Μάριος Σταματάκης

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΧΩΡΟΙ ΜΕΤΡΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Σουζάνα Παπαδοπούλου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή αποτελείται από δύο μέρη· μία εισαγωγή στη μετρική γεωμετρία και μία εισαγωγή στους χώρους μέτρων πιθανότητας του Wasserstein. Το πλάνο της βασίζεται στο άρθρο "Probability measures on metric spaces of non-posistive curvature" του Karl-Theodor Sturm [16].

Η μετρική γεωμετρία αναπτύχθηκε από τους Busemann, Topogonov και, κυρίως, τον A.D. Alexandrov γύρω στα μέσα του 20ού αιώνα. Αντικείμενό της είναι η μελέτη των μετρικών χώρων από γεωμετρική σκοπιά. Μέσω της μετρικής ενός μετρικού χώρου ορίζονται πρωταρχικές έννοιες όπως αυτές του μήκους, της γεωδαισιακής ως καμπύλη ελαχίστου μήκους και της γωνίας. Ο A.D. Alexandrov συγκρίνοντας τρίγωνα σε μετρικούς χώρους, των οποίων οι πλευρές είναι γεωδαισιακά τμήματα, με τρίγωνα στους χώρους μοντέλα, όρισε ακόμη τι σημαίνει να έχει ένας μετρικός χώρος καμπυλότητα $\geq \kappa$ ή $\leq \kappa$, γενικεύοντας την έννοια των φραγμάτων στις καμπυλότητες τομής, από την κατηγορία των πολλαπλοτήτων Riemann στην κατηγορία των μετρικών χώρων.

Οι χώροι μέτρων πιθανότητας του Wasserstein είναι οι μετρικοί χώροι που προκύπτουν αν εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathbb{P}X$ όλων των σφικτών Borel μέτρων πιθανότητας ενός μετρικού χώρου X με τη μετρική $W_r : \mathbb{P}X \times \mathbb{P}X \longrightarrow [0,\infty]$ με τύπο

$$W_r(\mu,\nu) = \inf\left\{ \int_{X\times X} d(x,y)^r d\pi(x,y) \,\middle|\, \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\}^{\frac{1}{r}}, \tag{1}$$

όπου $\Pi(\mu,\nu)$ είναι το σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας $\pi \in \mathbb{P}(X\times X)$ με περιθώριες κατανομές τα μέτρα μ και ν, δηλαδή το σύνολο όλων των μέτρων $\pi \in \mathbb{P}(X\times X)$ με την ιδιότητα

$$\pi(A\times Y) = \mu(A), \qquad \pi(X\times B) = \nu(B),$$

για κάθε Borel σύνολα $A, B \subseteq X$. Οι μετρικές αυτές σχετίζονται άμεσα με το πρόβλημα μεταφοράς μάζας που έθεσε ο Caspar Monge το 1781. Συγκεκριμένα, η ποσότητα $W_r^r(\mu,\nu)$ παριστάνει το ελάχιστο κόστος μεταφοράς μάζας κατανεμημένης σύμφωνα με το μ σε αποθήκη της οποίας η χωρητικότητα περιγράφεται από το ν, αν το κόστος μεταφοράς μίας μονάδας μάζας από τη θέση $x \in X$ στη θέση $y \in Y$ είναι $d^r(x,y)$.

Τα δύο αυτά θέματα σε πρωταρχικό στάδιο είναι ασύνδετα. Όμως, από τη μία η μετρική γεωμετρία αποτελεί ένα ουσιαστικό εργαλείο στη βαθύτερη μελέτη των μετρικών χώρων του Wasserstein (δείτε παραδείγματος χάριν το [13]) και από την άλλη, τα τελευταία χρόνια, οι μετρικοί χώροι του Wasserstein χρησιμοποιούνται στην προσπάθεια να γενικευτεί η έννοια της καμπυλότητας Ricci από την κατηγορία των πολλαπλοτήτων Riemann στην κατηγορία των μετρικών χώρων πιθανότητας (δείτε παραδείγματος χάριν τα [15] και [17]).

Πριν προχωρήσουμε σε μία πιο αναλυτική περιγραφή των περιεχομένων των δύο μερών της εργασίας, ας τονίσουμε ότι σ' αυτή την εργασία δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με τό ζήτημα της γενίκευσης της καμπυλότητας Ricci.

Το πρώτο μέρος της εργασίας, που αφορά τη μετρική γεωμετρία, έχει βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στα βιβλία [10] και [4]. Στο Κεφάλαιο 1 ορίζουμε τις βασικές έννοιες του μήκους, της γεωδαισιακής, της γωνίας και της μετρικής παραγώγου. Στην πρώτη παράγραφο του Κεφαλαίου 2 ορίζουμε τους χώρους μήκους ως τους μετρικούς χώρους στους οποίους δύο οποιαδήποτε σημεία συνδέονται από καμπύλη με μήκος οσοδήποτε κοντά στην απόσταση τους και τους γεωδαισιακούς χώρους ως τους μετρικούς χώρους εκείνους στους οποίους δύο οποιαδήποτε σημεία συνδέονται από καμπύλη με μήκος ίσο με την απόσταση τους. Στη δεύτερη παράγραφο αποδεικνύουμε τη γενίκευση του θεωρήματος των Hopf-Rinow στους μετρικούς χώρους, δηλαδή ότι κάθε πλήρης και τοπικά συμπαγής χώρος μήκους είναι γεωδαισιακός χώρος. Στην τελευταία παράγραφο μελετάμε ως παραδείγματα γεωδαισιακών χώρων γινόμενα γεωδαισιακών χώρων και χώρους L^p συναρτήσεων με τιμές σε γεωδαισιακούς χώρους. Οι χώροι L^p θα μας βοηθήσουν στη μελέτη των γεωδαισιακών στους χώρους του Wasserstein. Στο Κεφάλαιο 3, ορίζουμε μέσω των γεωδαισιακών την έννοια της κυρτότητας για πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε γεωδαισιακούς χώρους και μελετάμε τις βασικές τους ιδιότητες. Στις ιδιότητες των κυρτών συναρτήσεων βασίζεται ο ορισμός του *βαρύκεντρου* ή αλλιώς της *μέσης τιμής* ενός μέτρου πιθανότητας σε ένα χώρο μη-θετικής καμπυλότητας, που θα δώσουμε στο Κεφάλαιο 9. Στην παράγραφο 3.2 μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των μετρικών χώρων των οποίων η μετρική είναι κυρτή, στην παράγραφο 3.3 ορίζουμε τις αφφινικές απεικονίσεις ως απεικονίσεις που μέσω της σύνθεσης απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές. Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου αναφέρουμε κάποια στοιχεία για αφφινικά συναρτησοειδή σε μετρικούς χώρους. Στο Κεφάλαιο 4 ορίζουμε τους χώρους μοντέλα, οι οποίοι λειτουργούν στον ορισμό της καμπυλότητας των μετρικών χώρων του A.D. Alexandrov ως χώροι με τους οποίους συγκρίνουμε τη γεωμετρία αυθέρετων μετρικών χώρων. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 ορίζουμε την έννοια των φραγμάτων στην καμπυλότητα ενός μετρικού χώρου, μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των χώρων φραγμένης καμπυλότητας, εξετάζουμε κάποια παραδείγματα και αποδεικνύουμε ότι ο ορισμός του Alexandrov γενικεύει την έννοια των φραγμάτων στις καμπυλότητες τομής από την κατηγορία των πολλαπλοτήτων Riemann στην κατηγορία των μετρικών χώρων.

Τα Κεφάλαια 6 έως 8 του δεύτερου μέρους βασίζονται σε μεγάλο μέρος στα βιβλία [9] και [18]. Το Κεφάλαιο 9 που αναφέρεται στα βαρύκεντρα, βασίζεται στο [16]. Στο Κεφάλαιο 6 αναφέρουμε κάποια προκαταρκτικά στοιχεία θεωρίας μέτρου σε πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους. Στην πρώτη παράγραφο του Κεφαλαίου 6 αναφέρουμε κάποια γενικά στοιχεία για χώρους μέτρου πάνω από μετρήσιμους χώρους και υπενθυμίζουμε την έννοια του μέτρου εικόνα. Στην παράγραφο 6.2 μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των Borel μέτρων σε πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα του Ulam, σύμφωνα με το οποίο κάθε πεπερασμένο Borel μέτρο σε ένα πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο είναι κανονικό. Στην παράγραφο 6.3 μελετάμε την ασθενή τοπολογία στο σύνολο $\mathbb{P}X$ όλων των Borel μέτρων πιθανότητας σε ένα πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X, δηλαδή την ασθενή τοπολογία που ορίζεται από την οικογένεια όλων των απεικονίσεων της μορφής

$$\mathbb{P}X \ni \mu \mapsto \int_X f d\mu, \qquad f \in BC(X),$$

όπου $BC(X)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων και συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στον X. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι η τοπολογία αυτή είναι μετρικοποιήσιμη από πλήρη μετρική, διαχωρίσιμη, και δίνουμε μία περιγραφή των σχετικά συμπαγών υποσυνόλων της μέσω της έννοιας της ομοιόμορφης σφικτότητας, το λεγόμενο θεώρημα του Prokhorov. Στην παράγραφο 6.4 ορίζουμε τις τοπολογίες που ορίζουν οι μετρικές του Wasserstein, ως τις ασθενείς τοπολογίες που επάγονται από τις οικογένειες συναρτήσεων

$$\mathbb{P}X \ni \mu \mapsto \int_X f d\mu, \qquad f \in B^r C(X),$$

όπου $B^r C(X)$ είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με r-οστή πολυωνυμική ανάπτυξη, δηλαδή το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων f στον X για τις οποίες $|f(x)| \leq Ad^r(x, x_0) + B$, για κάποιες σταθερές $A, B \geq 0$ και για κάποιο, και άρα και για κάθε, $x_0 \in X$. Στο Κεφάλαιο 7 διατυπώνουμε το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς μάζας, παρουσιάζοντας τα μαθηματικά μοντέλα για την έννοια του σχεδίου μεταφοράς ενός μέτρου σε ένα άλλο, και αποδεικνύουμε την ύπαρξη βέλτιστου σχεδίου μεταφοράς. Επίσης αποδεικνύουμε το θεώρημα του Kantorovich το οποίο μας χρειάζεται στην απόδειξη του ότι οι μετρικές του Wasserstein μετρικοποιούν τις τοπολογίες του Wasserstein, και κατ' επέκτασιν στη μελέτη των βασικών τοπολογικών τους ιδιοτήτων. Στο Κεφάλαιο 8 περνούμε στον ορισμό και στη μελέτη των μετρικών του Wasserstein. Στην παράγραφο 8.1 αποδεικνύουμε ένα τεχνικό θεώρημα, το λεγόμενο θεώρημα διάσπασης, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράζουμε ολοκληρώματα ως προς μέτρα σε χώρους γινόμενο, ως διαδοχικά ολοκληρώματα ακόμη και αν τα μέτρα αυτά δεν είναι μέτρα γινόμενο. Στην παράγραφο 8.2 ορίζουμε μέσω του θεωρήματος διάσπασης τη σύνθεση σχεδίων μεταφοράς, η οποία χρειάζεται στο να αποδείξουμε στην παράγραφο 8.3 ότι ο τύπος (1) ορίζει πράγματι μετρική στο σύνολο $\mathbb{P}_r X$ όλων των σφικτών Borel μέτρων πιθανότητας με πεπερασμένη κεντρική r-οστή ροπή, στον μετρικό χώρο X. Στο υπόλοιπο της παραγράφου αποδεικνύουμε ότι οι μετρικές του Wasserstein μετρικοποιούν τις τοπολογίες του Wasserstein, λαμβάνοντας έτσι για τις μετρικές του Wasserstein όλες τις τοπολογικές ιδιότητες των τοπολογιών του Wasserstein που έχουν αποδειχθεί στην παράγραφο 6.4 και αποδεικνύουμε ότι η μετρική του Wasserstein στον $\mathbb{P}_r X$ είναι πλήρης αν η μετρική του X είναι πλήρης. Στην παράγραφο 8.4 δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των γεωδαισιακών των μετρικών του Wasserstein σε μονοσήμαντα γεωδαισιακούς χώρους των οποίων οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, που δείχνει ότι οι μετρικές του Wasserstein πάνω από τέτοιους χώρους ορίζουν γεωδασιακούς χώρους. Ειδικότερα προκύπτει ότι ο $\mathbb{P}_r \mathbb{R}^n$ είναι γεωδαισιακός χώρος. Γενικότερα έχει αποδειχθεί από τον Stefano Lisini στο [8] ότι η μετρική του Wasserstein πάνω από ένα γεωδαισιακό χώρο ορίζει γεωδαισιακό χώρο. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος δεν περιέχεται σε αυτή την εργασία. Στην ίδια παράγραφο αποδεικνύουμε επίσης ότι η μετρική του Wasserstein πάνω από ένα πλήρη χώρο μήκους ορίζει χώρο μήκους. Τέλος, στην παράγραφο 9.1 επικεντρωνόμαστε σε πλήρεις μετρικούς χώρους X οι οποίοι έχουν ολικά καμπυλότητα ≤ 0 και ορίζουμε την έννοια του βαρύκεντρου για μέτρα πιθανότητας σε τέτοιους χώρους καθώς και τη μέση τιμή $\mathbb{E} : L^1(P; X) \longrightarrow X$, όπου P είναι κάποιο μέτρο πιθανότητας. Στην ίδια παράγραφο αποδεικνύουμε την ανισότητα του Jensen, τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών καθώς και το ότι η απεικόνιση $b : \mathbb{P}_1 X \longrightarrow X$, που ορίζεται αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε μέτρο πιθανότητας $p \in \mathbb{P}_1 X$, το βαρύκεντρο του $b(p)$, είναι συστολή ως προς τη μετρική W_1 του Wasserstein. Στην παράγραφο 9.2 αναφέρουμε κάποια παραδείγματα βαρύκεντρων Στην τελευταία παράγραφο, ορίζουμε την έννοια της βαρυκεντρικής συστολής ως μίας απεικόνισης $\beta : \mathbb{P}_1 \longrightarrow X$ η οποία είναι συστολή ως προς τη μετρική του Wasserstein και τ.ω. $\beta(\delta_x) = x$, για κάθε $x \in X$, όπου δ_x είναι το σημειακό μετρο Dirac στο x, και αποδεικνύουμε ότι μία απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann επιδέχεται βαρυκεντρική συστολή ανν οι καμπυλότητες τομής της είναι όλες ≤ 0.

Τέλος σημειώνουμε ότι αναρωτηθήκαμε για το αν η μέση τιμή $\mathbb{E}$ ή/και η βαρυκεντρική συστολή b είναι αφφινικές απεικονίσεις. Για την απάντηση αυτού του ερωτήματος, αποδείξαμε την πρότάση 5.4.4 και το χαρακτηρισμό 9.1.4 των αφφινικών απεικονίσεων μεταξύ μετρικών χώρων καμπυλότητας ολικά ≤ 0, μέσω των οποίων καταλήξαμε στη μερική απάντηση ότι με την επιπλέον υπόθεση ότι ο X είναι γεωδαισιακά πλήρης, η μέση τιμή είναι αφφινική ανν ο X είναι χώρος Hilbert. Όσον αφορά τη βαρυκεντρική συστολή, αποδεικνύουμε ότι η $b : \mathbb{P}_1 X \longrightarrow X$ είναι αφφινική ανν ο X είναι χώρος Hilbert. Για τη βαρυκεντρική συστολή $b : \mathbb{P}_r X \longrightarrow X$, $1 < r < \infty$, δίνουμε παράδειγμα χώρου καμπυλότητας ολικά ≤ 0, για τον οποίο η b δεν είναι αφφινική. Ωστοσο, στο χώρο αυτό, οι γεωδαισιακές διακλαδίζονται. Ενδέχεται, λοιπόν, σε ένα χώρο καμπυλότητας ολικά ≤ 0 στον οποίο οι γεωδαισιακές δεν διακλαδίζονται, όπως συμβαίνει παραδείγματος χάριν αν έχει καμπυλότητα $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa < 0$, η βαρυκεντρική συστολή να είναι αφφινική.

Μέρος I

Εισαγωγή στη Μετρική Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1

Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες σε Μετρικούς Χώρους

Μόλις ορίσει κανείς την έννοια του μήκους στο πλαίσιο των μετρικών χώρων, μπορεί να ελέγξει εάν μία δοσμένη μετρική σε ένα σύνολο X, είναι αυτό που λέμε "εσωτερική" ή αλλιώς "γεωμετρική" μετρική, δηλαδή αν η απόσταση $d(x, y)$ δύο δεδομένων σημείων $x, y \in X$ είναι συνεπής με μετρήσεις που πραγματοποιούνται μέσα από το χώρο X. Παραδείγματος χάριν, έστω $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$ η μοναδιαία σφαίρα στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με τον περιορισμό της Ευκλείδιας μετρικής. Ως προς αυτή τη μετρική, τα σημεία $e_1, -e_1 \in S^n$ απέχουν απόσταση 1, ενώ κανένα λογικό ων το οποίο θα ζούσε *μέσα* στη μοναδιαία σφαίρα, δε θα έδινε στα σημεία $e_1, -e_1$ απόσταση γνήσια μικρότερη από $\pi \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι χρήσιμο να ξεχωρίσουμε τους μετρικούς χώρους εκείνους, των οποίων οι μετρικές είναι συνεπείς με εσωτερικές μετρήσεις, σύμφωνα με την παραπάνω έννοια. Ωστόσο, η απαίτηση δύο οποιαδήποτε σημεία του χώρου να συνδέονται με μία καμπύλη ελαχίστου μήκους, είναι με μια έννοια πολύ αυστηρή. Παραδείγματος χάριν, κατι τέτοιο δεν ισχύει εν γένει στις πολλαπλότητες Riemann, των οποίων οι μετρικές *ορίζονται* μέσω εσωτερικών μετρήσεων. Ένα απλό παράδειγμα: Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ εφοδιασμένο με τον περιορισμό της ευκλείδιας μετρικής. Τα σημεία $e_1, -e_1 \in \mathbb{R}^2$ απέχουν απόσταση 2, αλλά δεν υπάρχει καμία καμπύλη που να τα συνδέει, μήκους ίσο με 2. Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε καμπύλες που να τα συνδέουν με μήκος, οσοδήποτε κοντά στο 2 θέλουμε. Έιναι λογικό να θεωρούμε τέτοιες μετρικές επίσης συνεπείς με εσωτερικές μετρήσεις. Οι χώροι εκείνοι με την ιδιότητα δύο οποιαδήποτε σημεία τους να ενώνονται με μία καμπύλη ελαχίστου μήκους, λέγονται *γεωδαισιακοί*, και οι καμπύλες ελαχίστου μήκους *γεωδαισιακές*. Οι χώροι με την ιδιότητα δύο οποιαδήποτε σημεία τους x, y να μπορούν να ενωθούν με καμπύλες μήκους οσοδήποτε κοντά στην απόσταση τους $d(x, y)$, λέγονται *χώροι μήκους*. Τους χώρους αυτούς θα τους μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τις βασικές γεωμετρικές έννοιες που χρειαζόμαστε, όπως μήκος, γωνία και γεωδαισιακή, στο πλαίσιο των μετρικών χώρων, και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες.

1.1 Μήκος Καμπύλων

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μία καμπύλη ή αλλιώς ένα μονοπάτι στον X είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : I \to X$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι κάποιο υποδιάστημα (συνεκτικό υποσύνολο) της πραγματικής ευθείας. Λέμε ότι μία καμπύλη $\gamma : [a, b] \to X$ συνδέει τα σημεία $x, y \in X$ αν $\gamma(a) = x$ και $\gamma(b) = y$. Για συντομία στο συμβολισμό, θα γράφουμε συχνά γ_t αντί $\gamma(t)$ και θα συμβολίζουμε την τροχιά της γ με $\mathrm{Im}\gamma$.

Ορισμός 1.1.1 Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Μία διαμέριση του I είναι μία γνησιώς αύξουσα ακολουθία

$$\Delta : \{0, 1, \ldots, k\} \longrightarrow I$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Συνήθως συμβολίζουμε μια τέτοια διαμέριση γράφοντας $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_k\}$, όπου $t_i = \Delta(i)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, k$, ταυτίζοντας τις διαμερίσεις με τις εικόνες τους.

Έστω $\gamma : I \to X$ μια καμπύλη στον X, όχι απαραίτητα συνεχής. Για κάθε διαμέριση $\Delta = \{t_0 < \cdots < t_k\}$ του I, θέτουμε

$$L_d(\gamma; \Delta) = \sum_{i=1}^{k} d\big(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\big),$$

και ορίζουμε το μήκος $L_d(\gamma)$ της γ απ΄τον τύπο

$$L_d(\gamma) = \sup_{\Delta} L_d(\gamma; \Delta),$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις διαμερίσεις Δ του I. Η γ λέγεται πεπερασμένου μήκους αν $L_d(\gamma) < \infty$ και τοπικά πεπερασμένου μήκους αν για κάθε $t_0 \in I$ υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon_{t_0} > 0$ τ.ω. η $\gamma|_{I \cap [t_0 - \varepsilon_{t_0}, t_0 + \varepsilon_{t_0}]}$ να είναι πεπερασμένου μήκους.

Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη τοπικά πεπερασμένου μήκους. Η συνάρτηση $\phi_{\gamma, t_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi_{\gamma, t_0}(t) = \begin{cases} L_d(\gamma|_{[t_0, t]}), & t_0 \leq t, \\ -L_d(\gamma|_{[t, t_0]}), & t \leq t_0, \end{cases}$$

λέγεται η συνάρτηση μήκους της γ ως προς το $t_0 \in I$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Έστω $\gamma : I \to X$ μία καμπύλη και Q μία διαμερίση του I. Από την τριγωνική ανισότητα της d έπεται ότι

$$L_d(\gamma) = \sup_{\Delta \supseteq Q} L_d(\gamma; \Delta).$$

Έτσι, αν το $I = [a, b]$ είναι κλειστό διάστημα, θεωρούμε μονάχα διαμερίσεις της μορφής $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}, k \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, αν η γ συνδέει τα $x, y \in X$, τότε $L_d(\gamma) \geq d(x, y)$.

2. Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ έχει τοπικά πεπερασμένο μήκος ανν η $\gamma|_{I \cap [a, b]}$ έχει πεπερασμένο μήκος για κάθε κλειστό διάστημα $[a, b] \subseteq I$.

Απόδειξη. Έστω $a, b \in I$ τ.ω. $a \leq b$. Πρέπει να δείξουμε ότι $L_d(\gamma|_{[a,b]}) < \infty$. Για κάθε $t \in [a,b]$ υπάρχει $\varepsilon_t > 0$ τ.ω. $L_d(\gamma_{[t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t]}) < \infty$. Έστω $\delta > 0$ ένας αριθμός Lebesgue του συμπαγούς $[a,b]$ για το κάλυμμα $\{[t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t]\}_{t\in[a,b]}$. Τότε κάθε υποσύνολο του $[a,b]$, με διάμετρο μικρότερη από δ, περιέχεται σε κάποιο από τα $[t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t]$. Έτσι, αν $\Delta = \{s_0 < s_1 < \cdots < s_k\}$ είναι μία διαμέριση του I πλάτους $|\Delta| := \bigvee_{i=1}^{k} |s_i - s_{i-1}| < \delta$, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, k$ υπάρχει $t_i \in [a,b]$ τ.ω. $[s_{i-1}, s_i] \subseteq [t_i - \varepsilon_{t_{i-1}}, t_i + \varepsilon_{t_i}]$. Όμως η γ έχει πεπερασμένο μήκος σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[s_{i-1}, s_i]$, , $i = 1, \ldots, k$ και συνεπώς

$$L_d(\gamma|_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{k} L_d(\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}) < \infty.$$

3. Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη στον X. Δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις μήκους της γ διαφέρουν κατά μία σταθερά. Πράγματι, αν $t_0, t_1 \in I$, και οι ϕ_{t_0}, ϕ_{t_1} είναι οι συναρτήσεις μήκους της γ ως προς τα σημεία t_0, t_1 αντίστοιχα, τότε $\phi_{t_0\wedge t_1}(t) - \phi_{t_0\vee t_1}(t) = \phi_{t_0\wedge t_1}(t_0 \vee t_1)$ για κάθε $t \in I$. Επειδή συνήθως αναφερόμαστε σε ιδιότητες των συναρτήσεων μήκους οι οποίες δεν μεταβάλλονται με την πρόσθεση κάποιας σταθεράς, δεδομένης μίας καμπύλης γ, θα λέμε *εστω ϕ η συνάρτηση μήκους της γ*, χωρίς να προσδιορίζουμε ως προς ποιο σημείο θεωρούμε ορισμένη την ϕ, εκτός βέβαια αν είναι αναγκαίο.

Οι βασικές ιδιότητες του μήκους περιγράφονται στην ακόλουθη.

Πρόταση 1.1.1 *Έστω $\gamma : I \to X$ μία καμπύλη, όχι απαραίτητα συνεχής. Τότε*

(α) $\mathrm{diam}\gamma \leq L_d(\gamma)$ *και* $L_d(\gamma) = 0$ *ανν η γ είναι σταθερή.*

(β) Προσθετικότητα: *Για κάθε $t \in I$, $L_d(\gamma) = L_d\left(\gamma|_{I\cap(-\infty,t]}\right) + L_d(\gamma|_{I\cap[t,\infty)})$*

(γ) Μονοτονικότητα: *Για κάθε διάστημα $J \subseteq I$, έχουμε ότι $L_d(\gamma|_J) \leq L_d(\gamma)$.*

(δ) Αναλλοίωτο του μήκους κάτω από ασθενής αναπαραμετρίσεις: *Αν το $J \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα και η $u : J \longrightarrow I$ είναι μονότονη και επί, τότε*

$$L_d(\gamma \circ u) = L_d(\gamma)$$

(ε) Μονοτονικότητα της συνάρτησης μήκους: *Αν η γ έχει τοπικά πεπερασμένο μήκος, τότε η συνάρτηση μήκους ϕ της γ είναι αύξουσα.*

(ζ) Συνέχεια της συνάρτησης μήκους: *Αν η γ έχει τοπικά πεπερασμένο μήκος, τότε η γ είναι συνεχής στο $t \in I$ ανν η συνάρτηση μήκους ϕ της γ είναι συνεχής στο t.*

(η) Ασθενής κάτω ημισυνέχεια: *Αν η $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία καμπύλων ορισμένων στο I, η οποία συγκλίνει στην γ κατά σημείο, τότε*

$$L_d(\gamma) \leq \liminf L_d(\gamma_n).$$

Απόδειξη Το (α) είναι προφανές. (β) Έστω $t \in I$. Για κάθε διαμέριση $\Delta = \{t_0 < \cdots < t_{i-1} < t < t_{i+1} < \cdots < t_k\}$ του I, που περιέχει το t, θέτουμε $P_\Delta = \Delta \cap (-\infty, t]$, $Q_\Delta = \Delta \cap [t, \infty)$. Τότε, για κάθε διαμέριση Δ του I, έχουμε ότι $L_d(\gamma; \Delta) = L_d(\gamma; P_\Delta) +$

$L_d(\gamma; Q_\Delta)$. Προφανώς, κάθε άθροισμα της μορφής $L_d(\gamma|_{I\cap(-\infty,t]}; P) + L_d(\gamma|_{I\cap[t,\infty)}; Q)$, όπου οι P, Q είναι διαμερίσεις των $I\cap(-\infty, t]$ και $I\cap[t, \infty)$ αντίστοιχα, τ.ω. $t \in P\cap Q$, είναι της μορφής $L_d(\gamma; P_\Delta) + L_d(\gamma; Q_\Delta)$ για κάποια κατάλληλη διαμέριση Δ του I. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} L_d(\gamma) &= \sup_{\Delta\ni t} L_d(\gamma; \Delta) = \sup_{\Delta\ni t} \left(L_d(\gamma; P_\Delta) + L_d(\gamma; Q_\Delta)\right) \\ &= \sup_{P\ni t} L_d(\gamma|_{I\cap(-\infty,t]}; P) + \sup_{Q\ni t} L_d(\gamma|_{I\cap[t,\infty)}; Q) \\ &= L_d\left(\gamma|_{I\cap(-\infty,t]}\right) + L_d\left(\gamma|_{I\cap[t,\infty)}\right), \end{aligned}$$

Τα (γ) και (ε) έπονται άμεσα από το (β).

(δ) Υποθέτουμε ότι η $u : J \longrightarrow I$ είναι αύξουσα. Η άλλη περίπτωση είναι όμοια. Έστω $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_k\}$ μια διαμέριση του J. Τότε $u(t_0) \le u(t_1) \le \cdots \le u(t_k)$. Αν $Q = \{s_o < s_1 < \cdots < s_m\}$ είναι η γνησίως αύξουσα αρίθμηση του $\mathrm{Im}(u \circ \Delta)$, Τότε,

$$L_d(\gamma \circ u; \Delta) = L_d(\gamma; Q) \le L_d(\gamma).$$

Θα αποδείξουμε τώρα την αντίστροφη ανισότητα. Έστω $\Delta = \{t_0 < \cdots < t_k\}$ μια διαμέριση του I. Επειδή η u είναι επί, υπάρχουν $s_0, \ldots, s_k \in J$ τ.ω. $t_i = u(s_i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Όμως αναγκαστικά $s_0 < \cdots < s_k$, και έτσι αν $Q = \{s_0 < \cdots < s_k\}$, τότε,

$$\begin{aligned} L_d(\gamma; \Delta) &= \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = \sum_{i=1}^{k} d(\gamma \circ u(s_{i-1}), \gamma \circ u(s_i)) \\ &= L_d(\gamma \circ u; Q) \le L_d(\gamma \circ u). \end{aligned}$$

(ζ) Υποθέτουμε πρώτα ότι η γ είναι συνεχής και θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση μήκους ϕ της γ είναι συνεχής στο I από τα δεξιά. Ανάλογα δείχνουμε και ότι είναι συνεχής από τα αριστερά. Έστω $t \in I$, $t \ne \sup I$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $t_1 \in I$ τ.ω. $t < t_1$ και διαμέριση $\Delta = \{t = s_0 < \cdots < s_k = t_1\}$ του I τ.ω.

$$L_d(\gamma|_{[t,t_1]}) < L_d(\gamma|_{[t,t_1]}, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Η γ είναι συνεχής και άρα υπάρχει $\delta \in (0, s_1 - t)$ τ.ω.

$$s \in I, \quad 0 \le s - t < \delta \Longrightarrow\ d(\gamma_t, \gamma_s) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε για κάθε τέτοιο $s \in I$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(s) - \phi(t) &= L_d(\gamma|_{[t,s]}) = L_d(\gamma|_{[t,t_1]}) - L_d(\gamma|_{[s,t_1]}) \\ &\le L_d(\gamma|_{[t,t_1]}; \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} - L_d(\gamma|_{[s,t_1]}) \\ &\le d(\gamma_t, \gamma_s) + L_d(\gamma|_{[s,t_i]}) + \frac{\varepsilon}{2} - L_d(\gamma|_{[s,t_1]}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνάρτηση μήκους ϕ της γ είναι συνεχής. Για κάθε ακολουθία (t_n) στο I τ.ω. $t_n \longrightarrow t \in I$, έχουμε ότι

$$d(\gamma_{t_n}, \gamma_t) \le L_d(\gamma|_{[t\wedge t_n, t\vee t_n]}) = \phi(t \vee t_n) - \phi(t \wedge t_n) \longrightarrow 0.$$

(η) Επειδή $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ κατά σημείο, για κάθε διαμέριση Δ του I, έχουμε ότι

$$L(\gamma\,;\Delta) = \lim L(\gamma_n\,;\Delta) \leq \liminf_n L(\gamma_n).$$

Συνεπώς, παίρνοντας το supremum πάνω από όλες τις διαμερίσεις Δ του I, προκύπτει η κάτω ημισυνέχεια της συνάρτησης μήκους και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Παρατηρήσεις

4. Εύκολα κατασκευάζονται καμπύλες άπειρου μήκους στον $X = [-1, 1]$. Παραδείγματος χάριν, κάθε καμπύλη $\gamma : [0, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ τ.ω. $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ για κάθε $n \in I$ έχει άπειρο μήκος, αφού για κάθε $n \in I$,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geq L(\gamma|_{[0,\,1-\frac{1}{n}]}) = \sum_{i=1}^{n-1} L(\gamma|_{[1-\frac{1}{i},\,1-\frac{1}{i+1}]}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \left|(-1)^{i+1}\frac{1}{i} - (-1)^{i+2}\frac{1}{i+1}\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

5. Εξ' ορισμού, μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ με πεδίο ορισμού κάποιο τοπολογικό χώρο X, είναι ισχυρά κάτω ημισυνεχής αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει περιοχή V του x στον X τ.ω.

$$y \in V \Longrightarrow f(y) \geq f(x) - \varepsilon.$$

Το συναρτησοειδές του μήξους L, δεν είναι ισχυρά κάτω ημισυνεχές. Πράγματι, έστω γ η μοναδική καμπύλη του προήγουμενου παραδείγματος με την ιδιότητα η $\gamma|_{[1-\frac{1}{n},\,1-\frac{1}{n+1}]}$ να είναι αφφινική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης t_n το μοναδικό σημείο του $[1 - \frac{1}{n},\, 1 - \frac{1}{n+1}]$ με $\gamma(t_n) = 0$. Τότε η ακολουθία των καμπύλων $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, που ορίζεται από την

$$\gamma_n = \mathbb{1}_{[0,t_n]}\gamma,$$

όπου $\mathbb{1}_{[0,t_n]}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του $[0, t_n]$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην γ και $L(\gamma_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ η ισχυρή κάτω ημισυνέχεια απαιτεί τελικά να ισχύει ότι $L(\gamma_n) = \infty$.

Ορισμός 1.1.2 Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ τοπικά πεπερασμένου μήκους λέγεται γραμμικά παραμετρισμένη ή σταθερής ταχύτητας $\lambda \geq 0$ αν

$$L(\gamma|_{[s\wedge t, s\vee t]}) = \lambda|t - s|$$

για κάθε $s, t \in I$. Αν $\lambda = 1$, τότε η γ λέγεται καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας ή παραμετρισμένη με το μήκος της.

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, κάθε καμπύλη τοπικά πεπερασμένου μήκους, είναι ασθενής αναπαραμέτριση κάποιας καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας.

Πρόταση 1.1.2 *Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη τοπικά πεπερασμένου μήκους στον X. Υπάρχει τότε καμπύλη $\bar{\gamma} : J \longrightarrow X$ σταθερής ταχύτητας και απεικόνιση $\phi : I \longrightarrow J$ μονότονη και επί τ.ω. $\gamma = \bar{\gamma} \circ \phi$.*

Απόδειξη Έστω $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση μήκους της γ ως προς το $t_0 \in I$. Αφού η ϕ είναι συνεχής, το $J := \phi(I)$ είναι διάστημα. Έστω $\backsim$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται στο I από το τον τύπο

$$a \backsim b \iff \phi(a) = \phi(b).$$

Προφανώς η ϕ, και άρα και η γ, είναι σταθερή σε κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\backsim$. Συνεπώς η απεικόνιση $\bar{\gamma} : J \longrightarrow X$ με τύπο

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(s), \quad \text{για κάποιο } s \in \phi^{-1}(t),$$

είναι καλά ορισμένη και προφανώς $\bar{\gamma} \circ \phi = \gamma$. Θα δείξουμε ότι είναι παραμετρισμένη με το μήκος της. Καταρχάς, η $\bar{\gamma}$ είναι συνεχής από αριστερά. Πράγματι, έστω $t \in J$, $t \neq \inf J$ και $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία στο εσωτερικό του J τ.ω. $t_n \longrightarrow t$. Θα δείξουμε ότι $\bar{\gamma}(t_n) \longrightarrow \bar{\gamma}(t)$. Επιλέγουμε $s \in \phi^{-1}(t)$ και $s_n \in \phi^{-1}(t_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αναγκαστικά γνησίως αύξουσα και φραγμένη από πάνω από το $s \in I$, και έτσι συγκλίνει σε κάποιο $s' \in I$, $s' \leq s$. Όμως από τη συνέχεια της ϕ έχουμε ότι

$$\phi(s') = \lim \phi(s_n) = \lim t_n = t,$$

και άρα $s' \in \phi^{-1}(t)$. Συνεπώς,

$$\bar{\gamma}(t_n) = \gamma(s_n) \longrightarrow \gamma(s') = \bar{\gamma}(t).$$

Η συνέχεια της $\bar{\gamma}$ από τα δεξιά αποδεικνύεται ανάλογα. Θα δείξουμε τώρα ότι η $\bar{\gamma}$ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της. Έστω λοιπόν $t_i \in J$, $i = 1, 2$ και $s_i \in \phi^{-1}(t_i)$, $i = 1, 2$. Τότε $t_1 < t_2$ και $\phi([s_1, s_2]) = [t_1, t_2]$, και άρα,

$$\begin{aligned} L(\bar{\gamma}|_{[t_1,t_2]}) &= L(\bar{\gamma}|_{[t_1,t_2]} \circ \phi|_{[s_1,s_2]}) = \\ &= L\left((\bar{\gamma} \circ \phi)|_{[s_1,s_2]}\right) = L(\gamma_{[s_1,s_2]}) = \\ &= \phi(s_2) - \phi(s_1) = t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Συνεπώς η $\bar{\gamma}$ είναι η ζητούμενη καμπύλη. □

Ορισμός 1.1.3 Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ λέγεται απολύτως συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{N}, N \in \mathbb{N}$, ξένων και ανοιχτών υποδιαστημάτων του I, να ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(b_i), \gamma(a_i)) < \varepsilon.$$

Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ λέγεται τοπικά απολύτως συνεχής αν για κάθε $t \in I$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. η $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ να είναι απολύτως συνεχής.

Παρατηρήσεις

6. Κάθε Hölder συνεχής καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ με σταθερά $C \geq 0$ και εκθέτη $p \in [1, \infty)$ είναι απολύτως συνεχής και κάθε απολύτως συνεχής καμπύλη είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ είναι τοπικά απολύτως συνεχής ανν είναι απολύτως συνεχής σε κάθε κλειστό υποδιάστημα J του I.

Απόδειξη. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αν η γ είναι απολύτως συνεχής σε δύο κλειστά διαστήματα $[a, b], [c, d] \subseteq I$ με $a \leq c \leq b \leq d$, τότε είναι απολύτως συνεχής στο $[a, d]$. Έτσι αν το J είναι ένα κλειστό υποδιάστημα του I, από τη συμπάγεια του J μπορούμε να καλύψουμε το J με μια πεπερασμένη ακολουθία διαστημάτων $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{n}$ με $a_{i+1} \leq b_i$, τ.ω. η γ να είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $[a_i, b_i]$, απ' όπου από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται ότι η γ είναι απολύτως συνεχής στο J.

Πρόταση 1.1.3 *Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία απολύτως συνεχής καμπύλη. Αν το μήκος $m(I)$ του I είναι πεπερασμένο, τότε η γ έχει πεπερασμένο μήκος.*

Απόδειξη Αφού η γ είναι απολύτως συνεχής, υπάρχει $\delta \in (0, m(I))$ τ.ω. για κάθε ξένη πεπερασμένη ακολουθία $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$, ανοικτών υποδιαστημάτων του I να έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \leq \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(b_i), \gamma(a_i)) < 1.$$

Επειδή $\delta < m(I)$ υπάρχουν $a, b \in I$ τ.ω. $\delta < b - a$. Έστω $\Delta = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ μία διαμέριση του I τ.ω. $\{a, b\} \subseteq \Delta$. Τότε, $m(I) \geq t_n - t_0 \geq b - a > \delta$. Θέτουμε $k := \left[\frac{t_n - t_0}{\delta}\right]$ το ακέραιο μέρος του $\frac{t_n - t_0}{\delta}$. Προφανώς $1 \leq k \leq \frac{m(I)}{\delta}$. Για κάθε $i = 0, \ldots, k$ θέτουμε $\mu_i = t_0 + i\delta$ και προσθέτουμε στη διαμέριση Δ εκείνα τα σημεία από τα μ_i το οποία δεν περιέχονται ήδη σε αυτήν. Καταλήγουμε έτσι σε μία καινούργια διαμέριση $\Delta' = \{t_0 = s_0 < \cdots < s_m = t_n\}$ του I. Έστω $j_0, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}$ οι ακέραιοι για τους οποίους $s_{j_i} = \mu_i$, $i = 0, \ldots, k$. Αν θέσουμε $j_{k+1} = m$, τότε για κάθε $i = 0, 1, \ldots, k$ έχουμε

$$\sum_{l=j_i+1}^{j_{i+1}} (s_l - s_{l-1}) = s_{j_{i+1}} - s_{j_i} \leq \delta.$$

Έτσι, από την επιλογή του δ έπεται ότι

$$\begin{aligned} L(\gamma; \Delta) &\leq L(\gamma; \Delta') = \sum_{i=1}^{m} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{l=j_i+1}^{j_{i+1}} d(\gamma(s_{l-1}), \gamma(s_l)) \\ &\leq k + 1 \leq \frac{m(I)}{\delta} + 1. \end{aligned}$$

Αφού ο $\frac{m(I)}{\delta} + 1$ δεν εξαρτάται από τη διαμέριση Δ, παίρνοντας το supremum πάνω από όλες τις διαμερίσεις Δ του I που περιέχουν το $\{a, b\}$, έπεται από την παρατήρηση 1 ότι $L(\gamma) \leq \frac{m(I)}{\delta} + 1$. $\square$

Πόρισμα 1.1.1 *Κάθε τοπικά απολύτως συνεχής καμπύλη έχει τοπικά πεπερασμένο μήκος.*

Αργότερα, θα μας χρειαστεί να μπορούμε να συγκολλήσουμε δύο καμπύλες γ, σ μέ κάποιο κοινό άκρο, έτσι ώστε να προκύψει μία νέα καμπύλη της οποίας η εικόνα να είναι η ένωση των εικόνων των γ και σ. Υπάρχουν διάφοροι τέτοιοι τρόποι συγκόλησης. Ο πρώτος που θα δούμε είναι χρησιμότερος για καμπύλες που ορίζονται στο ίδιο διάστημα, π.χ. το [0,1]. Έστω $\gamma, \sigma : [0,1] \longrightarrow X$ δύο καμπύλες τ.ω. $\gamma(1) = \sigma(0)$. Το γινόμενο της γ με την σ είναι η καμπύλη $\gamma * \sigma : [0,1] \longrightarrow X$, με τύπο

$$\gamma * \sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \sigma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Καμπύλες γ, σ που ορίζονται σε διαστήματα $[a,b], [b,c]$ αντίστοιχα, τ.ω. $\gamma(b) = \sigma(b)$, τις συγκολλούμε παίρνοντας την ένωσή τους $\gamma \cup \sigma : [a,c] \longrightarrow X$, η οποία ορίζεται με τον προφανή τρόπο. Προφανώς, από την προσθετικότητα και τη μονοτονία του μήκους κάτω από ασθενής αναπαραμετρίσεις, προκύπτει ότι το συναρτησοειδές του μήκους είναι προσθετικό ως προς και τις δύο αυτές πράξεις.

