του wavelet 'db4' και της συνάρτησης κλίμακας που του αντιστοιχεί.



Σχήμα 3.3: Βαθυπερατό και Υψηπερατό φίλτρο που αντιστοιχεί στο wavelet 'db4'.

Παράδειγμα 3.2.1 Ανάλυση ενός ακουστικού σήματος (Σχήμα 3.4) σε πέντε επίπεδα με χρήση του Wavelet 'db4'

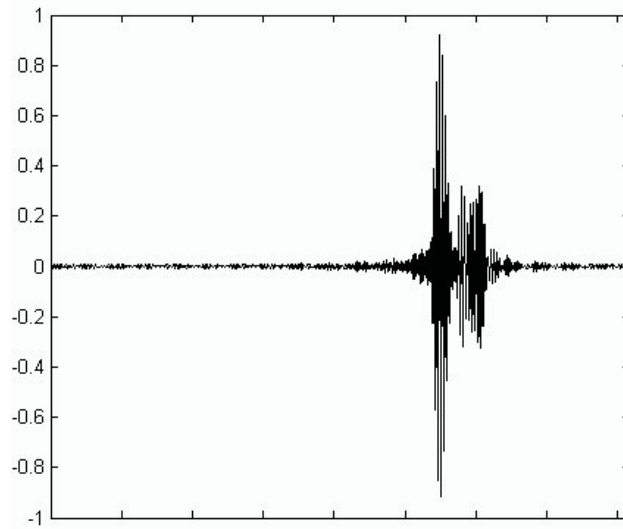
Το αποτέλεσμα της ανάλυσης φαίνεται στο (Σχήμα 3.5) ενώ στο (Σχήμα 3.6) βλέπουμε τους συντελεστές του μετασχηματισμού.

3.3 Χαρακτηρισμός Ακουστικού Σήματος με χρήση Συμμετρικών Άλφα Ευσταθών Κατανομών

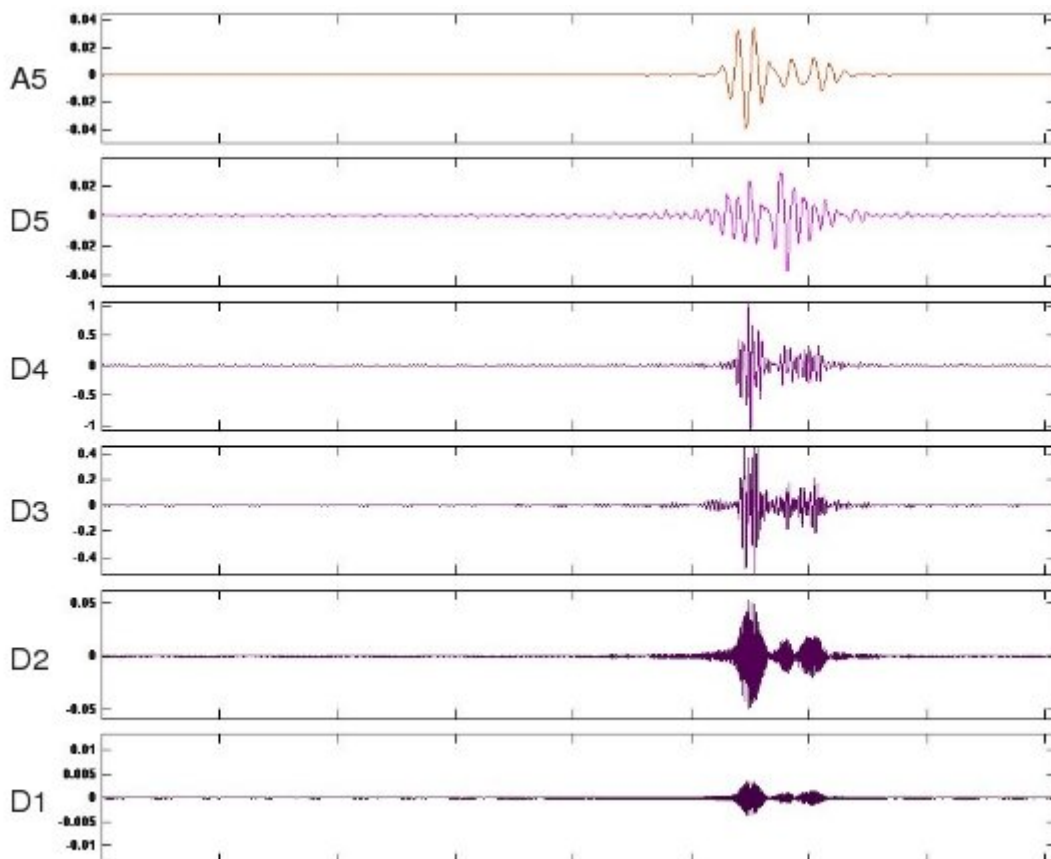
Σε αυτό το σημείο πρέπει να επιλέξουμε τη στατιστική κατανομή την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε τις εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές των συντελεστών του μετασχηματισμού κυματιδίων, του σήματος. Παίρνοντας αφορμή από την αντίστοιχη ανάλυση που χρησιμοποιείται στην επεξεργασία εικόνων [13], ελέγχουμε εάν οι Συμμετρικές Άλφα Ευσταθής Κατανομές (SaS) [14] μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα αντίστροφα προβλήματα ακουστικής διάδοσης. Ο έλεγχος αυτός έχει πραγματοποιηθεί στις εργασίες [1] και [2] και στοιχεία του επαναλαμβάνονται εδώ.

Η μορφή μιας Συμμετρικής Άλφα Ευσταθούς Κατανομής περιγράφεται από τη χαρακτηριστική συνάρτηση

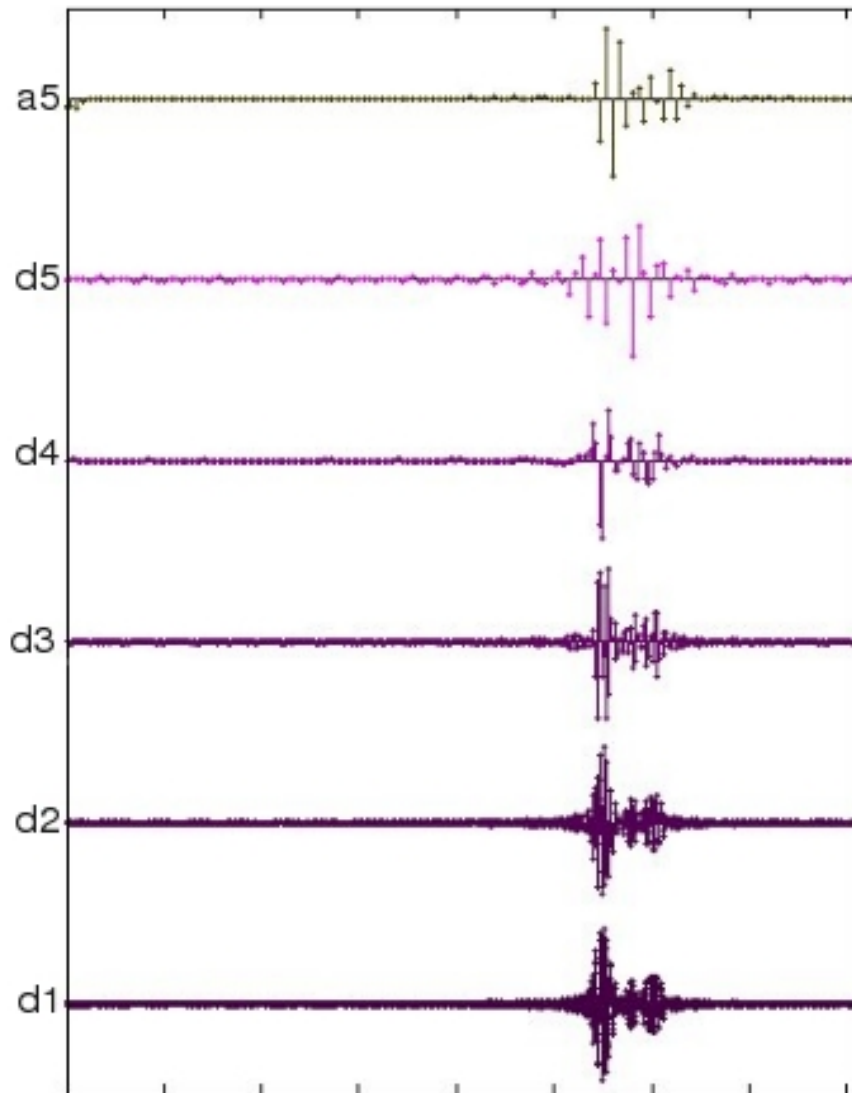
$$\Phi(t) = \exp(i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha) \quad (3.46)$$