1.2 Μετρική Παράγωγος

Σ' αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια της μετρικής παραγώγου για καμπύλες σε μετρικούς χώρους, η οποία εκφράζει το μέτρο της ταχύτητας της καμύλης. Έπειτα θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ του μήκους μίας καμπύλης και του ολοκληρώματος της μετρικής της παραγώγου. Σε όσα ακολουθήσουν, ο (X,d) θα είναι ένας αυθαίρετος μετρικός χώρος και το I κάποιο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.2.1 Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη, όχι απαραίτητα συνεχής, και έστω $t_0 \in I$. Η γ θα λέγεται d-παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$, αν το όριο

$$\lim_{t \to t_0} \frac{d(\gamma_t, \gamma_{t_0})}{|t - t_0|} \tag{1.1}$$

υπάρχει, και στην περίπτωση αυτή, η τιμή του ορίου λέγεται η μετρική παράγωγος της γ στο t_0 και συμβολίζεται με $|\gamma'|_d(t_0)$.

Φυσικά, αν το t_0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε το όριο (1.1) ερμηνεύεται ως πλευρικό όριο. Η γ θα λέγεται d-παραγωγίσιμη αν είναι d-παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in I$.

Γενικότερα, ορίζουμε την ανώτερη μετρική παράγωγο $\overline{|}\gamma'|_d$ μίας καμπύλης $\gamma : I \longrightarrow X$ από τον τύπο

$$\overline{|}\gamma'|_d(t) = \limsup_{s \to t} \frac{d(\gamma_t, \gamma_s)}{|t - s|}$$

και την κάτωτερη μετρική παράγωγο από τον τύπο

$$\underline{|}\gamma'|_d(t) = \liminf_{s \to t} \frac{d(\gamma_t, \gamma_s)}{|t - s|}.$$

Παρατηρήσεις

1. Έστω $\gamma : I :\longrightarrow X$ μία όχι απαραίτητα συνεχής καμπύλη. Η ύπαρξη του ορίου (1.1) σε κάποιο σημείο t_0 αρκεί για τη συνέχεια της γ στο t_0. Έτσι, κάθε d-παραγώγισιμη απεικόνιση $\gamma : I :\longrightarrow X$ είναι καμπύλη.
2. Οι αναπαραμετρίσεις ικανοποιούν τον κανόνα της αλυσίδας. Έστω $I, J \subseteq \mathbb{R}$ διαστήματα, $\phi : J \longrightarrow I$ μία απεικόνιση παραγωγίσιμη στο t_0 και $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη d-παραγωγίσιμη στο $\phi(t_0)$. Τότε η $\gamma \circ \phi$ είναι d-παραγωγίσιμη στο t_0, με

$$|(\gamma \circ \phi)'|(t_0) = |\gamma'|\big(\phi(t_0)\big)|\phi'(t_0)|.$$

Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας για πραγματικές συναρτήσεις.

Παραδείγματα

1. Έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ η καμπύλη με τύπο

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1-t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Προφανώς, η γ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$. Ωστόσο είναι d-παραγωγίσιμη εκεί, και $|\gamma'|_d \equiv 1$ στο $[0,1]$.

2. Χώροι με Νόρμα

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Θεωρούμε τον X ως μετρικό χώρο με τη μετρική $d = d_{\|\cdot\|}$ που επάγεται από την $\|\cdot\|$. Προφανώς, αν μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ είναι παραγωγίσιμη στο $t \in I$ με παράγωγο $\gamma'(t) \in X$, τότε είναι και d-παραγωγίσιμη με $|\gamma'|_d(t) = \|\gamma'(t)\|$.

3. Πολλαπλότητες Riemann

Έστω (M, g) μία συνεκτική πολλαπλότητα Riemann. Ως συνήθως, θα συμβολίζουμε με $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ το εσωτερικό γινόμενο g_p του T_pM, και με $\|\cdot\|_p$ την επαγόμενη νόρμα. Επίσης, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα παραλείπουμε το σημείο $p \in M$ από τον συμβολισμό. Το ρημάννειο μήκος $L_R(\gamma)$ μίας κατά τμήματα C^1 καμπύλης $\gamma : I \longrightarrow M$ ορίζεται ως

$$L_R(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Θέτουμε $C^1(x,y)$ το σύνολο όλων των κατά τμήματα C^1 καμπύλων $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ με $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$. Όπως ξέρουμε, $C^1(x,y) \neq \emptyset$ για κάθε $x, y \in M$ και η M γίνεται μετρικός χώρος αν εφοδιαστεί με τη μετρική $d_g : M \times M \longrightarrow [0,\infty]$ με τύπο

$$d_g(x,y) = \inf\{L_R(\gamma) | \gamma \in C^1(x,y)\}.$$

Η d_g λέγεται η επαγόμενη μετρική από τη g και όποτε θεωρούμε μία πολλαπλότητα Riemann ως μετρικό χώρο, θα τη θεωρούμε εφοδιασμένη με τη μετρική d_g. Για απλότητα στο συμβολισμό, θα γράφουμε d αντί d_g.

Θα δείξουμε ότι κάθε C^1 καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow M$ είναι d-παραγωγίσιμη, με $|\gamma|_d = \|\dot{\gamma}\|_\gamma$. Έστω $t_0 \in I$. Θέτουμε $p := \gamma(t_0)$. Έστω $U \subseteq T_pM$ μία περιοχή του $0 \in T_pM$, τ.ω. η εκθετική απεικόνιση $\exp_p$ να ορίζεται και να είναι αμφιδιαφόριση από την U σε μία ανοικτή περιοχή W του $p \in M$. Τότε, η $\sigma := \exp_p^{-1} \circ \gamma$ είναι καλά ορισμένη και C^1 σε μία περιοχή του t_0, και

$$\dot{\sigma}(t_0) = \left(\exp_p^{-1}\right)_{*p}\big(\dot{\gamma}(t_0)\big) = \dot{\gamma}(t_0). \tag{1.2}$$

Όμως για κάθε $q \in W$, η μοναδική ελάχιστη γεωδαισιακή σ_q από το p στο q δίνεται από τον τύπο $[0,1] \ni t \mapsto \exp_p\left(t \exp_p^{-1} q\right)$ και έχει μήκος $L_R(\sigma_q) = \|\exp_p^{-1} q\| = d(p,q)$. Συνεπώς, για κάθε $t \neq t_0$ αρκετά κοντά στο t_0 έχουμε ότι

$$\frac{d(\gamma_{t_0}, \gamma_t)}{|t - t_0|} = \frac{\|\exp_p^{-1} \gamma(t)\|_p}{|t - t_0|} = \frac{\|\sigma(t_0) - \sigma(t)\|_p}{|t - t_0|}.$$

Έτσι, παίρνοντας όριο καθώς $t \to t_0$, και λαμβάνοντας υπόψιν την (1.2), παίρνουμε το ζητούμενο.

Περνάμε τώρα στη μελέτη της σχέσης μεταξύ του μήκους μίας καμπύλης και του ολοκληρώματος της μετρικής της παραγώγου. Συγκεκριμένα, ρωτάμε το εξής. Για ποιες καμπύλες $\gamma : I \longrightarrow X$ ισχύει ότι

$$L(\gamma|_{[s,t]}) = \int_s^t |\gamma'| dm \tag{1.3}$$

για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$; Το επόμενο λήμμα μάς δείχνει σε ποια κλάση καμπύλων πρέπει να κοιτάξουμε για την απάντηση.

Λήμμα 1.2.1 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\gamma : I \longrightarrow X$ καμπύλη τοπικά πεπερασμένου μήκους. Αν η $|\gamma'|$ ορίζεται σχεδόν παντού (σ.π.) στο I (ως προς το μέτρο* Lebesque m*) και για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ η (1.3) ισχύει, τότε η γ είναι τοπικά απολύτως συνεχής.*

Απόδειξη Έστω $J := [a,b] \subseteq I$ διάστημα. Θα δείξουμε ότι η γ είναι απολύτως συνεχής στο J. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η γ έχει τοπικά πεπερασμένο μήκος, από την (1.3) έχουμε ότι

$$\int_J |\gamma'| dm = L(\gamma|_J) < \infty.$$

Συνεπώς $|\gamma'|_d \in L^1(J, m)$ και άρα υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$E \in \mathcal{B}(J),\ m(E) < \delta \implies \int_E |\gamma'| dm < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε ξένη και πεπερασμένη ακολουθία $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^N$, $N \in \mathbb{N}$, ανοικτών υποδιαστημάτων του J με $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N d\big(\gamma(a_i), \gamma(b_i)\big) &\leq \sum_{i=1}^N L([a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} |\gamma'| dm \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)} |\gamma'| dm < \varepsilon, \end{aligned}$$

αφού $\bigcup_{i=1}^N (a_i,b_i) \in \mathcal{B}(J)$ και $m\big(\bigcup_{i=1}^N (a_i,b_i)\big) = \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$. $\square$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το αντίστροφο είναι επίσης αληθές. Ξεκινάμε με ένα προκαταρκτικό λήμμα.

Λήμμα 1.2.2 *Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη στο μετρικό χώρο X. Τότε η ανώτερη και η κατώτερη μετρική παράγωγος της γ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.*

Απόδειξη Θα δούμε την απόδειξη μόνο για την κατώτερη παράγωγο. Η μετρησιμότητα της κατώτερης παραγώγου αποδεικνύεται ανάλογα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $I_n := (\inf I + \frac{1}{n}, \sup I - \frac{1}{n})$ και $Q_n := (\mathbb{Q}\setminus\{0\}) \cap (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\Delta_n : I_n \longrightarrow [0,\infty)$ από τον τύπο

$$\Delta_n(t) = \inf_{h \in Q_n} \left\{ \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|} \right\}.$$

Τώρα, από τη συνέχεια της απεικόνισης

$$(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \setminus \{0\} \ni h \mapsto \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|},$$

έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $t \in I_n$,

$$\Delta_n(t) = \inf_{0<|h|<\frac{1}{n}} \left\{ \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|} \right\}.$$

Έτσι, αν $g_n : I \longrightarrow [0,\infty)$ η συνάρτηση με τύπο $g_n(t) = \Delta_n(t)$, αν $t \in I_n$ και $g_n(t) = 0$, αν $t \in I \setminus I_n$, τότε $g_n \nearrow \underline{|\gamma'|}$ στο $\mathrm{int} I$. Άρα αν δείξουμε ότι κάθε μια από τις g_n είναι μετρήσιμη, τότε η $\underline{|\gamma'|}$ θα είναι μετρήσιμη ως κατά σημείο όριο μετρήσιμων συναρτήσεων. Αλλά για να αποδείξουμε ότι η g_n είναι μετρήσιμη, αρκεί να αποδείξουμε ότι η Δ_n είναι μετρήσιμη. Έστω λοιπόν $M \geq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-1}\big([M,\infty)\big) &= \big\{t \in I_n |\, \Delta_n(t) \geq M\big\} \\ &= \bigcap_{h \in Q_n} \big\{t \in I_n |\, d(\gamma_{t+h}, \gamma_t) \geq |h| M\big\}. \end{aligned}$$

Όμως για κάθε $h \in Q_n$, η συνάρτηση $I_n \ni t \mapsto d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)$ είναι συνεχής και άρα για κάθε $h \in Q_n$, το σύνολο $A_h := \{t \in I_n |\, d(\gamma_{t+h}, \gamma_t) \geq |h|M\}$ είναι μετρήσιμο. Συνεπώς, το σύνολο $\Delta_n^{-1}\big([M,\infty)\big) = \bigcap_{h \in Q_n} A_h$ είναι μετρήσιμο ως αριθμήσιμη τομή μετρήσιμων συνόλων, και άρα η Δ_n είναι μετρήσιμη όπως ζητούσαμε. $\square$

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη. Τότε η γ είναι τοπικά απολύτως συνεχής ανν η $|\gamma'|_d$ είναι σ.π. ορισμένη στο I και για κάθε $s,t \in I$ με $s \leq t$, έχουμε ότι*

$$L_d(\gamma|_{[s,t]}) = \int_s^t |\gamma'|_d dm.$$

Απόδειξη Η μία συνεπαγωγή είναι το περιεχόμενο του λήμματος 1.2.1. Έστω $J = [a,b] \subseteq I$ τυχόν κλειστό υποδιάστημα του I. Αφού η γ είναι συνεχής, το $\gamma(J)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X και άρα διαχωρίσιμο. Έστω $\{x_n |\, n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\gamma(J)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε μία συνάρτηση $\phi_n : J \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\phi_n(t) = d(x_n, \gamma_t)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $t, s \in J$ έχουμε

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| = |d(x_n, \gamma_t) - d(x_n, \gamma_s)| \leq d(\gamma_t, \gamma_s). \tag{1.4}$$

Συνεπώς, αφού η γ είναι απολύτως συνεχής, η ϕ_n είναι επίσης απολύτως συνεχής, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για το ολοκλήρωμα Lebesque, έπεται ότι η ϕ_n είναι σ.π. παραγωγίσιμη στο J, με $\phi_n' \in L^1(J, m)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα, θέτουμε $\psi := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n'|$ και θα δείξουμε ότι $\psi \in L^1(J, m)$ και ότι $|\gamma'|_d = \psi$ σ.π. στο J.

Καταρχάς, από την (1.4) έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $t \in J$,

$$\underline{|}\gamma'|_d(t) = \liminf_{s\to t} \frac{d(\gamma_t, \gamma_s)}{|t-s|} \geq \liminf_{s\to t} \frac{|\phi_n(t) - \phi_n(s)|}{|t-s|} = |\phi_n'(t)|,$$

και, έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\underline{|}\gamma'|_d \geq \phi_n'$ σ.π. στο J. Συνεπώς,

$$\psi \leq \underline{|}\gamma'|_d \ \text{ σ.π. στο } J \tag{1.5}$$

Τώρα, από το πόρισμα 1.1.1, η γ έχει τοπικά πεπερασμένο μήκος, και άρα αν δείξουμε ότι $\int_J \underline{|}\gamma'|_d dm \leq L_d(\gamma|_J)$, θα συναγάγουμε από την (1.5), ότι $\psi \in L^1(J, m)$. Έστω $\varepsilon \in (0, \frac{b-a}{2})$. Ολοκληρώνοντας την $\underline{|}\gamma'|_d$ στο $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \underline{|}\gamma'|_d(t)dm(t) &= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \liminf_{h\to 0} \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|} dm(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \inf_{0<|h|<\frac{1}{n}} \left\{ \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|} \right\} dm(t) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{0<|h|<\frac{1}{n}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|} dm(t) \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{1}{|h|} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} d(\gamma_{t+h}, \gamma_t) dm(t)
\end{aligned}$$

Για κάθε $|h| < \varepsilon$, θέτουμε $k_h := \left[\frac{b-a-2\varepsilon}{|h|}\right]$ και θεωρούμε τη διαμέριση Δ_h του $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ που ορίζεται από τα σημεία

$$t_i^h = a + \varepsilon + i|h|,\ 0 \leq i \leq k_h, \quad t_{k_h+1} = b - \varepsilon.$$

Επίσης, θέτουμε $\upsilon_h := t_{k_h+1} - t_{k_h}^h \leq |h|$ και θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$[t_i^h, t_{i+1}^h] \ni t \xmapsto{f_i^h} d\big(\gamma(t+h), \gamma(t)\big), \quad 1 \leq i \leq k_h,$$

$$[0, |h|] \ni t \overset{g_i^h}{\mapsto} d\big(\gamma(t_i + t), \gamma(t_{i+1} + t)\big), \quad 1 \leq i \leq k_h - 1,$$

$$[0, \upsilon_h] \ni t \overset{g_{k_h}^h}{\mapsto} d\big(\gamma(t_{k_h} + t), \gamma(t_{k_h+1} + t)\big).$$

Τώρα, αν για κάθε $1 \leq i \leq k_h$, η $u_i^h : \mathrm{dom} f_i^h \longrightarrow \mathrm{dom} g_i^h$ είναι η μοναδική αφφινική απεικόνιση που διατηρεί τον προσανατολισμό και απεικονίζει το $\mathrm{dom} f_i^h$ στο $\mathrm{dom} g_i^h$, τότε

$f_i^h = g_i^h \circ u_i^h$ και $u_i^{h\prime} \equiv 1$ για κάθε $1 \le i \le k_h$. Συνεπώς, από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} d(\gamma_{t+h}, \gamma_t) dt &= \sum_{i=0}^{k_h} \int_{t_i^h}^{t_{i+1}^h} f_i^h dm = \sum_{i=0}^{k_h} \int g_i^h dm \\
&= \sum_{i=0}^{k_h - 1} \int_0^{|h|} g_i^h dm + \int_0^{\upsilon_h} g_{k_h}^h dm \\
&= \int_0^{|h|} \sum_{i=0}^{k_h - 1} d\big(\gamma(t_i + t), \gamma(t_{i+1} + t)\big) dt \\
&+ \int_0^{\upsilon_h} d\big(\gamma(t_{k_h} + t), \gamma(t_{k_h + 1} + t)\big) dt \\
&\le \int_0^{|h|} L(\gamma|_J) dm + \int_0^{\upsilon_h} L(\gamma|_{[b-2\varepsilon, b]}) dm \\
&= |h| L(\gamma|_J) + \upsilon_h L(\gamma|_{[b-2\varepsilon, b]})
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \underline{|}\gamma'|_d(t) dm(t) &\le \liminf_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} d(\gamma_{t+h}, \gamma_t) dm(t) \\
&\le L(\gamma|_J) + L(\gamma|_{[b-2\varepsilon, b]}) \liminf_{h \to 0} \frac{\upsilon_h}{|h|} \\
&\le L(\gamma|_J) + L(\gamma|_{[b-2\varepsilon, b]}),
\end{aligned}$$

αφού $\upsilon_h \le |h|$ για κάθε $|h| < \varepsilon$. Παίρνοντας όριο καθώς το $\varepsilon \to 0$, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και η συνέχεια της συνάρτησης μήκους της γ μας δίνουν ότι $\int_J \underline{|}\gamma'|_d dm \le L(\gamma|_J) < \infty$ και ειδικότερα ότι $\psi \in L^1(J, m)$.