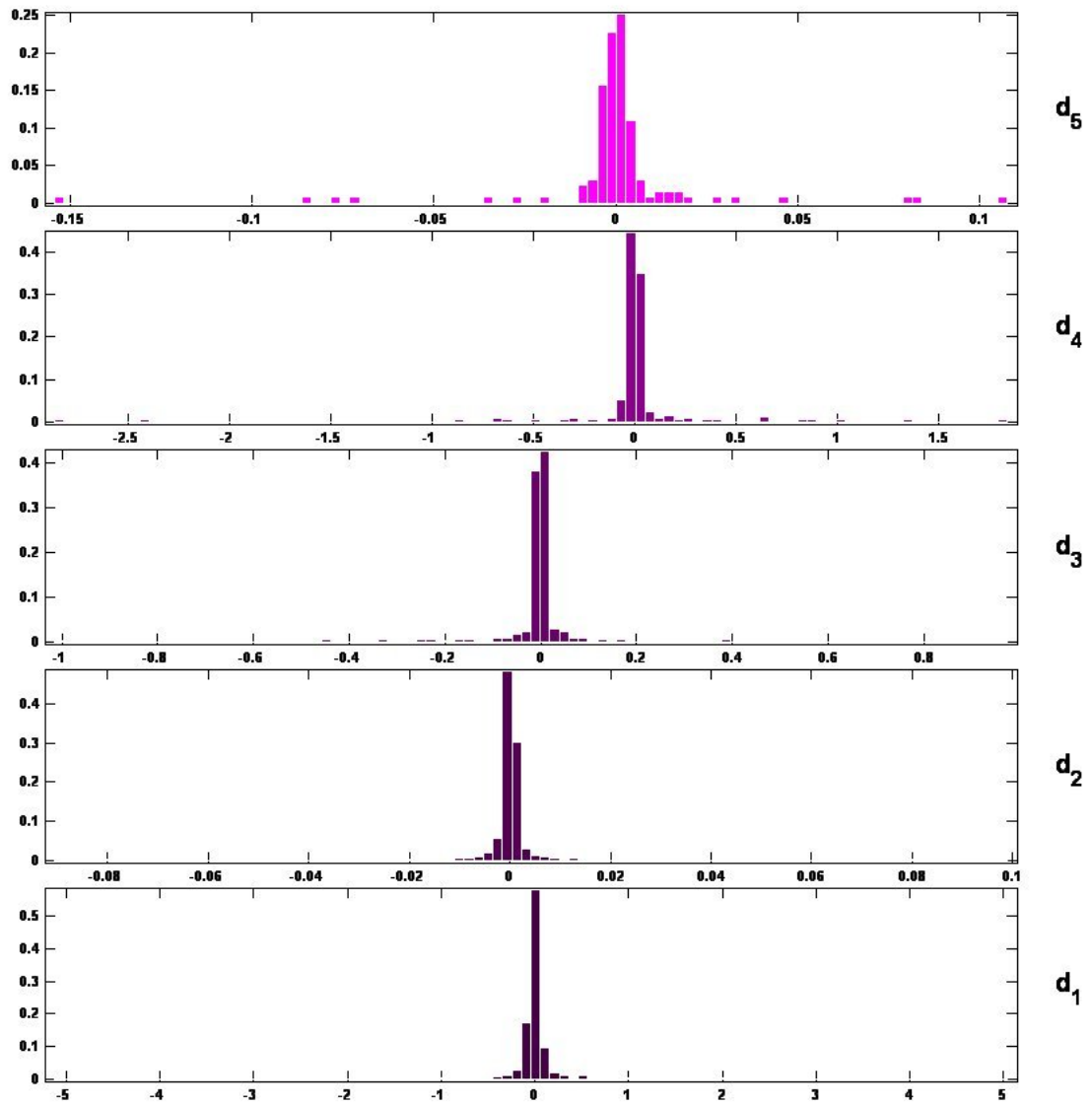
Σχήμα 3.4: Το ακουστικό σήμα του παραδείγματος στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 3.5: Ανάλυση του ακουστικού σήματος του παραδείγματος σε επίπεδα.



Σχήμα 3.6: Συντελεστές του μετασχηματισμού Wavelet του σήματος του παραδείγματος.



Σχήμα 3.7: Ιστογράμματα των συντελεστών λεπτομέρειας του σήματος, του παραδείγματος 3.2.1

όπου $\alpha \in (0, 2]$ ο χαρακτηριστικός εκθέτης, $\delta \in \mathbb{R}$ η παράμετρος θέσης και $\gamma > 0$ η διασπορά της κατανομής [14]. Η παράμετρος α προσδιορίζει την οριακή συμπεριφορά της κατανομής (μικρότερες τιμές, περισσότερο απότομες ουρές) ενώ η παράμετρος γ προσδιορίζει κατά πόσο η κατανομή θα είναι συγκεντρωμένη γύρω από την παράμετρο θέσης δ (μικρότερες τιμές, μεγαλύτερη συγκέντρωση).

Για να ορίσουμε αυστηρά την SaS κατανομή θα χρειαστεί να κανονικοποιήσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση Φ ώστε να πάρουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\hat{\Phi}$, δηλαδή

$$\hat{\Phi}(t) = \frac{\Phi(t)}{c} \quad (3.47)$$

όπου,

$$c = \int_R \Phi(t) dt \quad (3.48)$$

για $\delta = 0$ η σταθερά c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{2\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\alpha\gamma} \quad (3.49)$$

όπου Γ η συνάρτηση Γάμμα. Σε αντίθεση με την Γκαουσιανή κατανομή η οποία φθίνει εκθετικά η SaS φθίνει αλγεβρικά, δηλαδή, $P(X > x) \rightarrow cX^{-\alpha}$ καθώς $x \rightarrow \infty$, όπου c σταθερά που εξαρτάται από τα α και γ .

Παρατήρηση : Η Σχέση (3.3) δείχνει ότι η μέση τιμή κάθε wavelet είναι ίση με το μηδέν. Αυτή η πληροφορία είναι ικανή να εξασφαλίσει ότι όλες οι κατανομές των συντελεστών του μετασχηματισμού θα είναι συγκεντρωμένες γύρω από το μηδέν, δηλαδή $\delta = 0$.

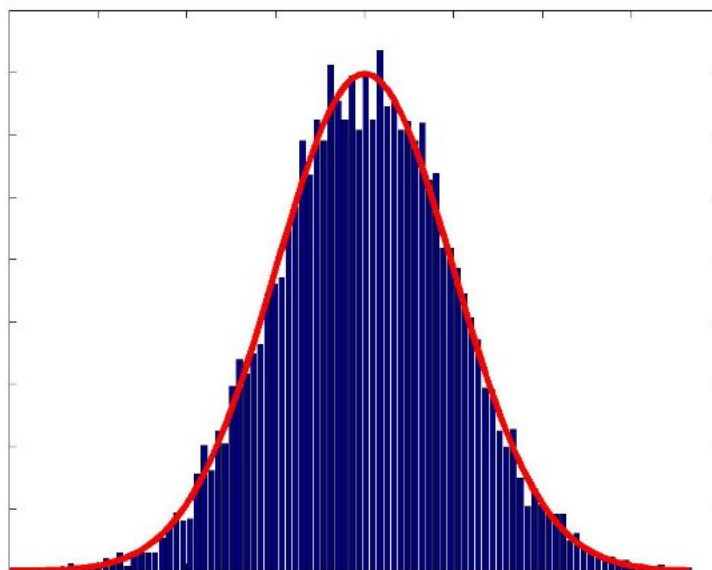
Όπως είδαμε προηγουμένως κάθε ακουστικό σήμα μπορεί να χαρακτηριστεί από τους συντελεστές $\mathbf{a}_L[n], \mathbf{d}_1[n], \dots, \mathbf{d}_L[n], L \in \mathbb{N}$ ενός μετασχηματισμού wavelet. Παίρνοντας τη στατιστική κάθε ενός από τους συντελεστές, προκύπτουν $L + 1$ στατιστικές κατανομές (στο σχήμα 3.7 φαίνονται τα ιστογράμματα των συντελεστών λεπτομέρειας του παραδείγματος).

Θα προσεγγίσουμε κάθε μια από αυτές τις κατάνομες με μια κατανομή SaS, έτσι το σήμα S περιγράφεται από $L + 1$ ζευγάρια αριθμών $\{(\alpha_0, \gamma_0), \dots, (\alpha_L, \gamma_L)\}$ όπου (α_i, γ_i) είναι οι εκτιμήτριες των παραμέτρων της κατανομής SaS που αντιστοιχούν, για $i = 0$ στους συντελεστές προσέγγισης L τάξης και για $i = 1, \dots, L$ στους συντελεστές λεπτομέρειας i τάξης.

Η διαδικασία προσέγγισης μιας κατανομής από κατανομή SaS γίνεται με χρήση της μεθόδου της εκτιμήτριας μεγίστης πιθανοφάνειας και περιγράφεται από τον Nolan [14].

3.4 Kullback - Leibler Divergence (KLD)

Έστω $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ περιέχει N ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός πειράματος με κατανομή $p_q(\mathbf{x})$ και K στατιστικές κατανομές $p_i(\mathbf{x}), i \in S$ όπου $S = \{1, 2, \dots, K\}$.



Σχήμα 3.8: Παράδειγμα προσέγγισης μιας εκ των υστέρων κατανομής ενός συντελεστή λεπτομέρειας από μια SaS .

Θέλουμε να αποφασίσουμε ποια κατανομή $p_s, s \in S$ έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να προσεγγίζει καλύτερα την p_q για δεδομένο \mathbf{X} . Θα χρειαστούμε μια συνάρτηση απόφασης g η οποία θα παίρνει ως όρισμα το \mathbf{X} και θα δίνει την τιμή $s \in S$ του δεικτι που αντιστοιχεί στη βέλτιστη προσέγγιση p_s . Έχει δεικτεί [15] ότι η βέλτιστη επιλογή της g είναι η συνάρτηση του Bayes (Maximum A-Posteriory) η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$g(\mathbf{X}) = \arg \max_i P(s = i | \mathbf{X}) \quad (3.50)$$

ή

$$g(\mathbf{X}) = \arg \max_i (p(\mathbf{X} | s = i) P(s = i)) \quad (3.51)$$

όπου $p(\mathbf{X} | s = i)$ πιθανότητα της p_i κατανομής, και $P(s = i)$ a-priori πιθανότητα

Χωρίς a-priori πληροφορία : $P(s = i) = 1/K, i = 1, \dots, K$

$$g(\mathbf{X}) = \arg \max_i p(\mathbf{X} | s = i) = \arg \max_i \prod_{j=1}^N p(\mathbf{x}_j | s = i) \quad (3.52)$$

Ο λογάριθμος είναι άυξουσα συνάρτηση άρα ισχύει :

$$g(\mathbf{X}) = \arg \max_i \sum_{j=1}^N \log(p(\mathbf{x}_j | s = i)) = \arg \max_i \frac{1}{N} \log(p(\mathbf{x}_j | s = i)) \quad (3.53)$$

για $N \rightarrow \infty$ και εφαρμόζοντας τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε

$$g(\mathbf{X}) \rightarrow \arg \max_i E_{p_q} \{\log p(\mathbf{x})\} = \arg \max_i \int p_q \log p(\mathbf{x}|s=i) d\mathbf{x} \quad (3.54)$$

$$g(\mathbf{X}) \rightarrow \arg \max_i \int p_q(\mathbf{x}) \log p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \arg \min_i \int p_q(\mathbf{x}) \log \frac{p_q(\mathbf{x})}{p_i(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3.55)$$

Ορίζουμε ως **Kullback-Leibler Divergence (KLD)** δυο κατανομών P_q και P_i την ποσότητα

$$D(p_q||p_i) = \int p_q(\mathbf{x}) \log \frac{p_q(\mathbf{x})}{p_i(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3.56)$$

η οποία μας δίνει ενά μέγεθος σύγκρισης των κατανομών p_q και p_i (όσο μικρότερες τιμές της KLD, τόσο περισσότερο η κατανομή p_i προσεγγίζει την p_q) [12],[15]

Πρόταση 3.4.1 Η KLD δύο SaS κατανομών Φ_1, Φ_2 με παραμέτρους $(\alpha_1, \gamma_1, \delta_1 = 0)$, $(\alpha_2, \gamma_2, \delta_2 = 0)$ αντίστοιχα, μπορεί να δοθεί από την παρακάτω κλειστή σχέση :

$$D(\Phi_1||\Phi_2) = \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right) - \frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\alpha_2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_2+1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)} \quad (3.57)$$

όπου Γ η συνάρτηση Γάμμα και

$$c_i = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)}{\alpha_i \gamma_i}, i = 1, 2$$

3.5 Απόσταση Ακουστικών Σημάτων D_s

Έστω S_1, S_2 δύο ακουστικά σήματα τα οποία χαρακτηρίζοντε όπως είδαμε πριν από $L + 1$ Συμμετρικές Άλφα Ευσταθής Κατανομές, δηλαδή

$$S_1 \longleftrightarrow \{\Phi_1^0, \dots, \Phi_1^L\} \longleftrightarrow \{(\alpha_1^0, \gamma_1^0), \dots, (\alpha_1^L, \gamma_1^L)\} \quad (3.58)$$

και

$$S_2 \longleftrightarrow \{\Phi_2^0, \dots, \Phi_2^L\} \longleftrightarrow \{(\alpha_2^0, \gamma_2^0), \dots, (\alpha_2^L, \gamma_2^L)\} \quad (3.59)$$

Ορίσουμε ως **απόσταση των σημάτων** την παρακάτω ποσότητα

$$D_s(S_1, S_2) = \sum_{k=0}^L D(\Phi_1^k||\Phi_2^k) \quad (3.60)$$

όπου $D(\Phi_1^k||\Phi_2^k)$ είναι η KLD των κατανομών Φ_1^k, Φ_2^k η οποία δίνεται από τον κλειστό τύπο (3.57), δηλαδή

$$D_s(S_1, S_2) = \sum_{k=0}^L \left\{ \ln\left(\frac{c_2^k}{c_1^k}\right) - \frac{1}{\alpha_1^k} + \left(\frac{\gamma_2^k}{\gamma_1^k}\right)^{\alpha_2^k} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_2^k+1}{\alpha_1^k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_1^k}\right)} \right\} \quad (3.61)$$

όπου

$$c_i^k = \frac{2\Gamma(\frac{1}{\alpha_i^k})}{\alpha_i^k \gamma_i^k} \quad (3.62)$$

$i = 1, 2$ και $k = 0, \dots, L$

Ισχύουν οι ιδιότητες

- $D_s(S_1, S_2) \geq 0$
- $S_1 = S_2 \iff D_s(S_1, S_2) = 0$

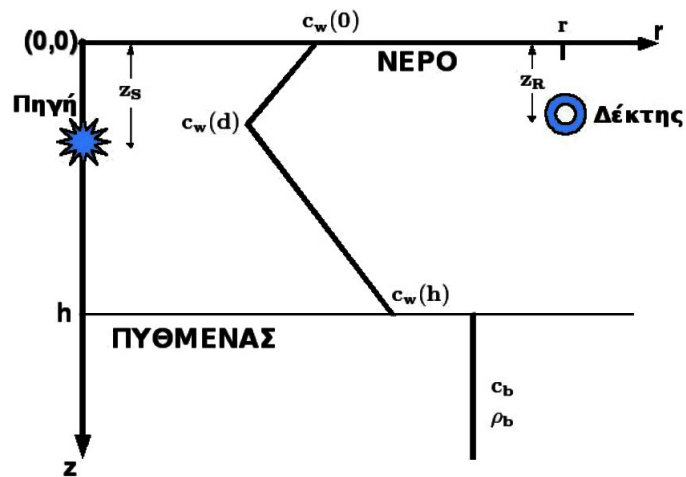
Η D_s δεν ορίζει αυστηρά συνάρτηση απόστασης αφού η KLD δεν είναι απόσταση, καθώς δεν ικανοποιεί την συμμετρική ιδιότητα, δηλαδή $D(P_1||P_2) \neq D(P_2||P_1)$.

3.6 Ευαισθησία της D_s σε Μεταβολές των Παραμέτρων

Έχει δειχθεί ότι η συνάρτηση D_s που ορίσαμε παραπάνω, έχει την απαιτούμενη ευαισθησία ώστε να αποτελέσει συνάρτηση χαρακτηρισμού ακουστικών σημάτων στο νερό [1]. Ακολουθεί παράδειγμα αντιστροφής, στο οποίο φαίνεται η καταλληλότητα της D_s ως αντικειμενική συνάρτηση για αντίστροφα προβλήματα ακουστικής διάδοσης.

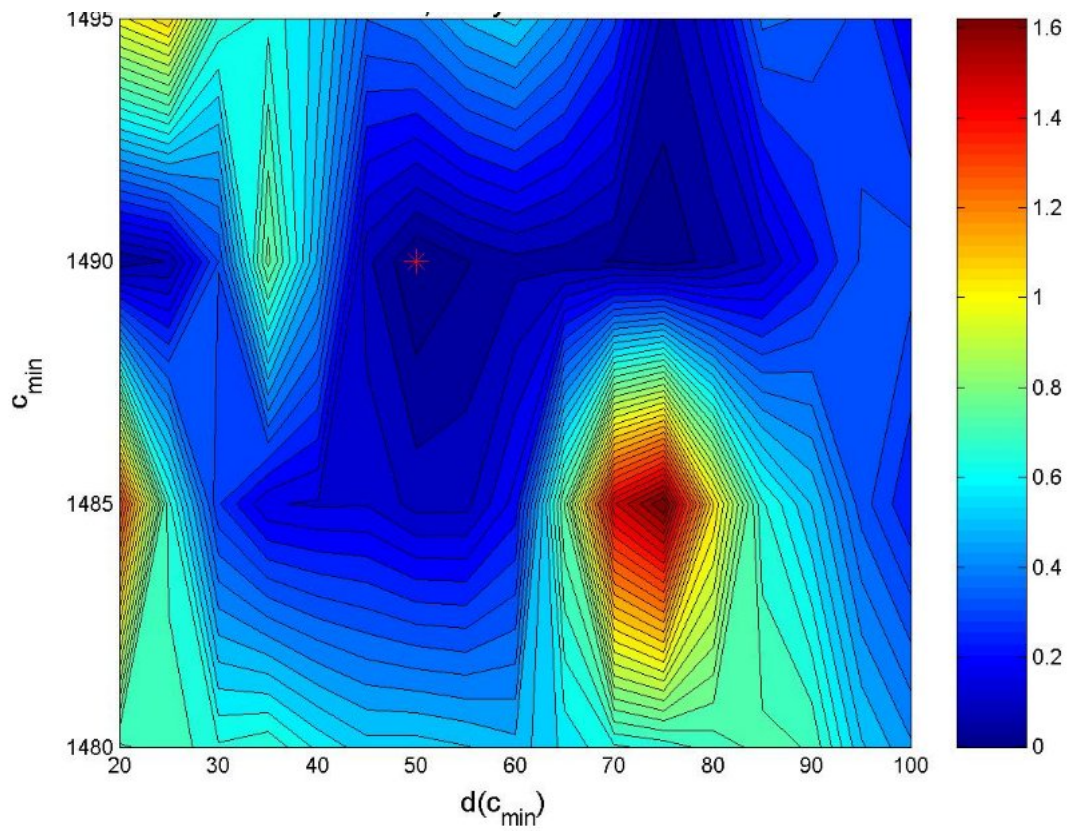
Πίνακας 3.1: Περιγραφή του χώρου αναζήτησης του παραδείγματος 3.6.1.