Τώρα, για να δείξουμε ότι $|\gamma'|_d = \psi$ σ.π. στο J, απομένει να δείξουμε ότι $\overline{|}\gamma'|_d \le \psi$ σ.π. στο J. Καταρχάς, για κάθε $s, t \in J$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
d(\gamma_s, \gamma_t) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \big| d(x_n, \gamma_s) - d(x_n, \gamma_t) \big| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_{s \wedge t}^{s \vee t} \phi_n' dm \right| \\
&\le \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{s \wedge t}^{s \vee t} |\phi_n'| dm \le \int_{s \wedge t}^{s \vee t} \psi dm \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Αφού $\psi \in L^1(J, m)$, σχεδόν κάθε $t \in J$ είναι σημείο Lebesgue της ψ και έτσι

$$\overline{|}\gamma'|_d(t) = \limsup_{s \to t} \frac{d(\gamma_s, \gamma_t)}{|t - s|} \le \limsup_{s \to t} \frac{1}{|t - s|} \int_{s \wedge t}^{s \vee t} \psi dm = \psi(t),$$

σχεδόν για κάθε $t \in J$. Αφού $\psi(t) \le \underline{|}\gamma'|_d(t) \le \overline{|}\gamma'|_d(t) \le \psi(t)$, σ.π. στο J, έπεται ότι η $|\gamma'|_d$ είναι σ.π. ορισμένη με $|\gamma'|_d = \psi$. Απομένει να δείξουμε ότι $L(\gamma|_J) = \int_J |\gamma'|_d dm$. Έχουμε ήδη δείξει ότι $\int_J |\gamma'|_d dm \le L(\gamma|_J)$. Για την αντίστροφη ανισότητα, παρατηρούμε ότι από την (1.6), για κάθε διαμέριση $\Delta = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ του J έχουμε

$$L_d(\gamma|_J; \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\gamma_{t_{i-1}}, \gamma_{t_i}) \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi dm = \int_J \psi dm,$$

και παίρνοντας supremum πάνω από όλες τις διαμερίσεις Δ του J παίρνουμε ότι $L_d(\gamma|_J) \leq \int_J \psi dm = \int_J |\gamma'|_d dm$ και η απόδειξη έχει τελειώσει. $\square$

Παρατηρήσεις

1. Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$ είναι απολύτως συνεχής ανν υπάρχει $\phi \in L^1(I, m)$ τ.ω.

$$d(\gamma_s, \gamma_t) \leq \int_{s\wedge t}^{s\vee t} \phi dm \tag{1.7}$$

για κάθε $s, t \in I$, και σ' αυτήν την περίπτωση η $|\gamma'|_d$ είναι η ελάχιστη αποδεκτή συνάρτηση στην (1.7), με την έννοια ότι για κάθε αποδεκτή συνάρτηση ϕ στην (1.7), έχουμε ότι $|\gamma'|_d \leq \phi$ σ.π. στο I.

2. Η ύπαρξη σ.π. και η ολοκληρωσιμότητα της $|\gamma'|$ δεν εξασφαλίζουν την ισχύ της (1.3) όπως μας δείχνει η συνάρτηση Cantor – Lebesgue. Από την άλλη, αν η $|\gamma'|$ είναι παντού ορισμένη και φραγμένη, τότε η γ είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $\sup_{t\in I} |\gamma'|(t)$.

Το ακόλουθο πόρισμα αποδεικνύεται εύκολα και χωρίς τη χρήση της έννοιας της μετρικής παραγώγου.

Πόρισμα 1.2.1 *Έστω (M, g) μία πολλαπλότητα Riemann και $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ μία C^1 καμπύλη. Το ρημάννειο μήκος $L_R(\gamma)$ της γ, ισούται με το μήκος $L_{d_g}(\gamma)$ της γ, ως προς την επαγόμενη μετρική d_g*

Απόδειξη Αφού η γ είναι C^1 και ορίζεται σε κλειστό διάστημα, είναι Lipschitz και, συνεπώς, απολύτως συνεχής. Έτσι, από το παράδειγμα 3 αυτής της παραγράφου και το θεώρημα 1.2.1, έπεται ότι

$$L_R(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b |\gamma'|_{d_g}(t) dt = L_{d_g}(\gamma),$$

όπως ζητούσαμε. $\square$

1.3 Γεωδαισιακές και Γεωδαισιακοί Χώροι

Σ' αυτή την παράγραφο θα δούμε τον ακριβή ορισμό των γεωδαισιακών, κάποιους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς τους και τις βασικές τους ιδιότητες. Αν δεν αναφέρεται αλλιώς, ο X θα είναι ένας αυθαίρετος μετρικός χώρος.

Ορισμός 1.3.1 Μία καμπύλη $\gamma : [a, b] \to X$ από το $x \in X$ στο $y \in X$ λέγεται γεωδαισιακή αν έχει σταθερή ταχύτητα και $L(\gamma) = d(x, y)$. Ένα γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει δύο σημεία $x, y \in X$ είναι η εικόνα κάποιας γεωδαισιακής που συνδέει τα x, y. Μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$, όπου το I είναι κάποιο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ λέγεται γεωδαισιακή, αν η $\gamma|_{[a,b]}$ είναι γεωδαισιακή για κάθε $[a, b] \subseteq I$.

Μία τοπική γεωδαισιακή στον X είναι μία καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow X$, ορισμένη σε κάποιο υποδιάστημα I του $\mathbb{R}$ τ.ω. για κάθε $t \in I$ να υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. η $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ να είναι γεωδαισιακή.

Συχνά συμβολίζουμε ένα γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα $x, y \in X$ με $[x, y]$ ή xy. Φυσικά το τμήμα αυτό, αν υπάρχει, δεν είναι απαραίτητα μοναδικό.

Παρατηρήσεις

1. Η ένωση δύο γεωδαισιακών τμημάτων $[x, z], [z, y] \subseteq X$ με κοινό άκρο το z, είναι γεωδαισιακό τμήμα ανν $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής. Για την αντίστροφη, έστω γ, σ δύο γεωδαισιακές ορισμένες στο $[0, 1]$ οι οποίες παραμετρικοποιούν τα $[x, z]$ και $[z, y]$ αντίστοιχα. Έστω u μία παραμέτριση της συγκόλλισης των σ και γ με σταθερή ταχύτητα. Τότε από την πρόταση 1.1.1, έχουμε ότι $L(u) = L(\sigma) + L(\gamma) = d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ και έτσι η u είναι γεωδαισιακή.

2. Έστω $x, y \in X$. Υπάρχει τότε μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα x, y ανν υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ τ.ω.

$$G(x, y) := \{z \in X \,|\, d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \subseteq \mathrm{Im}\gamma.$$

3. Κάθε τοπική γεωδαισιακή $\gamma : I \longrightarrow X$ είναι d-παραγωγίσιμη με σταθερή μετρική παράγωγο.

Απόδειξη. Έστω $t_0 \in I$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. η $\gamma_{I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ να είναι γεωδαισιακή. Τότε, από το (δ) της επόμενης πρότασης, $|\gamma'|_d|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)} \equiv \lambda$ για κάποιο $\lambda \geq 0$. Όμως το σύνολο $A := \{t \in I \,|\, |\gamma'|_d(t) = \lambda\}$ είναι μη-κενό, ανοικτό και κλειστό, και άρα $A = I$.

Οι επόμενοι προφανείς ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί των γεωδαισιακών είναι χρήσιμοι.

Πρόταση 1.3.1 *Έστω $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ μία καμπύλη. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Η γ είναι γεωδαισιακή.*

(β) *Η γ έχει σταθερή ταχύτητα και $L(\gamma|_{[s \wedge t, s \vee t]}) = d(\gamma_t, \gamma_s)$ για κάθε $s, t \in [a, b]$.*

(γ) *Η γ έχει σταθερή ταχύτητα και*

$$d(\gamma_r, \gamma_t) = d(\gamma_r, \gamma_s) + d(\gamma_s, \gamma_t),$$

για κάθε $a \leq r \leq s \leq t \leq b$.

(δ) *Υπάρχει $\lambda \geq 0$, τ.ω. $d(\gamma_t, \gamma_s) = \lambda|t - s|$, για κάθε $s, t \in [a, b]$.*

(ε) *Η γ είναι* Lipschitz *με σταθερά* Lipschitz $\leq \frac{d(\gamma_b, \gamma_a)}{|b-a|}$.

Απόδειξη Είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη. □

Υπάρχει άλλος ένας χαρακτηρισμός των γεωδαισιακών μέσω της έννοιας των μέσων.

Ορισμός 1.3.2 Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $x, y \in X$. Ένα σημείο $m \in X$ λέγεται μέσο των x, y αν

$$d(x,m) = d(m,y) = \frac{1}{2}d(x,y). \tag{1.8}$$

Το σύνολο όλων των μέσων των $x, y \in X$ συμβολίζεται με $M(x,y)$.

Μία απείκονιση μέσων σε ένα μετρικό χώρο (X,d) είναι μία συμμετρική απεικόνιση $m : X \times X \longrightarrow X$ τ.ω. $m(x,x) = x$ για κάθε $x \in X$ και

$$d(x, m(x,y)) = d(m(x,y), y) = \frac{1}{2}d(x,y),$$

για κάθε $x, y \in X$.

Σημειώνουμε ότι για κάθε $x, y \in X$, έχουμε ότι

$$M(x,y) = B\Big(x, \frac{d(x,y)}{2}\Big) \cap B\Big(y, \frac{d(x,y)}{2}\Big).$$

Πρόταση 1.3.2 *Έστω I υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ και $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη στο μετρικό χώρο X. Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή ανν το $\gamma\big(\frac{t+s}{2}\big)$ είναι μέσο των γ_t και γ_s, για κάθε $s, t \in I$.*

Απόδειξη Έστω $[a,b]$ ένα υποδιάστημα του I. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $k = 0, \dots, 2^n - 1$, έχουμε ότι

$$d\bigg(\gamma\Big(a + k\frac{b-a}{2^n}\Big), \gamma\Big(a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}\Big)\bigg) = \frac{1}{2^n}d(\gamma_a, \gamma_b). \tag{1.9}$$

Έστω D το σύνολο όλων των αριθμών της μορφής $a + k\frac{b-a}{2^n}$, $k = 0, \dots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $(b-a)d(\gamma_s, \gamma_t) = (t-s)d(\gamma_a, \gamma_b)$ για κάθε $s, t \in D$. Προφανώς αφού το D είναι πυκνό στο $[a,b]$, αυτό θα μας δώσει ότι η $\gamma|_{[a,b]}$ είναι γεωδαισιακή. Έστω λοιπόν $s, t \in D$, ας πούμε $s < t$. Για κάποιο αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε $s = a + k\frac{b-a}{2^n}$, $t = a + \ell\frac{b-a}{2^n}$, $k, \ell = 0, \dots, 2^n$, $k < \ell$. Τότε, από την (1.9) έπεται ότι

$$d(\gamma_s, \gamma_t) = \frac{\ell - k}{2^n}d(\gamma_a, \gamma_b) = \frac{t-s}{b-a}d(\gamma_a, \gamma_b),$$

όπως ζητούσαμε. □

Ορισμός 1.3.3 Έστω C ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου X. Το C λέγεται ασθενώς κυρτό, αν για κάθε $x, y \in C$ υπάρχει γεωδαισιακή από το x στο y, της οποίας η τροχιά περιέχεται στο C.

Ένα σύνολο $C \subseteq X$ λέγεται κυρτό, αν για κάθε $x, y \in C$ υπάρχει γεωδαισιακή από το x στο y, και η τροχιά κάθε τέτοιας γεωδαισιακής περιέχεται στο C. Αν το X είναι κυρτό, τότε ο X λέγεται γεωδαισιακός χώρος. Ο X λέγεται ε-γεωδαισιακός, $\varepsilon > 0$, αν κάθε ζευγάρι σημείων με απόσταση $< \varepsilon$ μπορεί να ενωθεί με μία γεωδαισιακή. Ο X λέγεται μονοσήμαντα γεωδαισιακός αν κάθε ζευγάρι x, y σημείων του X συνδέεται από ακριβώς ένα γεωδαισιακό τμήμα.

Φυσικά σε μονοσήμαντα γεωδαισιακούς χώρους X η έννοια της ασθενούς κυρτότητας συμπίπτει με την έννοια της κυρτότητας. Παρατηρήστε ότι σύμφωνα με τους ορισμούς, ένα γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει δύο σημεία x, y δεν είναι απαραίτητα κυρτό σύνολο, εκτός κι αν είναι το μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα x, y. Ωστόσο, είναι πάντοτε ασθενώς κυρτό. Προφανώς, αν $\{C_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του X, τότε η τομή της $\bigcap_{i\in I} C_i$ είναι κυρτό σύνολο. Από την άλλη, όπως θα δούμε στο επόμενα παραδείγματα, η τομή ασθενώς κυρτών συνόλων δεν είναι απαραίτητα ασθενώς κυρτό σύνολο. Τέλος, είναι προφανές ότι αν ένα υποσύνολο C ενός μετρικού χώρου X είναι ασθενώς κυρτό, τότε το C γίνεται γεωδαισιακός χώρος αν εφοδιαστεί με τον περιορισμό της μετρικής του X στο C.

Παραδείγματα

1. Έστω S^n η n-διάστατη μοναδιαία σφαίρα εφοδιασμένη με τον περιορισμό της Ευκλείδιας μετρικής του $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε κανένα ζεύγος σημείων της S^n δε συνδέεται με κάποιο γεωδαισιακό τμήμα. Από την άλλη, αν $\mathbb{S}^n$ είναι η n-διάστατη μοναδιαία σφαίρα εφοδιασμένη με τη μετρική d η οποία αντιστοιχεί σε κάθε $x, y \in \mathbb{S}^n$ το μήκος ενός ελαχιστικού τμήματος ενός μέγιστου κύκλου που ορίζεται από το $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ και τα $x, y \in \mathbb{S}^n$, τότε κάθε ζεύγος σημείων της $\mathbb{S}^n$ συνδέεται με (τουλάχιστον ένα) γεωδαισιακό τμήμα. Η d δίνεται από τον τύπο $d(x, y) = \arccos\langle x, y\rangle$. Συνεπώς η $\mathbb{S}^n$ είναι γεωδαισιακός χώρος.

2. Έστω γ ένα γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει το βόρειο πόλο $e_{n+1} \in \mathbb{S}^n$ με το νότιο πόλο $-e_{n+1} \in \mathbb{S}^n$. Προφανώς το γ δεν είναι κυρτό σύνολο. Μάλιστα το μοναδικό κυρτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$, που περιέχει το $\{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$, είναι ολόκληρη η $\mathbb{S}^n$. Έστω σ κάποιο άλλο γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα e_{n+1} και $-e_{n+1}$. Τότε, τα γ και σ είναι ασθενώς κυρτά, αλλά η τομή τους $\gamma \cap \sigma = \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$ είναι μη-συνεκτικό, και άρα όχι ασθενώς κυρτό σύνολο.

3. Χώροι με νόρμα

Θεωρούμε το χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ ως μετρικό χώρο με την επαγόμενη μετρική $d = d_{\|\cdot\|}$. Τότε, κάθε ζεύγος σημείων x, y του X συνδέονται από το γεωδαισιακό τμήμα $[x, y] = \{(1-t)x + ty \,|\, 0 \le t \le 1\}$. Συνεπώς κάθε χώρος με νόρμα είναι γεωδαισιακός χώρος. Ωστόσο, σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, το γεωδαισιακό αυτό τμήμα δεν είναι το μοναδικό που συνδέει τα x, y, εκτός κι αν η μοναδιαία μπάλα του X είναι αυστηρά κυρτή.

Πρόταση 1.3.3 *Κάθε χώρος με νόρμα X είναι γεωδαισιακός χώρος. Είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός ανν η νόρμα του είναι αυστηρά κυρτή, δηλαδή ανν για κάθε $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$, ισχύει ότι $\|ty + (1-t)x\| < 1$, για κάθε $0 < t < 1$.*

Απόδειξη Για κάθε $x, y \in X$, έστω $[x, y]$ το γραμμικό τμήμα που συνδέει το x με το y. Σύμφωνα με την παρατήρηση 2, ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός ανν για κάθε $x, y \in X$, έχουμε ότι

$$G(x, y) := \{z \in X \,|\, d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \subseteq [x, y].$$

Αυτό όμως ισχύει ανν για κάθε ζευγάρι γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, $\upsilon_1, \upsilon_2 \in X$, ισχύει ότι

$$\|\upsilon_1 + \upsilon_2\| < \|\upsilon_1\| + \|\upsilon_2\|. \tag{1.10}$$

Πράγματι, αν υπάρχει $z \in G(x, y) \setminus [x, y]$, τότε αναγκαστικά το z δεν ανήκει στην ευθεία $\{(1-t)x + ty \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ που ορίζουν τα $x, y \in X$. Όμως τότε τα διανύσματα $\upsilon_1 := x - z$ και $\upsilon_2 = z - y$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\|\upsilon_1 + \upsilon_2\| = \|\upsilon_1\| + \|\upsilon_2\|$. Αντίστροφα, αν υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\upsilon_1, \upsilon_2 \in X$ τ.ω. $\|\upsilon_1 + \upsilon_2\| = \|\upsilon_1\| + \|\upsilon_2\|$ και θέσουμε $x = 0$, $y = \upsilon_1 + \upsilon_2$ και $z = \upsilon_1$, τότε το z δεν ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα x, y, αλλά παρ' όλα αυτά,

$$d(x, z) + d(z, y) = \|\upsilon_1\| + \|\upsilon_2\| = \|\upsilon_1 + \upsilon_2\| = d(x, y),$$

δηλαδή $z \in G(x, y) \setminus [x, y]$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η νόρμα του X είναι αυστηρά κυρτή ανν η (1.10) ισχύει για κάθε ζευγάρι $\upsilon_1, \upsilon_2 \in X$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Υποθέτουμε πρώτα ότι η νόρμα του X είναι αυστηρά κυρτή. Έστω $\upsilon_1, \upsilon_2 \in X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Θέτουμε $\alpha_i := \|\upsilon_i\|$ και $u_i := 1/\alpha_i \cdot \upsilon_i$, $i = 1, 2$. Τότε $u_1 \neq u_2$, και έτσι από την αυστηρή κυρτότητα της $\|\cdot\|$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\upsilon_1 + \upsilon_2\| &= \|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\| = (\alpha_1 + \alpha_2)\left\|\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} u_2\right\| \\ &< \alpha_1 + \alpha_2 = \|\upsilon_1\| + \|\upsilon_2\|.\end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω $x, y \in X$, $x \neq y$ τ.ω. $\|x\| = \|y\| = 1$. Τότε, είτε $y = -x$, είτε τα x, y είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $y = -x$, τότε προφανώς $\|ty + (1-t)x\| < 1$, για κάθε $t \in (0, 1)$. Από την άλλη, αν τα x, y είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα ty και $(1-t)x$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα, και άρα για κάθε $t \in (0, 1)$, έχουμε ότι

$$\|ty + (1-t)x\| < |t|\|y\| + |1-t|\|x\| = t + (1-t) = 1,$$

όπως θέλαμε. □

4. Πολλαπλότητες Riemann

Η ορολογία που έχουμε υιοθετήσει για τις γεωδαισιακές και τις τοπικές γεωδαισιακές είναι η καθιερωμένη ορόλογια στη μετρική γεωμετρία. Ωστόσο, η ορολογία αυτή δεν είναι σε πλήρη συμφωνία με την αντίστοιχη ορολογία της Γεωμετρίας Riemann. Πράγματι, οι γεωδαισιακές σε μία πολλαπλότητα Riemann (M, g), όπως ορίζονται στη γεωμετρία Riemann, δηλαδή οι γεωδαισιακές της συνοχής Levi – Civita, ελαχιστοποιούν το μήκος μόνο τοπικά, ενώ οι γεωδαισιακές όπως ορίστηκαν εδώ, ελαχιστοποιούν το μήκος ολικά. Όπως θα δούμε, οι έννοιες γεωδαισιακή και τοπική γεωδαισιακή της Μετρικής Γεωμετρίας, αντιστοιχούν στις έννοιες ελάχιστη γεωδαισιακή και γεωδαισιακή της γεωμετρίας Riemann, αντίστοιχα.

Πριν το αποδείξουμε αυτό, ας υπενθυμίσουμε το θεώρημα του Whitehead από τη γεωμετρία Riemann: Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann. Τότε για κάθε $p \in M$, υπάρχει $\varepsilon_p > 0$ τ.ω. για κάθε $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_p$, να υπάρχει ανοικτή μπάλα $W = D(p, \delta)$ του p τ.ω.

(α) Η $W \subseteq M$ είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακή και κυρτή με την έννοια της γεωμετρίας Riemann, δηλαδή κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in W$, ενώνεται με μία μοναδική ελάχιστη ρημάννεια γεωδαισιακή, της οποίας η εικόνα περιέχεται στην W

(β) $W \subseteq D(q, \varepsilon)$ για κάθε $q \in W$, και

(γ) η εκθετική απεικόνιση $\exp_q : D(0_q, \varepsilon) \to D(q, \varepsilon)$ είναι αμφιδιαφόριση για κάθε $q \in W$.

Κάθε περιοχή $W \subseteq M$ του $p \in M$ που ικανοποιεί τα (α),(β) και (γ), για κάποιο $\varepsilon \leq \varepsilon_p$, θα τη λέμε ε-ομοιόμορφα κανονική και γεωδαισιακά κυρτή περιοχή του p. Μάλιστα, για κάθε $p \in M$ και κάθε $\varepsilon < \varepsilon_p$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ τ.ω. η οικογένεια $\{D(p, \delta)\}_{0<\delta<\delta_0}$ ειναι βάση ε-ομοιόμορφα κανονικών και γεωδαισιακά κυρτών περιοχών στο p.

Πρόταση 1.3.4 *Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και έστω $d = d_g$ η επαγόμενη συνάρτηση απόστασης στην M. Τότε:*

(α) Μία καμπύλη $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ είναι γεωδαισιακή ως προς τη d ανν είναι ελάχιστη γεωδαισιακή ως προς τη g.

(β) Μία καμπύλη $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ είναι τοπική γεωδαισιακή ανν είναι γεωδαισιακή της g.

Απόδειξη (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\gamma : [a, b] \longrightarrow (M, g)$ είναι ελάχιστη γεωδαισιακή ως προς τη g. Όπως ξέρουμε, το ρημάννειο μήκος της γ ισούται με το μήκος της ως προς τη d, και άρα για κάθε $a \leq r \leq s \leq t \leq b$, έχουμε ότι

$$d(\gamma_r, \gamma_s) + d(\gamma_s, \gamma_t) \leq L_d\big(\gamma|_{[r,t]}\big) = L_R\big(\gamma|_{[r,t]}\big) = d(\gamma_r, \gamma_t),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή η γ είναι ελάχιστη γεωδαισιακή. Επιπλέον, αφού η γ είναι γεωδαισιακή, η $\|\dot\gamma\| = |\gamma|'_d \equiv \lambda \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή, και άρα η γ έχει σταθερή ταχύτητα ως προς τη d. Συνεπώς η γ είναι γεωδαισιακή ως προς τη d.

Υποθέτουμε τώρα ότι η $\gamma : [a, b] \longrightarrow (M, d)$ είναι γεωδαισιακή ως προς τη d. Η περίπτωση $\gamma(a) = \gamma(b)$ είναι τετριμμένη, και έτσι υποθέτουμε ότι $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Θέτουμε

$$A := \big\{s \in (a, b] \,\big|\, \exists\, \sigma : [a, s] \longrightarrow (M, g),\ \sigma \text{ γεωδαισιακή},\ \gamma|_{[a,s]} \equiv \sigma\big\},$$

και θα δείξουμε ότι $\sup A = b$. Θέτουμε $p := \gamma(a)$. Έστω W ε-ομοιόμορφα κανονική και γεωδαισιακά κυρτή περιοχή του p, για κάποιο $\varepsilon > 0$. Έστω $\delta_0 > 0$ τ.ω. $\gamma\big((a, a+\delta_0]\big) \subseteq W$ και έστω $\sigma : [a, a + \delta_0] \longrightarrow M$ η μοναδική ελάχιστη γεωδαισιακή από το p στο $\gamma(a + \delta_0)$, η οποία περιέχεται στην W. Θα δείξουμε ότι $\sigma = \gamma|[a, a + \delta_0]$. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $q := \gamma(t_0) \notin \mathrm{Im}\sigma$, $t_0 \in (a, a+\delta_0)$. Τότε, αν $\sigma_1 : [a, t_0] \longrightarrow W$, $\sigma_2 : [t_0, a+\delta_0] \longrightarrow W$ είναι οι μοναδικές γεωδαισιακές από το p στο q και από το q στο $\gamma(a + \delta_0)$ αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(\gamma_a, \gamma_{a+\delta_0}) &= L(\sigma) < L(\sigma_1 \cup \sigma_2) = L(\sigma_1) + L(\sigma_2) \\ &= d(\gamma_a, \gamma_{t_0}) + d(\gamma_a, \gamma_{a+\delta_0}), \end{aligned}$$

το οποίο αντιφάσκει με το ότι η γ είναι γεωδαισιακή ως προς την d. Συνεπώς $\gamma([a, a+\delta_0]) \subseteq \mathrm{Im}\sigma$. Τώρα, η $\gamma_0 := \gamma|_{[a,a+\delta_0]} \longrightarrow M$ είναι γεωδαισιακή και η $\sigma : [a, a+\delta_0] \longrightarrow M$ ελάχιστη γεωδαισιακή, οπότε και οι δύο έχουν σταθερή ταχύτητα $\lambda := 1/\delta_0 d(\gamma_a, \gamma_{a+\delta_0})$. Προφανώς από αυτό έπεται ότι οι γ_0 και σ ταυτίζονται ως συναρτήσεις. Συνεπώς, $a+\delta_0 \in A$, και άρα $b_0 := \sup A \in \mathbb{R}$. Τώρα, αν $b_0 < b$, τότε $d(\gamma_{b_0}, \gamma_b) = \lambda(b-b_0) \neq 0$, και άρα $\gamma_{b_0} \neq \gamma_b$. Εφαρμόζοντας τώρα το προηγούμενο επιχείρημα με το σημείο γ_{b_0} στη θέση του γ_a, βρίσκουμε $\delta_1 \in (0, b-b_0)$ και γεωδαισιακή $\sigma_0 : [b_0, b_0+\delta_1] \longrightarrow M$, τ.ω. $\gamma_{[b_0,b_0+\delta_1]} = \sigma_0$. Τότε, η καμπύλη $\gamma_{[a,b_0]} \cup \sigma_0$ ελαχιστοποιεί το μήκος και έχει σταθερή ταχύτητα, οπότε είναι ρημάννεια γεωδαισιακή. Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό του b_0, και άρα $b_0 = b$. □

Επειδή στις πολλαπλότητες Riemann οι ελάχιστες γεωδαισιακές της συνοχής Levi-Civita ταυτίζονται με τις γεωδαισιακές όπως ορίζονται στους μετρικούς χώρους, έπεται από το θεώρημα Hopf-Rinow της γεωμετρίας Riemann, ότι κάθε πλήρης πολλαπλότητα Riemann είναι γεωδαισιακός χώρος.

Αργότερα, θα δούμε περισσότερα παραδείγματα γεωδαισιακών και γεωδαισιακών χώρων. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα δούμε κάποιες βασικές ιδιότητες σύγκλισης των γεωδαισιακών.

Πρόταση 1.3.5 *Έστω $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow X$ ακολουθία γεωδαισιακών, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια καμπύλη $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$. Τότε η γ είναι γεωδαισιακή.*

Απόδειξη Πράγματι, έστω $t, s \in I$. Τότε,

$$d(\gamma_s, \gamma_t) = \lim_n d(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) = \lim_n |t-s| d(\gamma_n(0), \gamma_n(1)) = |t-s| d(\gamma_0, \gamma_1),$$

και άρα από την πρόταση 1.3.1 (δ), έπεται ότι η γ είναι γεωδαισιακή. □

Με άλλα λόγια, το σύνολο $G([0,1]; X) \subseteq C([0,1]; X)$ όλων των γεωδαισιακών $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, είναι κλειστό υποσύνολο του $C([0,1]; X)$ ως προς την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης, και συνεπώς και ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Πρόταση 1.3.6 *Αν μία ακολουθία γεωδαισιακών $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow X$ συγκλίνει κατά σημείο, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Απόδειξη Θέτουμε $x_n := \gamma_n(0)$ και $y_n := \gamma_n(1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x := \gamma_0$, $y := \gamma_1$, όπου $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ είναι το κατά σημείο όριο της $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αφού ο χώρος $C_u([0,1]; X)$ όλων των συνεχών καμπύλων στον X είναι μετρικός χώρος με τη νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της (γ_n), έχει μια περαιτέρω υπακολουθία η οποία συγκλίνει στη γ ομοιόμορφα. Επιλέγουμε λοιπόν μία τυχαία υπακολουθία της (γ_n), την οποία για απλότητα στο συμβολισμό συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με (γ_n), και θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία (γ_{k_n}) της (γ_n) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη γ. Επειδή η αρχική ακολουθία συγκλίνει κατά σημείο στη γ, έπεται ότι $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y)$. Συνεπώς, η ακολουθία $\big(d(x_n, y_n)\big)$ είναι φραγμένη, ας πούμε από τον $M > 0$. Από αυτό έπεται ότι η (γ_n) είναι ισοσυνεχής, αφού

$$d(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) = |t-s| d(x_n, y_n) \le M|t-s|.$$

Επιπλέον, αφού η (γ_n) συγκλίνει κατά σημείο στη γ, είναι προφανές ότι το $\{\gamma_n(t)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικά συμπαγές στον X, για κάθε $t \in [0,1]$. Έτσι, από το θεώρημα Arzela-Ascoli, έπεται ότι η (γ_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία υποχρεωτικά συγκλίνει στη γ. $\square$

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, οι γεωδαισιακές σε συμπαγείς χώρους συμπεριφέρονται ως προς τη σύγκλιση όπως τα σημεία.

Πρόταση 1.3.7 *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία γεωδαισιακών. Υπάρχει τότε υπακολουθία της (γ_n), η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$.*

Απόδειξη Αφού ο X είναι συμπαγής, $\mathrm{diam}X < \infty$, το οποίο επειδή

$$d(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) \leq \mathrm{diam}X|t-s|,$$

δείχνει ότι η (γ_n) είναι ισοσυνεχής. Συνεπώς, από το θεώρημα Arzela-Ascoli έπεται ότι η (γ_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποια καμπύλη $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, η οποία, από τα παραπάνω, είναι αναγκαστικά γεωδαισιακή. $\square$

1.4 Γωνίες σε Μετρικούς Χώρους

Σ' αυτή τη παράγραφο θα δούμε τον ορισμό που έδωσε ο Alexandrov για τη γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων με κοινή αρχή σε ένα μετρικό χώρο, συγκρίνοντας τη γεωμετρία του μετρικού χώρου με αυτή του ευκλείδιου επιπέδου. Ξεκινάμε με κάποιους προκαταρκτικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.4.1 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω (x_1,x_2,x_3) μία τριάδα σημείων του X. Μία τριάδα $(\bar{x_1},\bar{x_2},\bar{x_3})$ σημείων του $\mathbb{E}^2$ λέγεται τρίγωνο σύγκρισης για την τριάδα (x_1,x_2,x_3), αν

$$d(x_i,y_j) = d(\bar{x_i},\bar{x_j}), \quad i,j = 1,2,3.$$

Λήμμα 1.4.1 *Για κάθε τριάδα σημείων p,x,y σε ένα μετρικό χώρο X, υπάρχει μοναδικό (modulo ισομετρία) τρίγωνο σύγκρισης για την (p,x,y), στο $\mathbb{E}^2$.*

Απόδειξη Η μοναδικότητα είναι προφανής. Θέτουμε $a := d(p,x)$, $b := d(p,y)$ και $c := d(x,y)$. Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι $|b-a| \leq c \leq a+b$ και άρα

$$-1 \leq \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \leq 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός $\theta \in [0,\pi]$ τ.ω.

$$\cos\theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Έτσι, αν επιλέξουμε $\bar{p} \in \mathbb{E}^2$, και κατασκευάσουμε δύο γεωδαισιακά τμήματα $[\bar{p},\bar{x}], [\bar{p},\bar{y}] \subseteq \mathbb{E}^2$ μήκους a,b αντίστοιχα με γωνία θ στο σημείο $\bar{p}$, τότε από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι

$$d^2(x,y) = d^2(p,x) + d^2(p,y) - 2d(p,x)d(p,y)\cos\theta = a^2+b^2-2ab\cos\theta = c^2.$$

Συνεπώς το $(\bar{p},\bar{x},\bar{z})$ είναι ένα τρίγωνο σύγκρισης για την τριάδα (p,x,y), στο $\mathbb{E}^2$. $\square$

Σύμφωνα με αυτό το λήμμα, ο ακόλουθος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 1.4.2 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω (p,x,y) μία τριάδα σημείων του X, τ.ω $p \neq x$, $p \neq y$. Η γωνία σύγκρισης $\overline{\angle}_p(x,y)$, μεταξύ των (x,y) στο p, είναι η γωνία του τριγώνου σύγκρισης $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ στο $\bar{p}$, για την τριάδα (p,x,y).

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό της γωνίας του Alexandrov.

Ορισμός 1.4.3 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\gamma_i : [a_i,b_i] \longrightarrow X$, $i=1,2$ δύο μη-σταθερές γεωδαισιακές που εκκινούν από το $p=\gamma_1(a_1)=\gamma_2(a_2)$. Η γωνία Alexandrov των γ_1 και γ_2 στο p είναι ο αριθμός $\angle(\gamma_1,\gamma_2) \in [0,\pi]$, που ορίζεται από την

$$\angle(\gamma_1,\gamma_2) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0<t_i-a_i<\varepsilon} \overline{\angle}_p\big(\gamma_1(t_1),\gamma_2(t_2)\big). \tag{1.11}$$

Αν το όριο $\lim_{(t_1,t_2)\to(a_1,a_2)} \overline{\angle}_p(\gamma(t_1),\gamma(t_2))$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η γωνία Alexandrov υπάρχει με την αυστηρή έννοια.

Παρατηρήσεις

1. Η γωνία Alexandrov μεταξύ δύο γεωδαισιακών μένει αναλλοίωτη κάτω από θετικές αφφινικές αναπαραμετρίσεις. Συνεπώς, μπορούμε να μιλάμε και για τη γωνία Alexandrov μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων με κοινή αρχή.

2. Από το νόμο των συνημιτόνων, έπεται ότι η γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών $\gamma,\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ με $\gamma(0)=\sigma(0)=p$, εκφράζεται κατευθείαν μέσω της μετρικής του X, από τον τύπο

$$\angle(\gamma,\sigma) = \limsup_{s,t\to 0} \arccos \frac{d^2(p,\gamma_t)+d^2(p,\sigma_s)-d^2(\gamma_t,\sigma_s)}{2d(p,\gamma_t)d(p,\sigma_s)}.$$

Αυτό δείχνει ότι η γωνία Alexandrov είναι αναλοίωτη κάτω από ισομετρίες.

3. Η γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών $\gamma,\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ που εκκινούν από το x, εξαρτάται μόνο από τα σπέρματα των γεωδαισιακών, με την έννοια ότι για κάθε $\varepsilon,\delta > 0$, έχουμε $\angle(\gamma,\sigma) = \angle(\gamma|_{[0,\varepsilon]},\gamma_{[0,\delta]})$.

4. Έστω $xy \subseteq X$ ένα γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα $x,y \in X$ και $p \in xy$ ένα εσωτερικό σημείο του xy. Έστω px και py τα υποτμήματα του xy από το p, στο x και στο y αντίστοιχα. Τότε η γωνία $\angle(px,py)=\pi$ υπάρχει με την αυστηρή έννοια.

Απόδειξη. Έστω $q \in px$, $r \in py$ σημεία διαφορετικά από το p. Θεωρούμε την τριάδα $(p,q,r) \in X^3$. Θέτουμε $a=d(p,q)$, $b=d(p,r)$, $c=d(q,r)$ και θ τη γωνία σύγκρισης των q,r στο p. Από το νόμο των συνημιτόνων, έχουμε ότι $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\theta$. Επειδή $p \in xy$, έπεται ότι $c=a+b$ και άρα $\theta=\pi$. Αφού η τριάδα $(p,q,r) \in X^3$ ήταν τυχούσα, έπεται ότι $\angle(px,py)=\pi$.

Παραδείγματα

1. Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbb{E}^n$, η γωνία Alexandrov ταυτίζεται με την ευκλείδια γωνία. Αυτό προκύπτει άμεσα από το νόμο των συνημιτόνων και τους ορισμούς.

2. Χώροι με Νόρμα

Πρόταση 1.4.1 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Η νόρμα του X επάγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο, ανν η γωνία Alexandrov υπάρχει με την αυστηρή έννοια για κάθε ζευγάρι γεωδιασιακών που εκκινούν από το $0 \in X$.*

($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε πρώτα ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο. Τότε, κάθε διδιάστατος υπόχωρος του X είναι ισομετρικός με το ευκλείδιο επίπεδο. Επιπλέον, επειδή κάθε νόρμα που ορίζεται από εσωτερικό γινόμενο είναι αυστηρά κυρτή, έπεται ότι όλες οι γεωδαισιακές που εκκινούν από το 0, είναι της μορφής $[0, \infty) \ni t \mapsto tu \in X$, για κάποιο $u \in X \setminus \{0\}$. Έστω τώρα $\gamma, \sigma : [0, \infty) \longrightarrow X$ δύο γεωδαισιακές που εκκινούν από το 0. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αυτές ορίζουν ένα διδιάστατο υπόχωρο E τού X, ισομετρικό με το ευκλείδιο επίπεδο. Συνεπώς, αφού η γωνία Alexandrov είναι αναλλοίωτη κάτω άπο ισομετρίες, ο ισχυρισμός έπεται από το προηγούμενο παράδειγμα.
($\Longleftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε ζευγάρι γεωδαισιακών γ, σ στον X, που εκκινούν από το 0, το όριο που ορίζει τη γωνία των γ, σ υπάρχει με την αυστηρή έννοια. Παρατηρούμε καταρχάς, ότι αν τα $u, v \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, $\gamma_u, \gamma_v : [0, \infty) \longrightarrow X$ είναι οι γεωδαισιακές που ορίζονται από τις $\gamma_u(t) = tu$, $\gamma_v(t) = tv$, και θέσουμε $\theta := \lim_{s,t \to 0} \overline{\angle}_0(\gamma_u(t), \gamma_v(s))$, απ΄ την ύπαρξη αυτού του ορίου, συνάγουμε ότι $\theta = \overline{\angle}_0(\gamma_u(t), \gamma_v(s))$, για κάθε $s, t > 0$. Πράγματι, έστω $s, t > 0$. Από το νόμο των συνημιτόνων, έχουμε ότι για κάθε $r > 0$,

$$\begin{aligned} \cos \overline{\angle}_0(\gamma_u(rt), \gamma_v(rs)) &= \frac{r^2t^2 + r^2s^2 + \|rtu - rsv\|^2}{2r^2st} \\ &= \frac{t^2 + s^2 + \|tu - sv\|^2}{2st} = \cos \overline{\angle}_0(\gamma_u(t), \gamma_v(s)), \end{aligned}$$

και άρα $\overline{\angle}_0(\gamma_u(rt), \gamma_v(rs)) = \overline{\angle}_0(\gamma_u(t), \gamma_v(s))$ για κάθε $r > 0$. Η ζητούμενη ισότητα, προκύπτει παίρνοντας σ' αυτή την ισότητα το όριο καθώς $r \to 0$. Χρησιμοποιώντας τώρα αυτή την παρατήρηση, θα δείξουμε ότι η νόρμα του X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμου. Αρκεί να τον ελέγξουμε για δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x, y \in X$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη παρατήρηση στα διανύσματα $u = (1/\|x\|)x$ και $v = (1/\|x+y\|)(x+y)$, βλέπουμε ότι $\overline{\angle}_0(x, x+y) = \overline{\angle}_0(x, \frac{1}{2}(x+y))$, το οποίο από το νόμο των συνημιτόνων μας δίνει ότι τα x, y ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμου.

3. Στον ℓ^2_∞, δηλαδή στο $\mathbb{R}^2$ με την ∞-νόρμα, για κάθε $n > 1$, η καμπύλη $\gamma_n : [0, \frac{1}{n}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\gamma_n(t) = \big(t, t^n(1-t)^n\big),$$

είναι γεωδαισιακή. Όλες αυτές οι γεωδαισιακές, εκκινούν από το $0 \in \mathbb{R}^2$, ορίζουν διαφορετικά σπέρματα, και η γωνία Alexandrov μεταξύ δύο οποιονδήποτε εξ αυτών είναι 0.

Ίσως η πιο σημαντική βασική ιδιότητα της γωνίας Alexandrov είναι ότι ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα στό σύνολο $G(p)$ όλων των γεωδαισιακών με αρχή το $p \in X$. Η γωνία είναι επίσης συμμετρική και $\angle(\gamma, \gamma) = 0$ για κάθε γεωδαισιακή με αρχή το p. Ωστόσο, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η γωνία Alexandrov είναι μόνο ψευδομετρική, ακόμη και στο σύνολο $G(p)/_\sim$ όλων των σπερμάτων που εκκινούν από το p.