		Χώρος Αναζήτησης
Βάθος Νερού	h	200 m
Κεντρική Συχνότητα Πηγής	f_o	100 Hz
Εύρος Συχνοτήτων Πηγής	Δf	40 Hz
Ταχύτητα στην Επιφάνεια	$c_w(0)$	1500 m/s
Ελάχιστη Ταχύτητα	$c_w(d)$	[1495, 1505] m/s
Ταχύτητα σε Βάθος h	$c_w(h)$	1515 m/s
Βάθος Ελάχιστης Ταχύτητας	d	[20, 100] m
Πυκνότητα πυθμένα	ρ_b	1150 g/m ³
Ταχύτητα στο Πυθμένα	c_b	1550 m/s



Σχήμα 3.9: Το Θαλάσσιο Περιβάλλον

Παράδειγμα 3.6.1 [1] Θεωρούμε το θαλάσσιο περιβάλλον που περιγράφεται από το Σχήμα 3.9. και τον παραπάνω πίνακα. Πραγματοποιούμε ανάλυση τριών επιπέδων με χρήση του wavelet 'db4'. Θεωρούμε ως προς ανάκτηση παραμέτρους την τιμή της ελάχιστης ταχύτητας $c_{min}(d)$ καθώς και το βάθος d που αυτή παρατηρήτε. Οι πραγματικές τιμές είναι $C_{min}(d) = 1490m/s$ και $d = 50m$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η D_s για διάφορες τιμές των άγνωστων παραμέτρων c_{min} και d . Παρατηρούμε ότι το ελάχιστο της D_s λαμβάνετε σε μια περιοχή που περιέχει τις πραγματικές τιμές.



Σχήμα 3.10: Τιμές της D_s για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

4

Γενετικοί Αλγόριθμοι

4.1 Βασικά Στοιχεία

Γενετικοί Αλγόριθμοι : Είναι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης προβλημάτων (ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης) που βασίζονται στις αρχές της βιολογικής εξέλιξης όπως τις διατύπωσε ο Δαρβίνος. Σε αυτή την εργασία τους χρησιμοποιούμε για ελαχιστοποίηση και έτσι η περιγραφή που ακολουθεί ασχολείται με αυτή την περίπτωση [16].

Περιγραφή :

1. Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι ξεκινούν με ένα πληθυσμό υποψήφιας λύσεων, κάθε υποψήφια λύση στον πληθυσμό ονομάζεται άτομο και κωδικοποιείται με ένα σύνολο από δυαδικά ψηφία (γονίδια).
2. Σε κάθε άτομο του πληθυσμού αντιστοιχούν μια τιμή ικανότητας, η οποία προσδιορίζεται από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και υπολογίζεται αφού αποκωδικοποιήσουμε το άτομο. Όσο μικρότερες είναι οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης τόσο πιο ικανό θεωρείται το άτομο.
3. Ο πληθυσμός εξελίσσεται με τις παρακάτω γενετικές διαδικασίες :
 - (α) **Επιλογή :** Επιλέγονται τα άτομα τα οποία θα αποτελέσουν τη βάση του νέου πληθυσμού, βασικό κριτήριο επιλογής είναι η ικανότητα κάθε ατόμου.
 - (β) **Διασταύρωση :** Συνδιάζονται τα γονίδια δύο ατόμων και δημιουργούν δύο απογόνους, οι οποίοι παίρνουν την θέση τους.
 - (γ) **Μετάλλαξη :** Αντιστρέφει αυθέρητα πλήθος γονιδίων ενός ατόμου (από 0 σε 1 και αντίστροφα).

Η διαδικασία της επιλογής συμβάλει στη βελτίωση της μέσης ποιότητας του πληθυσμού ενώ η διασταύρωση και η μετάλλαξη συμβάλουν στην παραγωγή νέων ατόμων πολλά από τα οποία θα είναι περισσότερο ικανά από τα ικανότερα του πληθυσμού. Βέβαια θα δημιουργηθούν και κάποια τα οποία θα έχουν ικανότητα κάτω από την μέση ικανότητα του πληθυσμού αλλά αυτά θα έχουν μικρή πιθανότητα να επιβιώσουν κατά την επόμενη διαδικασία επιλογής.

4. Αντικαθιστούν τα άτομα του πληθυσμού με τα άτομα που προέκυψαν από το βήμα 3, έτσι δημιουργείται ένας νέος πληθυσμός (νέα γενεά)
5. Επαναλαμβάνουν την διαδικασία από το βήμα 2, μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Βασικά Πλεονεκτήματα Γενετικών Αλγορίθμων :

1. Μπορούν να λύσουν δύσκολα προβλήματα γρήγορα και αποτελεσματικά.
2. Η μόνη γνώση που χρειάζονται είναι η αντικειμενική συνάρτηση.
3. Μπορούν να υλοποιηθούν σε παράλληλα συστήματα.
4. Κάνουν αναζήτηση σε πολλά σημεία ταυτόχρονα.

1 0 1 1	0 0 0	1 0 1 1 0	...	1 0 0 1
X_1	X_2	X_3	...	X_N

Σχήμα 4.1: Παράδειγμα κωδικοποίησης. Δείχνει την αντιστοιχία των μεταβλητών με τα γονίδια.

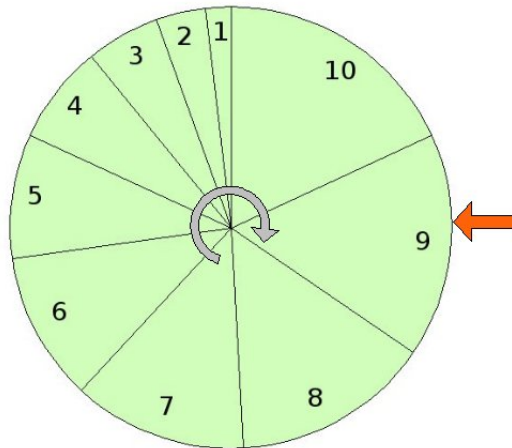
4.2 Ανάλυση Γενετικών Αλγορίθμων

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το ελάχιστο μιας συνάρτησης $f(\mathbf{X}) \geq 0$, όπου $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$, $X_j \in [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$ με γενετικούς αλγορίθμους.

Κωδικοποίηση : Κάθε μεταβλητή X_j , $j = 1, \dots, N$ κωδικοποιείται με ένα δυαδικό αριθμό B_j με m_j δυαδικά ψηφία, όπου m_j ο μικρότερος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση

$$(b_j - a_j) \cdot 10^{p_j} \leq 2^{m_j} - 1 \quad (4.1)$$

όπου p_j η ζητούμενη ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία της X_j μεταβλητής. Τα ψηφία του B_j τοποθετούνται στις θέσεις από $\sum_{k=1}^{j-1} m_k + 1$ μέχρι $\sum_{k=1}^j m_k$ μέσα στο άτομο. Κάθε άτομο αποτελείται από $m = \sum_{k=1}^N m_k$ δυαδικά ψηφία.



Σχήμα 4.2: Παράδειγμα ρουλέτας επιλογής για πληθυσμό που αποτελείται από 10 άτομα.

Αποκωδικοποίηση : Γίνεται με την παρακάτω σχέση

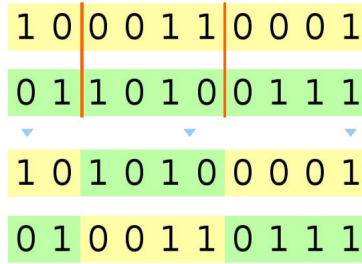
$$X_j = a_j + (B_j)_{10} \cdot \frac{b_j - a_j}{2^{m_j} - 1}, j = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

όπου $(\cdot)_{10}$ μετατρέπει αριθμούς από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα.