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $p \in X$, και έστω G_p το σύνολο όλων των γεωδαισιακών μοναδιαίας ταχύτητας που εκκινούν από το p. Η γωνία* Alexandrov $\angle : G_p \times G_p \longrightarrow [0, \pi]$ *ορίζει μία ψευδομετρική στο X.*

Απόδειξη Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in G_p$, τ.ω. $\angle(\alpha, \beta) > \angle(\alpha, \gamma) + \angle(\gamma, \beta)$, και επιλέγουμε $\delta > 0$ τ.ω.

$$\angle(\alpha, \beta) > \angle(\alpha, \gamma) + \angle(\gamma, \beta) + 3\delta.$$

Από τον ορισμο της γωνίας Alexandrov υπάρχει $\varepsilon > 0$, τ.ω.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \overline{\angle}_p(\alpha_s, \gamma_t) < \angle(\alpha, \gamma) + \delta, & \text{για κάθε } s, t < \varepsilon, \\ \text{(ii)} & \overline{\angle}_p(\beta_t, \gamma_s) < \angle(\beta, \gamma) + \delta, & \text{για κάθε } s, t < \varepsilon, \\ \text{(iii)} & \overline{\angle}_p(\alpha_{s_0}, \beta_{t_0}) > \angle(\alpha, \beta) - \delta, & \text{για κάποια } s_0, t_0 < \varepsilon. \end{array}$$

Θεωρούμε στο ευκλείδιο επίπεδο τρίγωνο με κορυφές $0, x, y$ τ.ω. $\|x\| = s_0$, $\|y\| = t_0$, και τ.ω. η εσωτερική γωνία στην κορυφή 0 να ικανοποιεί ότι

$$\overline{\angle}_p(a_{s_0}, \beta_{t_0}) > \theta > \angle(\alpha, \beta) - \delta. \tag{1.12}$$

Ειδικότερα, $\theta < \pi$, και άρα το τρίγωνο σύγκρισης $(0, x, y)$ στο $\mathbb{E}^2$, για το $(p, \alpha_{s_0}, \beta_{t_0})$, δεν είναι εκφυλισμένο. Εφαρμόζοντας τώρα το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο σύγκρισης $(0, x, y)$, άπο την αριστερή ανισότητα της (1.12), έπεται ότι $d(\alpha_{s_0}, \beta_{t_0}) > \|x - y\|$. Από την άλλη ανισότητα της (1.12), έπεται ότι

$$\theta > \angle(\alpha, \gamma) + \angle(\gamma, \beta) + 2\delta,$$

και άρα υπάρχει $z \in [x, y]$ τ.ω. οι γωνίες $\theta_{x,z}$ των x, z και $\theta_{y,z}$ των y, z, να είναι μεγαλύτερες από $\angle(\alpha, \gamma) + \delta$ και $\angle(\gamma, \beta) + \delta$, αντίστοιχα. Αφού, όμως, $r_0 := \|z\| \leq t_0 \vee s_0 < \varepsilon$, από τις (i) και (ii), παίρνουμε ότι

$$\overline{\angle}_p(\alpha_{s_0}, \gamma_{r_0}) < \angle(\alpha, \gamma) + \delta < \theta_{x,z},$$

$$\overline{\angle}_p(\beta_{t_0}, \gamma_{r_0}) < \angle(\beta, \gamma) + \delta < \theta_{x,y}.$$

Όμως, τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(a_{s_0}, \beta_{t_0}) &> \|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\| \\ &> d(a_{s_0}, \gamma_{r_0}) + d(\gamma_{r_0}, \beta_{t_0}), \end{aligned}$$

το οποίο αντιφάσκει με την τριγωνική ανισότητα της d. □

Κεφάλαιο 2

Χώροι Μήκους και Γεωδαισιακοί Χώροι

Όπως έχουμε ήδη δει, χώροι μήκους λέγονται εκείνοι οι μετρικοί χώροι (X, d) των οποίων η μετρικη είναι συνεπής με μετρήσεις που πραγματοποιούνται μέσα από το χώρο. Έτσι, για να ελέγξουμε αν μια δεδομένη μετρική ορίζει χώρο μήκους, πρέπει να κάνουμε μετρήσεις μέσω μηκών καμπύλων που συνδέεουν τα σημεία του χώρου, και έπειτα να συγκρίνουμε τις τιμές d_i που προκύπτουν με τη μετρική d. Όπως θα δούμε, τα αποτελέσματα d_i αυτών των μετρήσεων ορίζουν πάντα μία μετρική μήκους στον X, η οποία συμπίπτει με την αρχική μετρική d ανν η d είναι μετρική μήκους. Χρειάζεται όμως κάποια προσοχή: Τέτοιες μετρήσεις, μπορεί κάλλιστα να αποδώσουν σε δύο σημεία του χώρου απόσταση $+\infty$. Έτσι, στο πλαίσιο αυτό επιτρέπουμε στις μετρικές να παίρνουν και την τιμή $+\infty$, όπου θεωρούμε το $[0, \infty]$ με την προφανή διάταξη και τη συνήθη σύμβαση για την πρόσθεση.

Ορισμός 2.0.4 Έστω X σύνολο. Μία συνάρτηση $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ λέγεται γενικευμένη μετρική αν ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μίας μετρικής, εκτός του να παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές.

Ένας γενικευμένος μετρικός χώρος λέγεται γεωδαισιακός χώρος αν δύο οποιαδήποτε σημεία του τα οποία απέχουν *πεπερασμένη* απόσταση, μπορούν να ενωθούν με κάποια γεωδαισιακη.

Μία γενικευμένη μετρική ορίζει μία τοπολογία ακριβώς όπως και μια μετρική. Δεδομένης μιας γενικευμένης μετρικής d σ' ένα σύνολο X, η σχέση $x \backsim y$ ανν $d(x, y) < \infty$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X, και ο περιορσμός της d σε κάθε μία από τις κλάσεις ισοδυναμίας της $\backsim$ είναι μια πεπερασμένη μετρική. Επιπλέον, αν ο X είναι γεωδαισιακός χώρος, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\backsim$ συμπίπτουν με τις κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες του X, οι οποίες είναι κυρτά υποσύνολα του X. Πραγματι, έστω $[x]$ η κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$. Προφανώς το $[x]$ είναι κυρτό, και άρα περιέχεται στη (μεγιστοτική) κατά τόξα συνιστώσα C_x του x. Αντίστροφα, υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει $y \in C_x \setminus [x]$. Έστω $\gamma \in C(x, y)$. Αφού $y \notin [x]$, αναγκαστικά $L(\gamma, \Delta) = +\infty$ για κάθε διαμέριση Δ του $[0, 1]$. Συνεπώς, υπάρχει μία φθίνουσα ακολουθία $\{[s_i, t_i]\}$ κλειστών υποδιαστημάτων του I, τ.ω. $t_i - s_i \xrightarrow{i} 0$, και $d(\gamma_{s_i}, \gamma_{t_i}) = +\infty$, $i \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο.

Στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου, θα δούμε τον ορισμό των χώρων μήκους και κάποια παραδείγματα. Στη δεύτερη παράγραφο, θα μας απασχολήσει το ακόλουθο ερώτημα: Ποιες υποθέσεις σε ένα χώρο μήκους X εξασφαλίζουν την ύπαρξη καμπύλων που ελαχιστοποιούν το μήκος, δηλαδή ότι ο X είναι γεωδαισιακός χώρος. Η απάντηση αυτού του ερωτήματος, στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων Riemann, είναι το θεώρημα Hopf-Rinow. Όπως θα δούμε, το θεώρημα αυτό ισχύει γενικότερα για πλήρεις και τοπικά συμπαγείς χώρους μήκους. Τέλος, στην τρίτη παράγραφο θα δούμε διάφορους τρόπους με τους οποίους κατασκευάζονται καινούριοι χώροι μήκους από ήδη υπάρχοντες.

2.1 Χώροι Μήκους

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x, y \in X$. Θα συμβολίζουμε με $C(x, y)$ το σύνολο όλων των παραμετρισμένων στο $[0, 1]$ καμπύλων με αρχή το x και τέλος το y. Το σύνολο όλων των καμπύλων στο $C(x, y)$ με πεπερασμένο μήκος θα το συμβολίζουμε με $R(x, y)$. Για να δούμε αν ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι χώρος μήκους, συγκρίνουμε τη μετρική d με τη μετρική που προκύπτει από μετρήσεις μέσα από το χώρο μέσω καμπύλων, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1 Έστω (X, d) γενικευμένος μετρικός χώρος. Η *εσωτερική μετρική* ή αλλιως *μετρική μήκους* στο X που επάγεται από τη d είναι η συνάρτηση $d_i : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ με τύπο

$$d_i(x, y) = \inf \big\{ L_d(\gamma) \,|\, \gamma \in R(x, y) \big\}. \tag{2.1}$$

Προφανώς, πάντοτε $d \leq d_i$. Ο X λέγεται *χώρος μήκους* ή αλλιώς *εσωτερικός μετρικός χώρος*, αν $d = d_i$.

Παρατηρήσεις

1. Όπως και στην περίπτωση των γενικευμένων γεωδαισιακών χώρων, αν (X, d) είναι ένας χώρος μήκους, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\backsim$ που ορίζεται στο X από τον τύπο $x \backsim y$ ανν $d(x, y) < \infty$, συμπίπτουν με τις κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες τουX.

2. Επειδή το μήκος είναι αναλλοίωτο κάτω από ασθενείς αναπαραμετρίσεις, έπεται ότι το διάστημα $[0, 1]$ στο οποίο απαιτούμε να ορίζονται οι καμπύλες πάνω από τις οποίες παίρνουμε το infimum στον ορισμό της d_i, μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο κλειστό διάστημα. Για τον ίδιο λόγο, μπορούμε να περιορίσουμε το infimum στη δεξιά πλευρά της σε καμπύλες σταθερής ταχύτητας ορισμένες στο $[0, 1]$.

Πρόταση 2.1.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Η μετρική μήκους d_i που επάγεται στο X από τη d είναι πράγματι (γενικευμένη) μετρική, και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) *Η d_i ορίζει το ίδιο συναρτησιακό μήκους με την d, δηλαδή $L_{d_i}(\gamma) = L_d(\gamma)$ για κάθε καμπύλη γ στον X.*

(β) *Αν μία καμπύλη $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ είναι d_i-συνεχής, τότε είναι συνεχής και ως προς τη d. Το αντίστροφο δεν είναι εν γένει αληθές.*

(γ) *Αν η καμπύλη* $\gamma : [a,b] \longrightarrow (X,d)$ *έχει πεπερασμένο μήκος, τότε είναι* d_i*-συνεχής.*

(δ) *Η* d_i *είναι εσωτερική μετρική, δηλαδή* $(d_i)_i = d_i$.

(ε) *Η* d_i *είναι πεπερασμένη ανν κάθε ζευγάρι σημείων του* X *ενώνεται με κάποια καμπύλη πεπερασμένου μήκους.*

Απόδειξη Προφανώς η d_i είναι συμμετρική και $d_i(x,y) = 0$ ανν $x = y$. Η τριγωνική ανισότητα έπεται από την προσθετικότητα του συναρτησιακού του μήκους ως προς το γινόμενο καμπύλων $*$. Συγκεκριμένα, έστω $x,y,z \in X$. Τότε για κάθε $\gamma \in R(x,z)$, $\sigma \in R(z,y)$, η καμπύλη $\gamma * \sigma \in R(x,y)$ συνδέει τα x,y και συνεπώς

$$d_i(x,y) \leq L(\gamma * \sigma) = L(\gamma) + L(\sigma).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλες τις καμπύλες $\gamma \in R(x,z)$ και $\sigma \in R(z,y)$ βλέπουμε ότι η d_i ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.
(α) Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη στον X. Αφού $d \leq d_i$, προφανώς $L_d(\gamma) \leq L_{d_i}(\gamma)$. Αυτό που πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε είναι η αντίστροφη ανισότητα. Έστω $\Delta = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ διαμέριση του I. Τότε,

$$\begin{aligned} L_{d_i}(\gamma\,;\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} d_i\big(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} L_d\big(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\big) \\ &= L_d(\gamma\,;\Delta) \leq L_d(\gamma). \end{aligned}$$

Παίρνοντας supremum πάνω από όλες τις διαμερίσεις Δ του I, έπεται το (α).
(β) Το ότι κάθε d_i-συνεχής καμπύλη είναι και d-συνεχής είναι προφανές από την $d \leq d_i$, και στα επόμενα παραδείγματα θα δούμε ότι το αντίστροφο δεν είναι εν γένει αληθές. Το (γ) έπεται από το (α) και την πρόταση 1.1.1 (ζ). Τέλος, το (δ) είναι άμεση συνέπεια του (α), και το (ε) έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

Παραδείγματα

1. Κάθε πολλαπλότητα Riemann είναι χώρος μήκους με τη μετρική που ορίζει η δομή Riemann.

Απόδειξη. Έστω (M,g) μία πολλαπλότητα Riemann με την επαγόμενη μετρική d. Έστω $C^1(x,y)$ το σύνολο όλων των C^1 καμπύλων από το x στο y. Επειδή το ρημάννειο μήκος ταυτίζονται με το μήκος ως προς την d, έχουμε ότι $C^1(x,y) \subseteq R_d(x,y)$. Συνεπώς, για κάθε $x,y \in X$,

$$d_i(x,y) = \inf\{L(\gamma)\,|\,\gamma \in R_d(x,y)\} \leq \inf\{L(\gamma)\,|\,\gamma \in C^1(x,y)\} = d(x,y).$$

2. Έστω (X,d) η εικόνα της καμπύλης άπειρου μήκους $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο

$$\gamma(t) = \Big(t, t\sin\frac{1}{t}\Big), \quad \gamma_0 = 0$$

εφοδιασμένη με τον περιορισμό της ευκλείδιας μετρικής. Τότε, η γ είναι συνεχής, έχει άπειρο μήκος και δεν είναι d_i-συνεχής. Πράγματι, $d_i(0,\gamma_t) = \infty$ για κάθε $t > 0$, και συνεπώς η γ_{t_n} δεν συγκλίνει στο $\gamma(0) = 0$ για καμία ακολουθία $t_n \longrightarrow t$.

3. Έστω (X,d) το σύνολο

$$\big(\{0\}\times[0,1]\big)\cup\big([0,1]\times\{1\}\big)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(x,nx)\,\Big|\,0\le x\le\frac{1}{n}\right\}\right)\subseteq\mathbb{R}^2,$$

εφοδιασμένο με τον περιορισμό της ευκλείδιας μετρικής του $\mathbb{R}^2$. Ο μέτρικός χώρος (X,d) είναι συμπαγής. Θα δείξουμε ότι ο (X,d_i) δεν είναι ούτε τοπικά συμπαγής. Ας συμφωνήσουμε καταρχάς ότι θα συμβολίζουμε με $D_i(x,\varepsilon)$ και $D(x,\varepsilon)$ τις ανοικτές μπάλες ως προς τις μετρικές d_i και d, αντίστοιχα. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποια d_i-σχετικά συμπαγής περιοχή του $0=(0,0)\in X$. Υπάρχει τότε $\varepsilon\in(0,1)$, τ.ω. $D_i(0,\varepsilon)\subseteq W$. Αλλά για το $0\in X$, έχουμε ειδικότερα ότι $D_i(0,\varepsilon)=D(0,\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon<1$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, θέτουμε x_n το σημείο στο οποίο το τμήμα $\{(x,nx)\,|\,0\le x\le 1/n\}$ τέμνει το σύνορο $\partial D(0,\varepsilon)$. Τότε, όμως, $d_i(x_n,x_m)=2\varepsilon$ για κάθε $m\ne n$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι η ακολουθία (x_n), περιέχεται στο d_i-συμπαγές σύνολο $\overline{W}$.

4. Έστω (X,d) το σύνολο $X=\big([0,1]\times\{1\}\big)\cup\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,nx)\,|\,0\le x\le 1/n\}\big)$, εφοδιασμένο με τον περιορισμό της Ευκλείδιας μετρικής. Ο μετρικός χώρος (X,d) δεν είναι πλήρης. Ωστόσο, με την εσωτερική μετρική d_i που επάγεται από τη d, είναι πλήρης.

Η ακόλουθη πρόταση δεν ισχύει για αυθαίρετους μετρικούς χώρους, όπως δείχνει η διακριτή μετρική $d=\mathbb{1}_{\{x\ne y\}}$.

Πρόταση 2.1.2 *Έστω (X,d) χώρος μήκους και $D(x,r)\subseteq X$ μία ανοικτή μπάλα με κέντρο το $x\in X$ και ακτίνα $r>0$. Τότε $\overline{D(x,r)}=\{y\in X\,|\,d(x,y)\le r\}$.*

Απόδειξη Ο εγκλεισμός $\subseteq$ ισχύει σε όλους τους μετρικούς χώρους. Έστω $y\in X$ τ.ω. $d(x,y)=r$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπάρχει $\gamma_n\in C(x,y)$ τ.ω. $L(\gamma_n)<d(x,y)+1/n$. Από τη συνέχεια της συνάρτησης μήκους της γ_n, υπάρχει $t_n\in[0,1]$ τ.ω. $L\big(\gamma_n|_{[0,t_n]}\big)=r-1/n$, $n\in\mathbb{N}$, οπότε ειδικότερα $\gamma_n(t_n)\in D(x,r)$ για καθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε, όμως, $L\big(\gamma_n|_{[0,t_n]}\big)<d\big(x,\gamma_n(t_n)\big)+1/n$, και άρα $r-d\big(x,\gamma_n(t_n)\big)<2/n$. Πράγματι, αν αυτό δεν ίσχυε, θα είχαμε ότι

$$\begin{aligned} L(\gamma_n) &= L\big(\gamma_n|_{[0,t_n]}\big)+L\big(\gamma_n|_{[t_n,1]}\big)\\ &\ge d\big(x,\gamma_n(t_n)\big)+1/n+d\big(\gamma_n(t_n),y\big)\ge d(x,y)+\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d\big(y,\gamma_n(t_n)\big) &\le L(\gamma_n)-d\big(x,\gamma_n(t_n)\big)\\ &< r-d\big(x,\gamma_n(t_n)\big)+\frac{1}{n}<\frac{3}{n}\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

και άρα $y\in\overline{D(x,r)}$. □

Ορισμός 2.1.2 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $\varepsilon\ge 0$. Ένα σημείο $m\in X$, λέγεται ε μέσω των x,y, αν

$$d(x,m)\vee d(m,y)\le\frac{1}{2}d(x,y)+\varepsilon.$$

Θα λέμε ότι ένα ζευγάρι σημείων x, y στον X έχει προσεγγιστικά μέσα αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο ε μέσω των x, y.

Φυσικά κάθε 0-μέσο $z \in X$ των x, y είναι απλά ένα μέσο των x, y. Μέσω της έννοιας των μέσων δίνονται για πλήρεις μετρικούς χώρους χρήσιμοι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί των χώρων μήκους και των γεωδαισιακών χώρων.

Πρόταση 2.1.3 *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος.*

(α) *Ο X είναι χώρος μήκους ανν κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in X$, έχει προσεγγιστικά μέσα.*

(β) *Ο X είναι γεωδαισιακός χώρος ανν υπάρχει απεικόνιση μέσων στον X.*

Απόδειξη (α) Έστω πρώτα ότι ο X είναι χώρος μήκους και έστω $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ και $\gamma \in C(x, y)$ τ.ω. $L(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$. Η συνάρτηση μήκους της γ είναι συνεχής, και άρα υπάρχει $t_0 \in [0, 1]$ τ.ω. $L\big(\gamma|_{[0,t_0]}\big) = (1/2)d(x, y)$. Θέτουμε $z := \gamma(t_0)$. Προφανώς, $d(x, z) = (1/2)d(x, y)$, ενώ $d(x, z) + d(z, y) \leq L(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$, και άρα

$$d(z, y) \leq d(x, y) - d(x, z) + \varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y) + \varepsilon.$$

Αντίστροφα, έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Πρέπει να κατασκευάσουμε καμπύλη $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ τ.ω. $L(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$, χρησιμοποιώντας την ύπαρξη των προσεγγιστικών μέσων. Ορίζουμε πρώτα μία συνάρτηση $\gamma : D \longrightarrow X$ στο πυκνό σύνολο

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq [0, 1], \qquad D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \,\Big|\, k = 0, \ldots, 2^n \right\},$$

όλων των διαδικών ρητών, τ.ω. για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι:

$$\bigvee_{k=0}^{2^n-1} d\Big(\gamma\Big(\frac{k}{2^n}\Big), \gamma\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big)\Big) \leq \frac{1}{2^n}\Big(d(x, y) + \frac{2^n - 1}{2^n}\varepsilon\Big). \tag{2.2}$$

Για $n = 1$, ορίζουμε τη γ στο D_1 από τις $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ και $\gamma(1/2) = z$, όπου $z \in X$ είναι κάποιο $\varepsilon/4$-μέσω των x, y. Έτσι η (2.2) ικανοποιείται κατά προφανή τρόπο για $n = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε ορίσει τη γ στο D_n για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, ώστε η (2.2) να ικανοποιείται για κάθε $m \leq n$. Επεκτείνουμε τη γ στο $D_{n+1} \supseteq D_n$ έτσι ώστε η (2.2) να ικανοποιείται για κάθε $m \leq n + 1$ ως εξής: Για κάθε $t_k := \frac{2k+1}{2^n+1} \in D_{n+1} \setminus D_n$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, επιλέγουμε ένα $\varepsilon/2^{2n+2}$-μέσο $z_k \in X$ των $\gamma(k/2^n)$ και $\gamma\big((k + 1)/2^n\big)$, και ορίζουμε $\gamma(t_k) = z_k$. Τότε, για κάθε $k = 0, \ldots, 2^n - 1$,

$$\begin{aligned} d\Big(\gamma_{\frac{2k}{2^{n+1}}}, \gamma_{t_k}\Big) \vee d\Big(\gamma_{t_k}, \gamma_{\frac{2k+2}{2^{n+1}}}\Big) &\leq \frac{1}{2}d\Big(\gamma_{\frac{k}{2^n}}, \gamma_{\frac{k+1}{2^n}}\Big) + \frac{\varepsilon}{2^{2n+2}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}}\Big(d(x, y) + \frac{2^n - 1}{2^n}\varepsilon + \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon\Big) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\Big(d(x, y) + \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\varepsilon\Big), \end{aligned}$$

και άρα η (2.2) ικανοποιείται για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει λοιπόν απεικόνιση $\gamma : D \longrightarrow X$ με $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$ τ.ω. η (2.2) να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η γ είναι προφανώς Lipschitz με σταθερα Lipschitz $\mathrm{Lip}(\gamma) \leq d(x,y) + \varepsilon$. Αφού ο X είναι πλήρης υπάρχει μοναδική επέκταση της γ στο $\overline{D} = [0,1]$, η οποία είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $\leq d(x,y) + \varepsilon$. Αυτή είναι η ζητούμενη καμπύλη. Η απόδειξη του (α) είναι όμοια. $\square$

Οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί των προσεγγιστικών μέσων μας δίνουν περαιτέρω ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των χώρων μήκους.