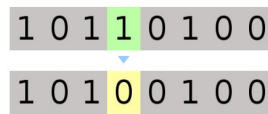
Επιλογή : Αρχικά υπολογίζουμε την τιμή ικανότητας κάθε ατόμου, στη συνέχεια κατασκευάζουμε ρουλέτα στην οποία το ικανότερο άτομο λαμβάνει το $\frac{M}{\sum_{i=1}^M i}$ του εμβαδού της, όπου M ο αριθμός των ατόμων που αποτελούν τον πληθυσμό, το αμέσως επόμενο ικανό το $\frac{M-1}{\sum_{i=1}^{M-1} i}$ του εμβαδού. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να φτάσουμε στο λιγότερο ικανό το οποίο θα λάβει το υπόλοιπο $\frac{1}{\sum_{i=1}^1 i}$ του εμβαδού. Στη συνέχεια περιστρέφουμε την ρουλέτα M φορές και παίρνουμε M άτομα (δεξαμενή ζευγαρώματος). Παράδειγμα ρουλέτας επιλογής φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

Διασταύρωση : Κάθε άτομο της δεξαμενής ζευγαρώματος έχει πιθανότητα p_c (πιθανότητα διασταύρωσης) να επιλεγεί για να συμμετάσχει στη διαδικασία διασταύρωσης, αν επιλεγεί περιττός αριθμός ατόμων απορίπτουμε στην τύχη ένα από αυτά. Στη συνέχεια τα χωρίζουμε σε ζευγάρια και εφαρμόζουμε την διαδικασία διασταύρωσης σε κάθε ζευγάρι. Σ' αυτή την εργασία θα εφαρμοστεί διασταύρωση δυο σημείων (Σχήμα 4.2) η οποία είναι κατάλληλη για πολυδιάστατα προβλήματα.

Μετάλλαξη : Στη διαδικασία της μετάλλαξης κάθε γονίδιο ενός ατόμου μπορεί να αντιστραφεί (από 0 σε 1 ή το αντίστροφο) με πιθανότητα p_m (πιθανότητα μετάλλαξης). Η τιμή της p_m καλό είναι να μην παίρνει μεγάλες τιμές καθώς σε διαφορετική περίπτωση μπορεί ο γενετικός αλγόριθμος να εκφυλιστεί σε τυχαίο ψάξιμο. Στο Σχήμα 4.4 φαίνεται ένα παράδειγμα μετάλλαξης.



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα διασταύρωσης δύο σημείων, τα άτομα που προκύπτουν (απόγονοι) θα πάρουν την θέση των ατόμων που διασταυρώθηκαν(γονείς), οι θέσεις διασταύρωσης επιλέγονται τυχαία.



Σχήμα 4.4: Παράδειγμα μετάληξης ενός γονιδίου του ατόμου.

4.3 Εφαρμογή των Γενετικών Αλγορίθμων στο Αντίστροφο Πρόβλημα Ακουστικής διάδοσης

Χώρος Αναζήτησης : Έστω $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M), M \in \mathbb{N}$ το διάνυσμα παραμέτρων. Επιλέγουμε ως χώρο αναζήτησης κάθε παραμέτρου $m_j, j = 1, \dots, M$ ένα διάστημα $[a_j, b_j] \in \mathbb{R}$

Αντικειμενική Συνάρτηση : Επιλέγουμε ως αντικειμενική συνάρτηση (συνάρτηση ικανότητας) την απόσταση D_s , δηλαδή

$$f(\mathbf{m}) = D_s(S_{obs}, S_{\mathbf{m}}) \tag{4.3}$$

Μέγεθος Πληθυσμού και Αριθμός Γενεών : Ως μέγεθος του πληθυσμού διαλέγουμε 200 άτομα, εάν διαλέξουμε λίγα (της τάξης λιγότερα από 100) δεν θα εξερευνηήσουμε μεγάλη περιοχή του χώρου αναζήτησης και επίσης ίσως χάσουμε πιθανά ακρότατα, αντίθετα εάν επιλέξουμε πολύ μεγάλο αριθμό ατόμων (της τάξης περισσότερα από 500) η σύγκλιση θα γίνει πολύ αργά και θα χρειαστούμε πολλές γενεές άρα και πολύ χρόνο. Σαν κριτήριο τερματισμού διαλέγουμε την συμπλήρωση ενός δεδομένου αριθμού γενεών, εδώ επιλέγουμε 50 γενεές.

Κωδικοποίηση : Επιλέγουμε ακρίβεια μηδέν δεκαδικών ψηφίων ώστε να μην αποτελείται το άτομο από πολλά γονίδια, το οποίο θα καθυστερούσε τη σύγκλιση. Κάθε $m_j, j = 1, \dots, N$ κωδικοποιείται με το δυαδικό αριθμό B_j, q_j δυαδικών ψηφίων, όπου

q_j ο μικρότερος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση

$$b_j - a_j + 1 \leq 2^{q_j} \quad (4.4)$$

Επιλογή - Διασταύρωση - Μετάλλαξη : Οι διαδικασίες επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης γίνονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Ως πιθανότητα επιλογής επιλέγουμε $p_c = 0.5$ και ως πιθανότητα μετάλλαξης $p_m = 0.001$

Χρόνος Αντιστροφής : Όπως αναφέραμε πριν, η επίλυση του ευθύ προβλήματος χρειάζεται περίπου 8 δευτερόλεπτα. Ο χρόνος αντιστροφής με τη μεθοδό των γενετικών αλγορίθμων είναι περίπου :

$$\text{Αριθμός Γενεών} \cdot \text{Μέγεθος Πληθυσμού} \cdot \text{Χρόνος Εκτέλεσης Ευθύ Προβλήματος} \\ = 50 \cdot 200 \cdot 8 = 80.000 \text{ sec}$$

δηλαδή περίπου 22 ώρες.

Αποτελέσματα : Μετά τον τερματισμό του γενετικού αλγορίθμου έχουμε ένα τελικό πληθυσμό ατόμων από τα οποία τα περισσότερα είναι ιδιαίτερα ικανά. Το ικανότερο απ' αυτά αφού αποκωδικοποιηθεί θα αποτελέσει την εκτίμηση \mathbf{m}^{est} της λύσης του αντίστροφου προβλήματος.

4.4 Εκ των Υστέρων Στατιστική Κατανομή Πληθυσμού

Το καλύτερο άτομο μπορεί να μας δίνει μια καλή προσέγγιση της λύσης του αντίστροφου προβλήματος αλλά δεν εκμεταλεύεται όλες τις σημαντικές πληροφορίες που περιέχει ο τελικός πληθυσμός. Όπως είδαμε η ικανότητα του ατόμου εξαρτάται από τις τιμές των M παραμέτρων που το ορίζουν, άρα το καλύτερο άτομο του πληθυσμού σίγουρα θα διαθέτει έναν καλό συνδυασμό αυτών των τιμών αλλά όχι κατ' ανάγκη τον βέλτιστο.

Μια καλύτερη εικόνα για τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων θα πάρουμε σχηματίζοντας εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές [17]. Συγκεκριμένα θα κατασκευάσουμε $\mathbf{M}_j, j = 1, \dots, M$ διανύσματα διάστασης Q , όπου Q το μέγεθος του πληθυσμού, ως εξής :

$$\mathbf{M}_j = [m_j^1, m_j^2, \dots, m_j^Q]^T, j = 1, \dots, M \quad (4.5)$$

όπου m_j^i η j παράμετρος του i ατόμου του τελικού πληθυσμού. Η στατιστική κατανομή του \mathbf{M}_j δίνει την εκ των υστέρων κατανομή της j παράμετρου του αντίστροφου προβλήματος.

Πλεονεκτήματα :

- **Γρήγορη Παρατήρηση Αποτελεσμάτων :** Το γεγονός ότι ο τελικός πληθυσμός αποτελείται από $M \cdot Q$ αριθμούς κάνει τη μελέτη του πολύ δύσκολη. Με

τη στατιστική περιγραφή του πληθυσμού πέρνουμε οπτικά αποτελέσματα και είμαστε σε θέση να βγάλουμε γρήγορα συμπεράσματα.

- **Ποηληπλή Ακρότητα :** Όταν μια παράμετρος παρουσιάζει περισσότερα από ένα ακρότητα, είμαστε σε θέση να τα δούμε από την εκ των υστέρων στατιστική κατανομή της, αρκεί βέβαια να έχουμε επιλέξει κατάλληλα τον αριθμό των ατόμων του πληθυσμού, τη μέθοδο επιλογής καθώς και των πιθανοτήτων διασταύρωσης και μετάλλαξης.
- **Διασπορά των Παραμέτρων :** Με την στατιστική ερμηνεία των αποτελεσμάτων παίρνουμε πληροφορία για τις διασπορές που παρουσιάζουν οι παράμετροι γύρω από τα ακρότάτά τους. Αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς μας δίνει ένα μέτρο εμπιστοσύνης για τα αποτελέσματα που πήραμε.