Πρόταση 2.1.4 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $x,y \in X$. Ένα σημείο $z \in X$ είναι ε-μέσο για κάποιο $\varepsilon > 0$ ανν*

$$d^2(x,z) + d^2(z,y) \leq \frac{1}{2}d^2(x,y) + \varepsilon', \tag{2.3}$$

για κάποιο $\varepsilon' > 0$. Επιπλέον, αν το z είναι μέσο των x,y, τότε η (2.3) ικανοποιείται με $\varepsilon' = 0$, και αντίστροφα, αν η (2.3) ικανοποιείται με $\varepsilon' = 0$, τότε το z είναι μέσο των x,y.

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι το $z \in X$ είναι ε-μέσο των x,y. Τότε,

$$d^2(x,z) + d^2(z,y) \leq 2\Big(\frac{1}{2}d(x,y) + \varepsilon\Big)^2 = \frac{1}{2}d^2(x,y) + \varepsilon d(x,y) + 2\varepsilon^2,$$

και άρα το z ικανοιεί την (2.3), με $\varepsilon' = \varepsilon d(x,y) + 2\varepsilon^2$. Προφανώς, αν το z είναι μέσο των x,y, τότε ικανοιεί την (2.3) με $\varepsilon' = 0$.

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι το z ικανοποιεί την (2.3) για κάποιο $\varepsilon' \geq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d^2(x,y) + \varepsilon' &\geq \frac{1}{2}\big(d(x,z) + d(z,y)\big)^2 + \frac{1}{2}\big(d(x,z) - d(z,y)\big)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}d^2(x,y) + \frac{1}{2}\big(d(x,z) - d(z,y)\big)^2,\end{aligned}$$

και άρα $|d(x,z) - d(z,y)| \leq \sqrt{2\varepsilon'}$. Από αυτή την ανισότητα, έπεται ότι

$$2d(x,z) \vee d(z,y) - \sqrt{2\varepsilon'} \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Επιπλέον, $2d(x,z)d(z,y) \leq (1/2)d^2(x,y) + \varepsilon'$, και άρα

$$\begin{aligned}d^2(x,z) + d^2(z,y) &\leq \frac{1}{2}d^2(x,y) + \varepsilon' \\ &\leq d^2(x,y) + 2\varepsilon' - 2d(x,z)d(z,y).\end{aligned}$$

Έτσι, προφανώς, $d(x,z) + d(z,y) \leq \sqrt{d^2(x,y) + 2\varepsilon'}$. Έπεται ότι

$$d(x,z) \vee d(z,y) \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \varepsilon,$$

όπου $\varepsilon = \frac{1}{2}\big(\sqrt{d^2(x,y) + 2\varepsilon'} + \sqrt{2\varepsilon'} - d(x,y)\big)$. Παρατηρούμε επίσης ότι και σ' αυτή την περίπτωση, αν το z ικανοποιεί την (2.3) με $\varepsilon' = 0$, τότε το z είναι μέσο των x,y. $\square$

2.2 Το Θεώρημα Hopf-Rinow

Σ' αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του πότε δύο σημεία σε ένα μετρικό χώρο μπορούν να ενωθούν με μια γεωδαισιακή. Από τους χαρακτηρισμούς των γεωδαισιακών διαμέσου μέσων ζευγών σημείων της πρότασης 1.3.2 είναι φανερό ότι κάθε συμπαγής χώρος μήκους X είναι γεωδαισιακός χώρος. Πράγματι, έστω $x, y \in X$ τ.ω. $d(x, y) < \infty$. Αφού ο X είναι χώρος μήκους, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σημείο $z_n \in X$ τ.ω.

$$d(x, z_n) \vee d(z_n, y) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{n}.$$

Αφού όμως ο X είναι συμπαγής, η ακολουθία (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, της οποίας το όριο είναι αναγκαστικά μέσο των x, y. Αν παρατηρήσουμε μετά ότι η (z_n) περιέχεται στην μπάλα $D\big(x, \frac{1}{2}d(x, y) + 1\big)$ βλέπουμε ότι για να είναι ένας χώρος μήκους γεωδαισιακός χώρος, αρκεί οι κλειστές μπάλες στον X να είναι συμπαγείς. Σύμφωνα με το θεώρημα Hopf-Rinow, για πλήρεις χώρους μήκους η συμπάγεια των κλειστών μπαλών είναι ισοδύναμη με την τοπική συμπάγεια, κάτι το οποίο φυσικά δεν είναι εν γένει σωστό. Το θεώρημα αυτό ήταν γνωστό στον Cohn-Vossen το 1935 για χώρους μήκους, και είχε αποδειχθεί δύο χρόνια νωρίτερα από τους Hopf και Rinow για επιφάνειες.

Ορισμός 2.2.1 Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται *γνήσιος* αν κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

Προφανώς αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι όλες οι κλειστές μπάλες στον X είναι συμπαγείς. Η ορολογία γνήσιος προέρχεται από το ότι όταν η μετρική του X παίρνει πεπερασμένες τιμές, τότε ο X είναι γνήσιος ανν η συνάρτηση $d_x := d(x, \cdot\,) : X \longrightarrow [0, \infty)$ είναι γνήσια με τη συνήθη τοπολογική έννοια, δηλαδή αντιστρέφει συμπαγή υποσύνολα σε συμπαγή υποσύνολα, για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 2.2.1 *Έστω (X, d) χώρος μήκους. Ο X είναι γνήσιος ανν είναι πλήρης και τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη Μόνο η μία κατεύθυνση χρειάζεται απόδειξη. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής και πλήρης και θα αποδείξουμε ότι είναι γνήσιος. Έστω $x_0 \in X$. Πρέπει να δειχθεί ότι η $B(r) := \overline{D(x_0, r)}$ είναι συμπαγής για κάθε $0 < r < \infty$. Θέτουμε

$$I := \big\{ r \in [0, \infty) \,\big|\, B(r) \text{ είναι συμπαγής} \big\}.$$

Προφανώς, το I είναι κάποιο υποδιάστημα του $[0, \infty)$ το οποίο περιέχει το 0. Θα δείξουμε ότι είναι ανοικτό και κλειστό. Δείχνουμε πρώτα ότι είναι ανοικτό. Έστω, λοιπόν, $r \in I$. Αρκεί να βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. $r + \delta \in I$. Αφού η $B(r)$ είναι συμπαγής και ο X τοπικά συμπαγής, μπορούμε να βρούμε σχετικά συμπαγείς μπάλες $D(x_i, \varepsilon_i) \subseteq X$, $x_i \in B(r)$, $i = 1, \ldots, n$ οι οποίες καλύπτουν τη $B(r)$. Το σύνολο $F := X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n} D(x_i, \varepsilon_i) \Big)$ είναι κλειστό και αφού η $B(r)$ είναι συμπαγής και $F \cap B(r) = \emptyset$, έχουμε ότι

$$\delta := d(F, B(r)) = \min \big\{ d(x, y) \,\big|\, x \in F,\ y \in B(r) \big\} > 0.$$

Όμως, τότε, $D(B(r),\delta) := \bigcup_{x\in B(r)} D(x,\delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D(x_i,\varepsilon_i)$, αφού αν $y \in F$, τότε για κάθε $x \in B(r)$ έχουμε $d(x,y) \geq \delta$. Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι αφού ο X είναι χώρος μήκους, ισχύει ότι

$$B(r+\delta/2) \subseteq D(B(r),\delta).$$

Πράγματι, έστω $x \in B(r+\delta/2)$. Αν $d(x_0,x) \leq r$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $d(x_0,x) > r$. Υπάρχει $\gamma \in C(x_0,x)$ τ.ω. $L(\gamma) < d(x_0,x)+\delta/6$ και $t \in [0,1]$ τ.ω. $L(\gamma|_{[0,t]}) = r-\delta/6$, οπότε $\gamma_t \in B(r)$. Όπως και στην απόδειξη της πρότασης 2.1.2, έχουμε ότι

$$L(\gamma|_{[0,t]}) < d(x_0,\gamma_t) + \frac{\delta}{6}.$$

Επιπλέον, $d(x_0,\gamma_t) + d(\gamma_t,x) < d(x_0,x) + \delta/6$, και άρα

$$d(\gamma_t,x) < d(x,x_0) - d(x_0,\gamma_t) + \frac{\delta}{6} < d(x_0,x) - L(\gamma|_{[0,t]}) + \frac{\delta}{3} \leq \delta,$$

δηλαδή $x \in D\big(B(r),\delta\big)$. Έτσι, το κλειστό σύνολο $B(r+\delta/2)$ περιέχεται στο σχετικά συμπαγές σύνολο $\bigcup_{i=1}^{n} D(x_i,\varepsilon_i)$, και άρα είναι συμπαγές. Έτσι $r+\delta/2 \in I$.

Δείχνουμε τώρα ότι το I είναι και κλειστό. Αφού το I είναι διάστημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $[0,r) \subseteq I$ για κάποιο $r > 0$, τότε $r \in I$. Έστω λοιπόν $r > 0$ τ.ω. $[0,r) \subseteq I$ και έστω (x_n) μία ακολουθία στη $B(r)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο της $B(r)$. Έστω $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία τ.ω. $r > \varepsilon_m \longrightarrow 0$. Αφού ο X είναι χώρος μήκους, για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y_n^m \in B(r-\varepsilon_m/2)$ τ.ω. $d(y_n^m,x_n) \leq \varepsilon_m$. Πράγματι, αν $x_n \in B(r-\varepsilon_m/2)$, τότε επιλέγουμε $y_n^m = x_n$, ενώ αν $d(x_0,x_n) > r-\varepsilon_m/2$, επιλέγουμε καμπύλη $\gamma_n^m \in C(x_0,x_n)$ τ.ω. $L(\gamma_n^m) \leq d(x_0,x_n)+\varepsilon_m/2$ και θέτουμε $y_n^m := \gamma_n^m(t_n^m)$, όπου το $t_n^m \in [0,1]$ είναι τ.ω. $L\big(\gamma|_{[0,t_n^m]}\big) = r-\varepsilon_m/2$. Τότε, προφανώς $y_n^m \in B(r-\varepsilon_m/2)$ και

$$\begin{aligned} d(y_n^m,x_n) &\leq L\big(\gamma_n^m|_{[t_n^m,1]}\big) = L(\gamma_n^m) - L\big(\gamma_n^m|_{[0,t_n^m]}\big) \\ &\leq d(x_0,x_n) + \frac{\varepsilon_m}{2} - r + \frac{\varepsilon_m}{2} \leq \varepsilon_m. \end{aligned}$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(y_n^m)_{n=1}^{\infty}$ περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $B(r-\varepsilon_m/2)$. Συνεπώς με ένα διαγώνιο επιχείρημα μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ τ.ω. η ακολουθία $(y_{k_n}^m)_{n=1}^{\infty}$ να συγκλίνει για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η αντίστοιχη υπακολουθία x_{k_n} της (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\varepsilon_m \leq \varepsilon/3$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$n,\ell \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad d(y_{k_n}^m, y_{k_\ell}^m) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έτσι, για κάθε $n,\ell \geq n_0$ έχουμε ότι

$$d(x_{k_n},x_{k_\ell}) \leq d(x_{k_n},y_{k_n}^m) + d(y_{k_n}^m,y_{k_\ell}^m) + d(y_{k_\ell}^m,x_{k_\ell}) \leq \varepsilon.$$

Συμεπώς, η (x_{k_n}) είναι ακολουθία Cauchy, και αφού ο X είναι πλήρης, συγκλίνει σε κάποιο $x \in B(r)$. Έτσι η $B(r)$ είναι συμπαγής, δηλαδή $r \in I$, όπως ζητούσαμε. □

Η ακόλουθη πρόταση έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση και τη συζήτηση που προηγήθηκε αυτής.

Θεώρημα 2.2.1 (Hopf-Rinow) *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος μήκους. Αν ο X είναι πλήρης, τότε είναι γεωδαισιακός χώρος.*

Οι γνήσιοι γεωδαισιακοί χώροι ικανοποιούν την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα.

Πρόταση 2.2.2 *Έστω (X, d) γνήσιος γεωδαισιακός χώρος και έστω $x, y \in X$ τα οποία συνδέονται με μοναδική γεωδιασιακή $\gamma \in C(x, y)$. Αν η $\gamma_n \in C(x_n, y_n)$ είναι μία ακολουθία γεωδαισιακών και $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, τότε $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ ομοιόμορφα.*

Απόδειξη Αφού οι ακολουθίες (x_n), (y_n) συγκλίνουν στα x, y αντίστοιχα,

$$R := \sup \big\{ d(x_n, y_n) \,\big|\, n \in \mathbb{N} \big\} + \operatorname{diam} \overline{\big\{ x_n \,\big|\, n \in \mathbb{N} \big\}} < \infty.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται εύκολα ότι η εικόνα κάθε μίας από τις γ_n περιέχεται στη συμπαγή μπάλα $B(x, R)$. Συνεπώς, από την πρόταση 1.3.7, κάθε υπακολουθία της (γ_n) έχει περαιτέρω υπακολουθία, η οποία αναγκαστικά συγκλίνει στη μοναδική γεωδαισαιακή $\gamma \in C(x, y)$ που συνδέει τα $x, y \in X$. Έπειδη ο $C_u([0, 1]; X)$ είναι μετρικός χώρος, αυτό δείχνει το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 2.2.2 Έστω (X, d) μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος. Λέμε ότι οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους αν η απεικόνιση

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto [x, y] \in C(x, y) \subseteq C_u([0, 1]; X),$$

είναι συνεχής.

Πόρισμα 2.2.1 *Σε κάθε γνήσιο μονοσήμαντα γεωδαισιακό χώρο X οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους.*

Η συνεχής εξάρτηση των γεωδαισιακών ενός μονοσήμαντα γεωδαισιακού χώρου από τα άκρα τους έχει σημαντικές επιπτώσεις στην τοπολογία του χώρου, σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.3 *Έστω (X, d) μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος με πεπερασμένη μετρική. Αν οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, τότε ο X είναι συρικνώσιμος, και άρα απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη Έξ' ορισμού, ένας τοπολογικός χώρος X είναι συρρικνώσιμος αν υπάρχει ομοτοπία από τη σταθερή απεικόνιση $c_p : X \longrightarrow \{p\} \subseteq X$ στην ταυτοτική Id_X. Έστω $p \in X$ και έστω $F : [0, 1] \times X \longrightarrow X$ η απεικόνιση με τύπο $F(t, x) = [p, x](t)$. Προφανώς $F_0 \equiv c_p$ και $F_1 \equiv id_X$. Θα δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Έστω $\{(t_n, x_n)\}$ μία ακολουθία στον $[0, 1] \times X$ τ.ω. $(t_n, x_n) \longrightarrow (t, x)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\gamma_n := [p, x_n]$. Οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους και έτσι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} d(\gamma_n(t), \gamma(t)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n \geq n_2 \implies d(\gamma_t, \gamma_{t_n}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_1 \vee n_2$ έχουμε ότι

$$d(F(t, x), F(t_n, x_n)) = d(\gamma(t), \gamma_n(t_n)) \leq d(\gamma_t, \gamma_{t_n}) + d(\gamma(t_n), \gamma_n(t_n)) < \varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι η F είναι συνεχής, και άρα ομοτοπία. $\square$

Μία ακόμη σημαντική ιδιότητα των μονοσήμαντα γεωδαισιακών χώρων των οποίων οι γεωδαισιακές εξαρτώνται από τα άκρα τους, είναι ότι σε τέτοιους χώρους η κυρτή θήκη ενός διαχωρίσιμου συνόλου είναι διαχωρίσιμη.

Ορισμός 2.2.3 Έστω X γεωδαισιακός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Η κυρτή θήκη $\mathrm{co}(A) \subseteq X$ του A ορίζεται ως

$$\mathrm{co}(A) := \bigcap \big\{ B \subseteq X \,\big|\, B \supseteq A,\ B \text{ κυρτό} \big\}.$$

Επειδή η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο, η κυρτή θήκη ενός συνόλου $A \subseteq X$ είναι κυρτό σύνολο, και είναι προφανώς το ελάχιστο κυρτό σύνολο ως προς τον εγκλεισμό που περιέχει το A. Ο ακόλουθος ισοδύναμος χαρακτηρισμός της κυρτής θήκης βρίσκεται στο [7].

Πρόταση 2.2.4 *Έστω X γεωδαισιακός χώρος και $A \subseteq X$. Θέτουμε $C_0(A) := A$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $C_n(A)$ το σύνολο όλων των σημείων που βρίσκοναι πάνω σε κάποια γεωδαισιακή με αρχή και τέλος στο $C_{n-1}(A)$. Τότε*

$$\mathrm{co}(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n(A).$$

Απόδειξη Για απλότητα θέτουμε $C_n := C_n(A)$. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\big\{C_n\big\}_{n=0}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Πράγματι, αν $x \in C_n$, τότε η σταθερή γεωδαισιακή c_x στο x είναι γεωδαισιακή με αρχή και τέλος στο C_n, και άρα $x \in C_{n+1}$. Ειδικότερα, $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι το $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ είναι κυρτό και περιέχεται σε κάθε κυρτό σύνολο K που περιέχει το A. Έστω $x, y \in C$. Αφού η C_n είναι αύξουσα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x, y \in C_n$. Όμως από τον ορισμό της $\{C_n\}$, για κάθε γεωδαισιακή $\gamma \in T(x, y)$, έχουμε ότι $\mathrm{Im}\gamma \subseteq C_{n+1} \subseteq C$. Τέλος, ένα προφανές επαγωγικό επιχείρημα δείχνει ότι κάθε κυρτό σύνολο που περιέχει το A, θα περιέχει αναγκαστικά όλα τα C_n. $\square$

Αυτός ο ισοδύναμος χαρακτηρισμός της κυρτής θήκης μάς δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε ότι η κυρτή θήκη ενός διαχωρίσιμου συνόλου είναι διαχωρίσιμο σύνολο. Πριν διατυπώσουμε αυτή την πρόταση θα είναι καλό να θυμηθούμε κάποια πράγματα γύρω από την έννοια της διαχωρισιμότητας για υποσύνολα ενός μετρικού χώρου. Έστω ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, d). Το A θα λέγεται διαχωρίσιμο, αν είναι διαχωρίσιμος χώρος με τον περιορισμό της d.