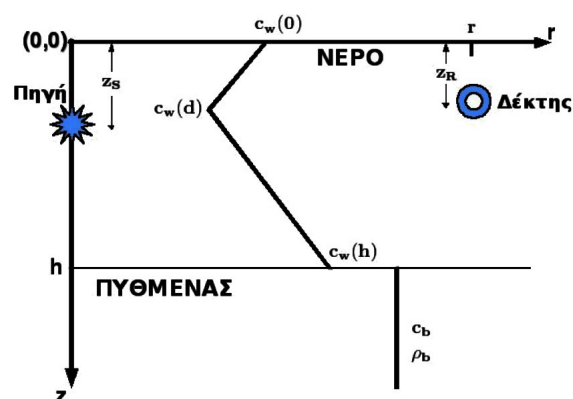
Στο κεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται παραδείγματα αντιστροφής. Σαν αποτελέσματα θα δίνονται το καλύτερο άτομο του πληθυσμού καθώς και οι εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές που περιγράψαμε σ' αυτήν την ενότητα.

5

Παραδείγματα Αντιστροφής

Στη μέθοδο αντιστροφής που περιγράφουμε, χρειάζεται να γνωρίζουμε το σήμα (σήμα αναφοράς) που λαμβάνει ο δέκτης. Εδώ για να μελετήσουμε την αποδοτικότητα της μεθόδου κατασκευάζουμε φανταστικά θαλάσσια περιβάλλοντα και υπολογίζουμε προσεγγιστικά το σήμα που θα λάμβανε ο δέκτης σε κάθε ένα από αυτά αν τα περιβάλλοντα ήταν πραγματικά. Αυτοί οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται με το πρόγραμμα `mode1` [7] το οποίο επιλύει το ευθύ πρόβλημα ακουστικής διάδοσης. Έπειτα για κάθε περιβάλλον, θεωρούμε άγνωστες κάποιες από τις παραμέτρους που το περιγράφουν και εκτελούμε την διαδικασία αντιστροφής που περιγράψαμε. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε προσεγγίσεις για τις παραμέτρους που θεωρήσαμε αγνώστες και αξιολογούμε τα αποτελέσματα.

5.1 Παράδειγμα 1



Σχήμα 5.1: Το Θαλάσσιο Περιβάλλον

Θεωρούμε θαλάσσιο περιβάλλον το οποίο περιγράφεται από το Σχήμα 5.1. Η πηγή είναι σημειακή Γκαουσιανή με κεντρική συχνότητα $100Hz$ και με εύρος $40Hz$, ενώ η απόσταση της από τον δέκτη λαμβάνεται στα $5km$. Το περιβάλλον αποτελείται από νερό βαθους $200m$ στο οποίο η ταχύτητα του ήχου δίνεται από τις σχέσεις

$$c_w(z) = c_w(0) + \frac{c_w(d) - c_w(0)}{d}z, 0 \leq z \leq d \quad (5.1)$$

και

$$c_w(z) = c_w(d) + \frac{c_w(200) - c_w(d)}{200 - d}(z - d), d \leq z \leq 200 \quad (5.2)$$

όπου d το βάθος στο οποίο παρατηρείται η ελάχιστη ταχύτητα του ήχου και $c_w(0)$, $c_w(d)$, $c_w(h)$ οι ταχύτητες του ήχου στην επιφάνεια και στα βάθη d και h αντίστοιχα. Από το βάθος $z = 200m$ ξεκινά ημιάπειρος πυθμένας πυκνότητας ρ_b και σταθερής ταχύτητας διάδοσης του ήχου c_b . Τέλος η πηγή και ο δέκτης βρίσκονται σε βάθος $100m$ από την επιφάνεια της θάλασσας. Σε αυτό το παράδειγμα οι παράμετροι προς ανάκτηση είναι οι ακόλουθες :

1. Το βάθος στο οποίο παρατηρείται η ελάχιστη ταχύτητα διάδοσης του ήχου
2. Η ελάχιστη ταχύτητα του ήχου
3. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στην επιφάνεια της θάλασσας
4. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε βάθος h , δηλαδή στη διεπιφάνεια νερού πυθμένα
5. Η πυκνότητα του πυθμένα, και
6. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο πυθμένα

Το διάνυσμα των παραμέτρων του αντίστροφου προβλήματος ορίζεται ως εξής :

$$\mathbf{m} = [d, c_w(d), c_w(0), c_w(h), \rho_b, c_b]^T \quad (5.3)$$

Ο χώρος αναζήτησης φαίνεται στον Πίνακα 5.1.

Αντιστρέφοντας το πρόβλημα όπως περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια παίρνουμε τα αποτελέσματα :

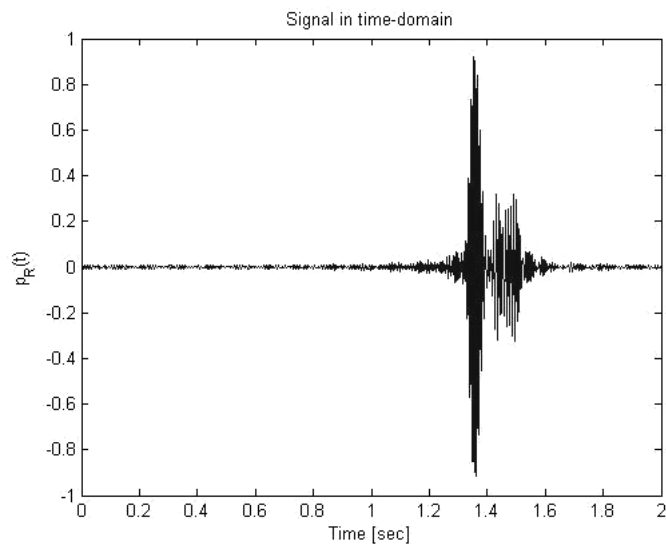
Το καλύτερο άτομο του τελικού πληθυσμού : Το καλύτερο άτομο του πληθυσμού αποτελεί μια προσέγγιση \mathbf{m}^{est} του αντίστροφου προβλήματος. Σε αυτό το παράδειγμα πήραμε

$$\mathbf{m}^{est} = [59.4, 1488.5, 1501, 1516.5, 1195.1, 1605.9]^T \quad (5.4)$$

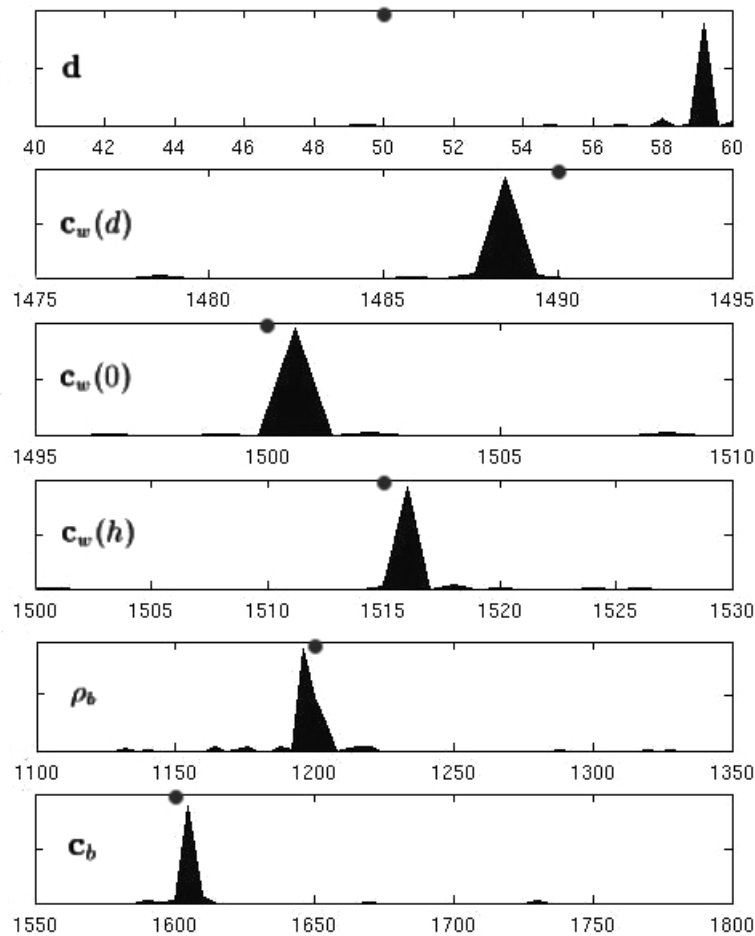
Εκ των υστέρων στατιστική κατανομή πληθυσμού : Φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Βλέπουμε ότι ανακτούμε με επιτυχία σχεδόν όλες τις αγνωστές παραμέτρους. Η μεγαλύτερη απόκλιση παρουσιάζεται στον υπολογισμό της απόστασης ελάχιστης ταχύτητας του ήχου.

Πίνακας 5.1: Περιγραφή του θαλάσσιου περιβάλλοντος και του χώρου αναζήτησης.

		Πραγματικές Τιμές	Χώρος Αναζήτησης
Βάθος Νερού	h	200 m	200 m
Βάθος Πηγής	z_s	100 m	100 m
Βάθος Δέκτη	z_R	100 m	100 m
Απόσταση Δέκτη	r	5000 m	5000 m
Κεντρική Συχνότητα Πηγής	f_o	100 Hz	100 Hz
Εύρος Συχνοτήτων Πηγής	Δf	40 Hz	40 Hz
Ταχύτητα στην Επιφάνεια	$c_w(0)$	1500 m/s	[1495,1510] m/s
Ελάχιστη Ταχύτητα	$c_w(d)$	1490 m/s	[1475,1495] m/s
Ταχύτητα σε Βάθος h	$c_w(h)$	1515 m/s	[1500,1530] m/s
Βάθος Ελάχιστης Ταχύτητας	d	50 m	[40,60] m
Πυκνότητα πυθμένα	ρ_b	1200 g/m^3	[1100,1350] g/m^3
Ταχύτητα στο Πυθμένα	c_b	1600 m/s	[1550,1800] m/s



Σχήμα 5.2: Το σήμα αναφοράς του παραδείγματος, στο πεδίο του χρόνου.

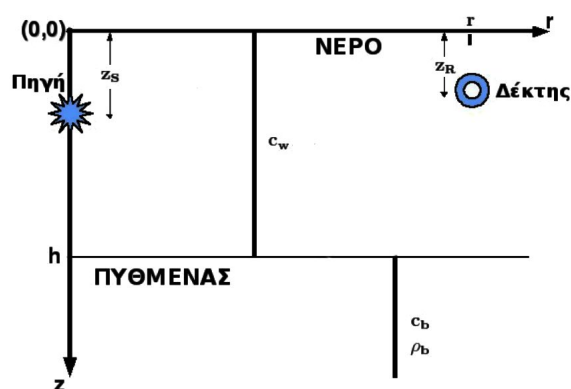


Σχήμα 5.3: Εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές των παραμέτρων.

5.2 Παράδειγμα 2

Θεωρούμε θαλάσσιο περιβάλλον το οποίο περιγράφεται από το Σχήμα 5.4. Η πηγή είναι όμοια με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος, η απόσταση της από τον δέκτη είναι r και η ακριβής τιμή της είναι άγνωστη. Το περιβάλλον αποτελείται από νερό βαθους $200m$ στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης του ήχου έχει σταθερή τιμή c_w και από ημιάπειρο πυθμένα, για $z \geq 200m$, πυκνότητας ρ_b και σταθερής ταχύτητας διάδοσης του ήχου c_b . Η πηγή βρίσκεται σε βάθος z_s και ο δέκτης σε βάθος z_R . Σε αυτό το παράδειγμα οι παράμετροι προς ανάκτηση είναι οι παρακάτω :

1. Το βάθος στο οποίο βρίσκεται η πηγή
2. Το βάθος στο οποίο βρίσκεται ο δέκτης
3. Η οριζόντια απόσταση της πηγής από το δέκτη
4. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό



Σχήμα 5.4: Το Θαλάσσιο Περιβάλλον

5. Η πυκνότητα του πυθμένα, και

6. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο πυθμένα

Το διάνυσμα των παραμέτρων του αντίστροφου προβλήματος ορίζεται ως εξής :

$$\mathbf{m} = [z_s, z_R, r, c_w, \rho_b, c_b]^T \quad (5.5)$$

Ο χώρος αναζήτησης φαίνεται στον Πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2: Παράδειγμα 2

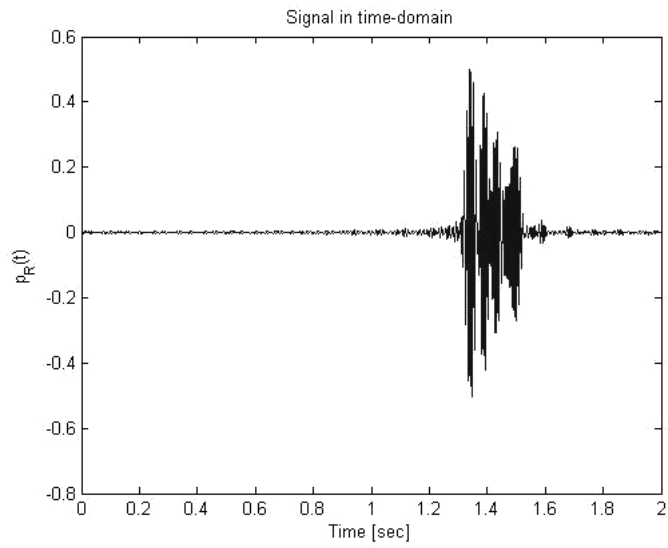
		Πραγματικές Τιμές	Χώρος Αναζήτησης
Βάθος Νερού	h	200 m	200 m
Βάθος Πηγής	z_s	100 m	[95,105] m
Βάθος Δέκτη	z_R	100 m	[95,105] m
Απόσταση Δέκτη	r	5000 m	[4970,5030] m
Κεντρική Συχνότητα Πηγής	f_o	100 Hz	100 Hz
Εύρος Συχνοτήτων Πηγής	Δf	40 Hz	40 Hz
Ταχύτητα στο Νερό	$c_w(0)$	1500 m/s	[1475,1520] m/s
Πυκνότητα πυθμένα	ρ_b	1200 g/m ³	[1100,1350] g/m ³
Ταχύτητα στο Πυθμένα	c_b	1600 m/s	[1550,1800] m/s

Μετά από τη διαδικασία αντιστροφής παίρνουμε τα αποτελέσματα :

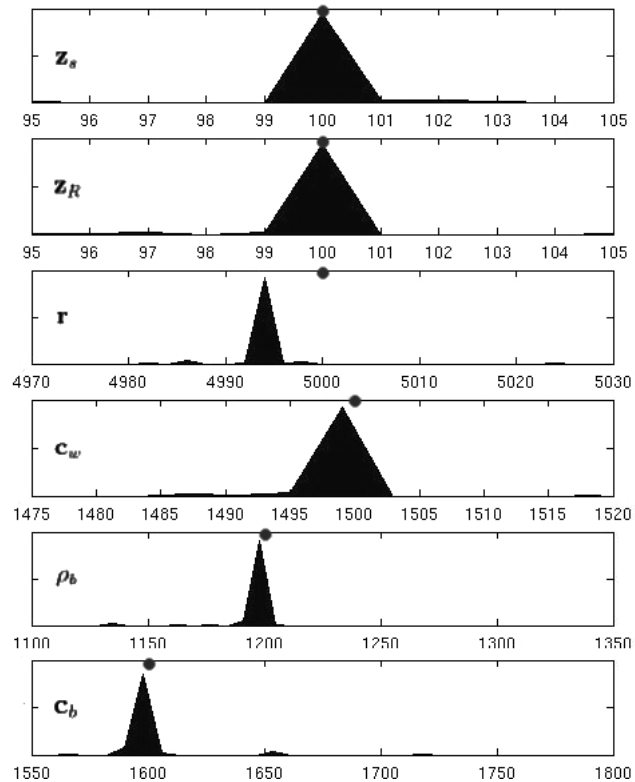
Το καλύτερο άτομο του τελικού πληθυσμού : Σε αυτό το παράδειγμα λάβαμε :

$$\mathbf{m}^{est} = [100.3, 99.7, 4993.8, 1497.1, 1197.1, 1594.1]^T \quad (5.6)$$

Εκ των υστέρων στατιστική κατανομή πληθυσμού : Φαίνεται στο Σχήμα 5.6. Η ανάκτηση και των έξι άγνωστων παραμέτρων γίνεται ικανοποιητικά.



Σχήμα 5.5: Το σήμα αναφοράς του παραδείγματος, στο πεδίο του χρόνου.



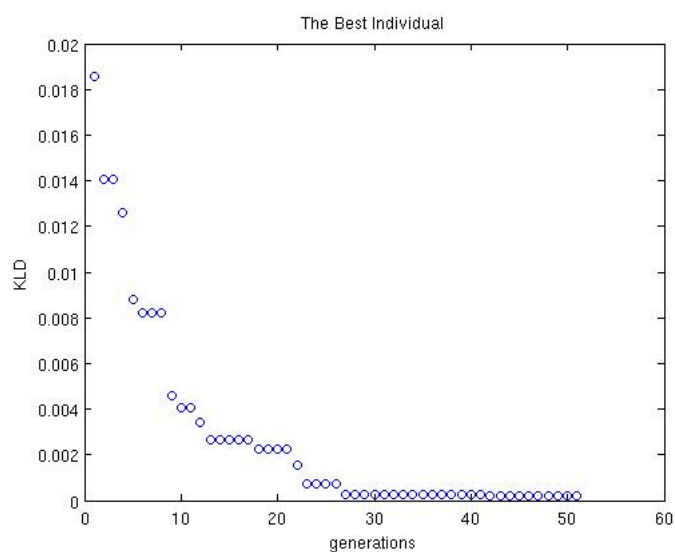
Σχήμα 5.6: Εκ των υστέρων στατιστικές κατανομές των παραμέτρων

6

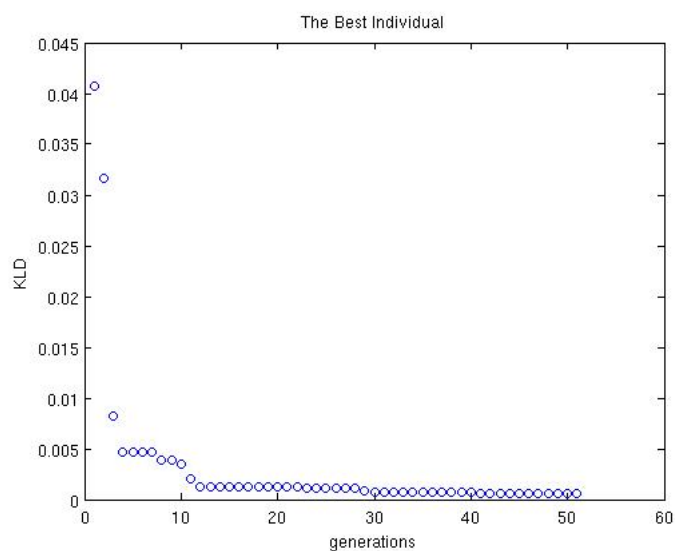
Συμπεράσματα

Η μέθοδος αντιστροφής που αναπτύχθηκε, όπως είδαμε από τα παραδείγματα έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα σε όλες τις περιπτώσεις ανάκτησης παραμέτρων του περιβάλλοντος της κυματικής διάδοσης. Την μεγαλύτερη επιτυχία της μεθόδου αποτελεί η ικανοποιητική προσέγγιση της πυκνότητας του πυθμένα. Οι πυκνότητες εμφανίζονται στις εξισώσεις μόνο στη συνθήκη διεπιφάνειας ως συντελεστές συναρμογής και έτσι δεν συνισφέρουν αρκετά στο ακουστικό πεδίο. Συγκεκριμένα η πληροφορία που προέρχεται από αυτές και μεταφέρεται μαζί με το σήμα εκφράζεται ως υψηλής συχνότητας διαταραχή του σήματος και δεν γίνεται εύκολα αντιληπτή. Αναλύοντας το σήμα σε επίπεδα με τον μετασχηματισμό κυματιδίων καταφέρνουμε να συνισφέρουν οι υψηλές συχνότητες αρκετά στο συμβολισμό του κύματος καθώς ο μετασχηματισμός αυτός βλέπει το ίδιο καλά τις χαμηλές και τις υψηλές συχνότητες. Σημειώνουμε ότι από την διεθνή βιβλιογραφία είναι γνωστό ότι οι συνήθεις μέθοδοι αντιστροφής δεν προσεγγίζουν καλά την πυκνότητα.

Για μέθοδο βελτιστοποίησης χρησιμοποιήσαμε γενετικούς αλγόριθμους. Οι αλγόριθμοι αυτοί όπως είδαμε εξασφαλίζουν γρήγορη σύγκλιση καθώς κατευθύνουν και στενέβουν ταυτόχρονα την περιοχή αναζήτησης, έτσι δεν χρειαζόταν να δοκιμάζουμε διαρκώς συνδιασμούς των παραμέτρων από ένα τεράστιο χώρο αναζήτησης. Οι παράμετροι του γενετικού αλογορίθμου επιλέχθηκαν έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης της αντιστροφής και εξερεύνησης μεγάλης περιοχής του χώρου αναζήτησης. Με το πέρασμα των γενεών προέκυπταν όλο και ικανότερα άτομα (Σχήμα 6.1 και Σχήμα 6.2), επίσης η μέση ικανότητα του πληθυσμού αυξανόταν, έτσι μετά τον τερματισμό του αλογορίθμου είχαμε ένα πληθυσμό τα περισσότερα άτομα του οποίου αποτελούσαν καλή προσέγγιση των πραγματικών τιμών των παραμέτρων. Το βέλτιστο άτομο του τελικού πληθυσμού παρόλο που έχει καλά χαρακτηριστικά (καλό συνδιασμό τιμών των παραμέτρων) δεν αξιοποιεί όλη την υπάρχουσα πληροφορία που περιέχεται στον πληθυσμό. Την λύση για την αξιοποίηση της επιπλέον πληροφορίας μας την έδωσαν οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων του τελικού πληθυσμού. Με τις παραπάνω πετύχαμε να εκτιμήσου-



Σχήμα 6.1: Το βέλτιστο άτομο ανά γενεά (1^ο παράδειγμα αντιστροφής)

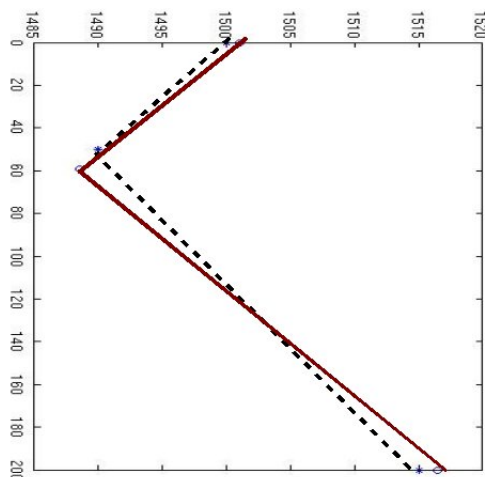


Σχήμα 6.2: Το βέλτιστο άτομο ανά γενεά (2^ο παράδειγμα αντιστροφής)

με τις τιμές των παραμέτρων του θαλάσσιου περιβάλλοντος και επιπλέον να έχουμε εικόνα για τις διασπορές τους.

Στο πρώτο παράδειγμα, μεγάλο σχετικό σφάλμα λάβαμε στο βάθος στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης του ήχου έχει ελάχιστη τιμή. Αυτό μπορεί σε κάποιο βάθος να δικαιολογηθεί καθώς αυτό το σφάλμα δρά διορθωτικά στα μικρά σφάλματα των τιμών των ταχυτήτων καθώς εάν παρατηρήσουμε το Σχήμα 6.3 και τα δύο προφίλ ταχύτητας έχουν περίπου την ίδια μέση τιμή.

Στο δεύτερο παράδειγμα όλες οι παράμετροι υπολογίστηκαν ικανοποιητικά. Εδώ είχαμε ένα απλό προφίλ ταχύτητας και τα επιπλέον στοιχεία ήταν ο προσδιορισμός



Σχήμα 6.3: Προφίλ ταχύτητας. Με διακεκομμένη γραμμή το πραγματικό προφίλ ενώ με κόκκινο το προφίλ ταχύτητας του βέλτιστου ατόμου.

θέσης της πηγής και του δέκτη που έγιναν με επιτυχία. Αυτό ήταν κάτι που περιμέναμε αφού αυτές οι παράμετροι εμφανίζονται άμεσα στην έκφραση της λύσης του ευθέως προβλήματος.

Μελλοντικά η βελτιστοποίηση με γενετικούς αλγορίθμους μπορεί να υλοποιηθεί σε παράλληλα συστήματα, μιας και η δομή τους το επιτρέπει και ο χρόνος αντιστροφής να μειωθεί σημαντικά.

Βιβλιογραφία

- [1] M. Taroudakis and G. Tzagkarakis, *Acoustic signal representation by the statistical distribution of the wavelet subband coefficients for tomographic inversion*, Proceedings of the seventh European conference on underwater acoustics, edited by D.G.Simons, pp. 639-644 (2004).
- [2] G. Tzagkarakis, M. Taroudakis and P. Tsakalides, *A statistical geoacoustic inversions scheme based on a modified radial basis functions neural network*, J. Acoustic Soc. Am., vol. 122, no. 4, pp. 1959-1968, October 2007.
- [3] Alan Oppenheim, Ronald Schafer, John Buck, *Discrete-time signal processing*, Prentice hall, 1989
- [4] Μ. Ταρουδάκης, *Μαθηματική μοντελοποίηση ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα*, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου κρήτης, Διδακτικές σημειώσεις, Ηράκλειο, 2003
- [5] W.E.Boyce and R.C.Diprima, *Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών*, John Wiley and Sons, New York, 1997
- [6] Michael Taroudakis and Maria Markaki, *Tomographic inversions in shallow water, using modal travel time measurements*, ACOUSTICA united with ACTA acoustica, Vol 87, pp 647-658 (2001).
- [7] Ταρουδάκης Μιχάλης, *Πρόγραμμα mode1, User's Manual*, ΙΤΕ/ΙΥΜ 1995.
- [8] William Menke, *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*, Academic press, 1984
- [9] M. Taroudakis, *Inverse problems in underwater acoustics*, Proceedings of the 2nd EAA International Symposium on Hydroacoustics, edited by A Stepnowski et al. pp 281-290, 1999
- [10] Stephane Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic press, 1998
- [11] Charles Chui, *An introduction to Wavelets*, Academic press, 1992
- [12] T. Cover and J.Thomas, *Elements of information theory*, John Wiley, 1991

- [13] Georgios Tzagkarakis, *Content-based image retrieval via Alpha-Stable modeling of texture information*, MSc. Thesis, Heraklion, 2004
- [14] J P. Nolan, *Numerical calculation of stable densities and distribution functions*, Commun. Statist.-Stochastic Models, 1997
- [15] K Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Academic Press, 1990.
- [16] David E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison-Wesley, 1989
- [17] Donald Gingras and Peter Gerstoff, *Inversion for geometric and geoacoustic parameters in shallow water: Experimental results*, J. Acoustic Soc. Am. 97, 1995