Πρόταση 2.2.5 *Έστω A υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d). Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το A είναι διαχωρίσιμο.*

(β) *Υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $D \subseteq A$ τ.ω. $\overline{A} \subseteq \overline{D}$.*

(β) *Υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $D \subseteq X$ τ.ω. $\overline{A} \subseteq \overline{D}$.*

Πρόταση 2.2.6 *Έστω (X, d) μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος του οποίου οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους και έστω A ένα διαχωρίσιμο υποσύνολο του X. Τότε η κυρτή θήκη του A είναι διαχωρίσιμη.*

Απόδειξη Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η αριθμήσιμη ένωση διαχωρίσιμων συνόλων είναι διαχωρίσιμο σύνολο, και έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι το $C_n := C_n(A)$ είναι διαχωρίσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από την υπόθεση, το $C_0 = A$ είναι διαχωρίσιμο. Υποθέτουμε ότι το C_n είναι διαχωρίσιμο για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και θα δείξουμε ότι το C_{n+1} είναι διαχωρίσιμο. Έστω D_n ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του C_n, τ.ω. $\overline{C_n} = \overline{D}$. Θέτουμε $\gamma_{x,y} : [0,1] \longrightarrow X$ τη μοναδική γεωδαισιακή με αρχή το x και τέλος το y, για κάθε $x, y \in D_n$. Τό σύνολο

$$D_{n+1} := \bigcup_{x,y \in D_n} \gamma\big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big) \subseteq C_{n+1},$$

είναι προφανώς αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο C_{n+1}. Έστω $x \in C_{n+1}$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $x \in C_{n+1}$, υπάρχουν $p, q \in C_n$, τ.ω. το x να ανήκει στην εικόνα της $\gamma := \gamma_{p,q} : [0,1] \longrightarrow X$. Υπάρχει $t \in [0,1]$ τ.ω. $x = \gamma(t)$. Αφού το D_n είναι πυκνό στο C_n, υπάρχουν ακολουθίες $\{p_m\}, \{q_m\} \subseteq D_n$, τ.ω. $p_m \longrightarrow p$ και $q_m \longrightarrow q$. Επειδή οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$$m \geq m_1 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} d(\gamma_m(t), \gamma(t)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου $\gamma_m := \gamma_{p_m, q_m}$, $m \in \mathbb{N}$. Επίσης, από τη συνέχεια της γ, υπάρχει $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ τ.ω. $d(\gamma_t, \gamma_q) < \varepsilon/2$. Τότε $\gamma_m(q) \in D_{n+1}$ και

$$d(x, \gamma_m(q)) \leq d(\gamma_t, \gamma_q) + d(\gamma(q), \gamma_m(q)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς $C_{n+1} \subseteq \overline{D_{n+1}}$, και άρα το C_{n+1} είναι διαχωρίσιμο όπως ζητούσαμε. □

2.3 Γινόμενα και Χώροι L^p

Σ' αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε το εάν το γινόμενο γεωδαισιακών ή χώρων μήκους είναι γεωδαισιακός ή χώρος μήκους αντίστοιχα και θα περιγράψουμε τις γεωδαισιακές του χώρου γινόμενο. Επίσης, θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα στους χώρους L^p, συναρτήσεων με τιμές σε μετρικούς χώρους.

2.3.1 Γινόμενα Μετρικών Χώρων

Ορισμός 2.3.1 Έστω (X_1, d_1), (X_2, d_2) μετρικοί χώροι. Το ℓ_p-γινόμενο των X_1, X_2 είναι το σύνολο $X_1 \times X_2$ εφοδιασμένο με τη μετρική d με τύπο

$$d(x,y) = \big(d_1^p(x_1, y_1) + d_2^p(x_2, y_2)\big)^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε $1 \leq p < \infty$, και $d(x,y) = d_1(x_1, y_1) \vee d_2(x_2, y_2)$ για $p = +\infty$. Συμβολίζεται με $X_1 \times^p X_2$, ή απλούστερα $X_1 \times X_2$. Το γινόμενο των X_1, X_2, είναι το ℓ_2-γινόμενό τους.

Παραδείγματος χάριν, $\ell_p^n \times^p \ell_p^m = \ell_p^{m+n}$. Προφανώς το ℓ_p-γινόμενο δύο μετρικών χώρων είναι πλήρης μετρικός χώρος ανν οι X_1, X_2 είναι πλήρεις. Θα συμβολίζουμε με $p^i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ τις φυσικές προβολές. Οι προβολές αυτές είναι Lipschitz συναρτήσεις με σταθερά Lipschitz $= 1$. Όπως θα δούμε, για $1 < p < \infty$, οι προβολές είναι αφφινικές απεικονίσεις, με την έννοια ότι απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές.

Πρόταση 2.3.1 *Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και έστω X το ℓ_p-γινόμενο των (X_1, d_1), (X_2, d_2). Τότε,*

(α) *Αν οι $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow X$ είναι γεωδαισιακές, τότε η διαγώνια καμπύλη $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ με τύπο $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ είναι γεωδαισιακή. Αντίστροφα, αν $1 < p < \infty$ και η $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ είναι γεωδαισιακή, τότε η συνιστώσες καμπύλες $\gamma_i := p^i \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$ είναι γεωδαισιακές. Ειδικότερα, αν $1 < p < \infty$, τότε ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός ανν οι X_1, X_2 είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακοί.*

(β) *Αν οι X_1, X_2 είναι γεωδαισιακοί χώροι, τότε και ο X είναι γεωδαισιακός χώρος. Αν $1 < p < \infty$, το αντίστροφο είναι επίσης αληθές*

(γ) *Έστω $1 < p < \infty$. Τοτε οι φέτες $\{x_1\} \times X_2$, $X_1 \times \{x_2\}$, $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$ είναι κυρτές.*

(δ) *Ο X είναι χώρος μήκους ανν οι X_1, X_2 είναι χώροι μήκους.*

Απόδειξη (α) Έστω $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow X_i$ γεωδαισιακή, $i = 1, 2$, και έστω $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ η διαγώνια καμπύλη. Για κάθε $1 \leq p < \infty$ και κάθε $s, t \in I$,

$$d^p(\gamma_s, \gamma_t) = d_1^p(\gamma_1(s), \gamma_1(t)) + d_2^p(\gamma_2(s), \gamma_2(t)) = |t - s|^p d^p(\gamma_0, \gamma_1).$$

Η περίπτωση $p = \infty$ είναι εξίσου προφανής. Θα αποδείξουμε το αντίστροφο για $1 < p < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό των γεωδαισιακών της πρότασης 1.3.2. Έστω $s, t \in [0,1]$. Θέτουμε $m := (\gamma_1, \gamma_2)\big(\frac{s+t}{2}\big)$, $x = (\gamma_1, \gamma_2)(s)$ και $y = (\gamma_1, \gamma_2)(t)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $d_i(x_i, m_i) = d_i(m_i, y_i) = \frac{1}{2} d_i(x_i, y_i)$, για κάθε $i = 1, 2$. Παρατηρούμε ότι για $1 < p < \infty$, η στοιχειώδης ανισότητα

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad a, b \geq 0,$$

ισχύει ως ισότητα ανν $a = b$. Συνεπώς, οι ανισότητες

$$d_i^p(x_i, y_i) \leq \big(d_i(x_i, m_i) + d_i(m_i, y_i)\big)^p \leq 2^{p-1}\big(d_i^p(x_i, m_i) + d_i^p(m_i, y_i)\big) \qquad (A_i),$$

ισχύουν ως ισότητες ανν $d_i(x_i, m_i) = d_i(m_i, y_i) = \frac{1}{2} d_i(x_i, y_i)$, για $i = 1, 2$. Προσθέτοντας τις κατά μέλη τις ανισότητες (A_i), $i = 1, 2$ παίρνουμε ότι

$$d^p(x, y) \leq 2^{p-1}\big(d^p(x, m) + d^p(m, y)\big). \qquad (A)$$

Όμως η γ είναι γεωδαισιακή, και άρα $d(x, m) = d(m, y) = \frac{1}{2} d(x, y)$, από όπου έπεται ότι η ανισότητα (A) ισχύει ως ισότητα, και άρα και οι ανισότητες (A_i) ισχύουν ως ισότητες, $i = 1, 2$, όπως ζητούσαμε. Τα (β) και (γ) έπονται άμεσα από το (α).
(δ) Υποθέτουμε πρώτα ότι οι X_1, X_2 είναι χώροι μήκους. Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού οι X_i είναι χώροι μήκους, υπάρχει $(\varepsilon/2^{1/p})$-μέσο m_i των x_i, y_i, $i = 1, 2$. Θα δείξουμε ότι το $m := (m_1, m_2)$ είναι ε-μέσο των $x, y \in X$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} d(x, m) &= \Big(d_1^p(x_1, m_1) + d_2^p(x_2, m_2)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\big(\frac{1}{2} d_1(x_1, y_1) + \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}\big)^p + \big(\frac{1}{2} d_2(x_2, y_2) + \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}\big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} d(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $d(m, y) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$, και η περίπτωση $p = \infty$ είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι χώρος μήκους και θα αποδείξουμε ότι ο X_1 είναι χώρος μήκους. Το ότι ο X_2 είναι χώρος μήκους αποδεικνύεται ανάλογα. Έστω $x_1, y_1 \in X_1$, $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε σημείο $u \in X_2$ και μία καμπύλη $\gamma \in C\big((x_1,u),(y_1,u)\big)$ μήκους

$$L(\gamma) \leq d\big((x_1,u),(y_1,u)\big) + \varepsilon = d_1(x_1,y_1) + \varepsilon.$$

Η $p^1 \circ \gamma$, ενώνει τα x_1, y_1 και επειδή η προβολή είναι 1-Lipschitz, έπεται ότι

$$L(p^1 \circ \gamma) \leq L(\gamma) \leq d(x_1,y_1) + \varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι ο X_1 είναι χώρος μήκους. $\square$

Όμοια, ορίζεται το ℓ_p-γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μετρικών χώρων (X_i,d_i), $i = 1,\ldots,n$. Οι ℓ_p-μετρικές είναι διατεταγμένες με την έννοια ότι για κάθε $1 \leq p \leq q \leq \infty$, έχουμε $d_q \leq d_p$. Επίσης είναι όλες Lipschitz ισοδύναμες αφού $d_\infty \leq d_p \leq n^{1/p} d_\infty$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ Προφανώς, για κάθε $1 \leq m \leq n$, η απεικόνιση

$$(X_1 \times^p \ldots \times^p X_m) \times^p (X_{m+1} \times^p \ldots \times^p X_n) \longrightarrow (X_1 \times^p \ldots \times^p X_n),$$

είναι ισομετρία. Αυτό δείχνει επαγωγικά ότι το ανάλογο της προηγούμενης πρότασης, καθώς και της επόμενης ισχύουν και για γινόμενα πεπερασμένων το πλήθος παραγόντων.

Πρόταση 2.3.2 *Έστω X το ℓ_p-γινόμενο, $1 \leq p < \infty$, των μετρικών χώρων (X_1,d_1), (x_2,d_2), και έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ μία καμπύλη. Η γ είναι απολύτως συνεχής ανν οι συντεταγμένες καμπύλες $\gamma_i = p^i \circ \gamma$ είναι απολύτως συνεχείς και σ' αυτή την περίπτωση,*

$$|\gamma'|_{d_1 \times^p d_2} = \big\|\big(|\gamma_1'|_{d_1}, |\gamma_2'|_{d_2}\big)\big\|_p, \tag{2.4}$$

σ.π. στο I.

Απόδειξη Είναι προφανές ότι αν οι γ_1, γ_2 είναι απολύτως συνεχείς, τότε η γ, είναι απολύτως συνεχής. Το αντίστροφο έπεται από το ότι οι προβολές είναι 1-Lipschitz, και η (2.4) έπεται παίρνοντας το όριο καθώς $s \to t$ στην ισότητα

$$\frac{d(\gamma(s),\gamma(t))}{|t-s|} = \left(\frac{d_1^p(\gamma_1(s),\gamma_1(t))}{|t-s|^p} + \frac{d_2^p(\gamma_2(s),\gamma_2(t))}{|t-s|^p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad s \neq t.$$

2.3.2 Χώροι L^p

Σε όλη αυτή την παράγραφο ο $(\Omega,\mathcal{F})$ θα είναι ένας χώρος μέτρου και ο (X,d) ένας μετρικός χώρος. Θα θεωρούμε πάντα τους μετρικούς χώρους ως μετρήσιμους χώρους με τη Borel σ-άλγεβρα του X, δηλαδή τη σ-άλγεβρα που παράγεται από την τοπολογία του X. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F};X)$, ή απλούστερα με $\mathcal{L}(\Omega;X)$ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, το σύνολο όλων των μετρήσιμων απεικονίσεων $f : \Omega \longrightarrow X$.

Πρόταση 2.3.3 *Το κατά σημείο όριο μίας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές σε ένα μετρικό χώρο είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Απόδειξη Έστω $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, η οποία συκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f : \Omega \longrightarrow X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι μετρήσιμη. Αφού η $\mathcal{B}(X)$ παράγεται από τα ανοικτά υποσύνολα του X, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X. Έστω λοιπόν $U \subseteq X$ ανοι-κτό. Για κάθε $\omega \in f^{-1}(U)$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n \geq k \implies f_n(\omega) \in U$, και άρα $f^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} f^{-1}(U)$. Ωστόσο, αυτός ο εγκλεισμός δεν είναι εν γένει ισότητα, μιας και μπορεί για κάποιο $\omega \in \Omega$, η ακολουθία $(f_n(\omega))$ να περιέχεται όλη στο U, αλλά να συγκλίνει σε κάποιο συνοριακό σημείο του U. Πρέπει λοιπόν να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$F_m := \big\{x \in U \,|\, d(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{m}\big\}.$$

Προφανώς $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, και επειδή τα F_m είναι κλειστά, έχουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} f_n^{-1}(F_m) \subseteq f^{-1}(F_m) \subseteq f^{-1}(U)$, και άρα,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} f_n^{-1}(F_m) \subseteq f^{-1}(U).$$

Θα δείξουμε ότι αυτός ο εγκλεισμός είναι ισότητα. Έστω $\omega \in f^{-1}(U) = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}(F_m)$. Επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $f(\omega) \in F_m$. Αφού $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ και $F_m \subseteq \mathrm{int} F_{m+1} \subseteq F_{m+1}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} f_n^{-1}(F_{m+1})$, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Ορισμός 2.3.2 Έστω $f : \Omega \longrightarrow X$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται *απλή* αν η εικόνα της είναι πεπερασμένη, και *ισχυρά μετρήσιμη* αν η εικόνα της είναι διαχωρίσιμη.

Πρόταση 2.3.4 *Έστω $f : \Omega \longrightarrow X$ μία συνάρτηση.*

(α) *Η f είναι απλή ανν υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση $\Omega = \amalg_{i=1}^{\infty} E_i$ του Ω σε μετρήσιμα σύνολα $E_i \in \mathcal{F}$ τ.ω. η f να είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα E_i, $i = 1, \ldots, n$.*

(β) *Η f είναι ισχυρά μετρήσιμη ανν είναι το κατά σημείο όριο κάποιας ακολουθίας απλών συναρτήσεων.*

Απόδειξη Το (α) είναι προφανές. Θα δείξουμε το (β). Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ισχυρά μετρήσιμη. Έστω $D = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο της εικόνας $f(\Omega)$ της f. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε μία απεικόνιση $f_n : \Omega \longrightarrow X$ θέτοντας $f_n(\omega)$ το στοιχείο με το μικρότερο δείκτη ανάμεσα σε όλα τα στοιχεία του $\{x_1, \ldots, x_n\}$ τα οποία απέχουν την ελάχιστη απόσταση από το $f(\omega)$. Συμβολικά, η f_n δίνεται από τον τύπο

$$f_n(\omega) = x_{\min\left\{1 \leq i \leq n \,|\, d(f(\omega), x_i) = \min\{d(f(\omega), x_j) \,|\, j=1,\ldots,n\}\right\}}.$$

Οι f_n είναι απλές. Πράγματι, η f_n έχει πεπερασμένη εικόνα, $n \in \mathbb{N}$, και είναι μετρήσιμη, αφού για κάθε $1 \leq k \leq n$, έχουμε ότι

$$f_n^{-1}(x_k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} \big\{\omega \,|\, d(x_k, f) < d(x_i, f)\big\} \cap \bigcap_{i=k}^{n} \big\{\omega \,|\, d(x_k, f) \leq d(x_i, f)\big\}.$$

Από το ότι το D είναι πυκνό στο $f(\Omega)$ έπεται εύκολα ότι $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο και άρα η f είναι το κατά σημείο όριο κάποιας ακολουθίας απλών

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι το κατά σημείο όριο της ακολουθίας απλών (f_n). Το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)$ είναι αριθμήσιμο και αφού $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο, έπεται ότι

$$f(\Omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)},$$

το οποίο από την πρόταση 2.2.5, είναι ισοδύναμο με ότι το $f(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμο. □

Έστω τώρα μ ένα μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ του Ω και έστω $1 \leq p < \infty$. Θέλουμε να ορίσουμε την L^p-απόσταση $d_p(f,g)$ δύο συναρτήσεων $f, g \in \mathcal{L}(\Omega; X)$ από τον τύπο

$$d_p(f,g) = \left(\int_{\Omega} d(f(\omega), g(\omega)) d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Για να έχει όμως ο ορισμός αυτός νόημα, η απεικόνιση $d(f,g) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $d(f,g)(\omega) = d(f(\omega), g(\omega))$, πρέπει να είναι μετρήσιμη. Όμως αυτό δεν είναι εν γένει σωστό, εκτός κι αν ο X είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, όπως είναι γνωστό, αν οι $f : \Omega \longrightarrow X$, $g : \Omega \longrightarrow Y$ είναι μετρήσιμες, τότε η διαγώνια απεικόνιση $(f,g) : \Omega \longrightarrow X \times Y$ είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y))$-μετρήσιμη. Όμως η μετρική d, ως συνεχής συνάρτηση, είναι $(\mathcal{B}(X \times Y), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη. Εν γένει, όμως, ο εγκλεισμός $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$ δεν είναι ισότητα αν οι X, Y δεν είναι διαχωρίσιμοι, και συνεπώς η $d(f,g)$ δεν είναι εν γένει μετρήσιμη. Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται αν περιορίσουμε την προσοχή μας μόνο στις ισχυρά μετρήσιμες συναρτήσεις.

Πρόταση 2.3.5 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, X, Y, Z μετρικοί χώροι και $f : \Omega \longrightarrow X$, $g : \Omega \longrightarrow Y$ ισχυρά μετρήσιμες απεικονίσεις. Τότε για κάθε* Borel *μετρήσιμη απεικόνιση $H : X \times Y \longrightarrow Z$, η συνάρτηση $H \circ (f,g) : \Omega \longrightarrow Z$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη Έστω X_0, Y_0 οι διαχωρίσιμες εικόνες των f, g αντίστοιχα. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι

$$H \circ (f,g) = H|_{X_0 \times Y_0} \circ (\bar{f}, \bar{g}),$$

όπου $\bar{f}, \bar{g}$ είναι οι f, g ιδωμένες ως απεικονίσεις με πεδίο τιμών τις εικόνες τους X_0, Y_0 αντίστοιχα. Η $H|_{X_0 \times Y_0}$ είναι προφανώς $(\mathcal{B}(X \times Y)|_{X_0 \times Y_0}, \mathcal{B}(Z))$-μετρήσιμη, όπου για κάθε $A \subseteq X$, με $\mathcal{B}(X)|_A := \{B \cap A \,, | \, B \in \mathcal{B}(X)\}$, συμβολίζουμε τον περιορισμό της σ-άλγεβρας του X στο A. Επίσης, η $\bar{f}$ είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(X)|_{X_0})$-μετρήσιμη και η $\bar{g}$ $(\mathcal{F}, B(Y)|_{Y_0})$-μετρήσιμη, και άρα η $(\bar{f}, \bar{g})$ είναι $\big(\mathcal{F}, \mathcal{B}(X)|_{X_0} \otimes \mathcal{B}(Y)|_{Y_0}\big)$-μετρήσιμη. Όμως, σε κάθε μετρικό χώρο, ο περιορισμός της Borel σ-άλγεβρας του X στο $A \subseteq X$ συμπίπτει με την Borel σ-άλγεβρα του A, και έτσι, αφού οι εικόνες X_0 και Y_0 είναι διαχωρίσιμες, έπεται ότι

$$\mathcal{B}(X \times Y)|_{X_0 \times Y_0} = \mathcal{B}(X_0 \times Y_0) = \mathcal{B}(X_0) \otimes \mathcal{B}(Y_0) = \mathcal{B}(X)|_{X_0} \otimes \mathcal{B}(Y)|_{Y_0},$$

το οποίο σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύει ότι η $H(f,g)$ είναι μετρήσιμη. □

Ειδικότερα, αν οι $f, g : \Omega \longrightarrow (X, d)$ είναι ισχυρά μετρήσιμες, τότε η $d(f,g) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ισχυρά μετρήσιμων απεικονίσεων $f : \Omega \longrightarrow X$ με $\mathcal{L}^0(\Omega; X)$.

Ορισμός 2.3.3 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και (X, d) μετρικός χώρος. Για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^0(\Omega; X)$ και $1 \leq p \leq \infty$, ορίζουμε την L^p-απόσταση των f, g από τον τύπο

$$d_p(f,g) = \left(\int_\Omega d(f,g)d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

και για $p = \infty$ ορίζουμε

$$d_\infty(f,g) = \mathrm{ess}_\mu \sup d(f,g) = \inf\big\{\alpha \geq 0 \,|\, \mu(\{\omega \,|\, d(f(\omega), g(\omega)) \geq \alpha\}) = 0\big\}.$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το ορισμό της L^p-απόστασης, για κάθε ισχυρά μετρήσιμες απεικονίσεις $f, g : \Omega \longrightarrow X$, έχουμε ότι $d_p(f,g) = \|d(f,g)\|_p$, όπου $\|\cdot\|_p$ είναι η L^p-νόρμα του $L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R})$.

Πρόταση 2.3.6 *Για κάθε* $1 \leq p \leq \infty$, *η συνάρτηση*

$$\mathcal{L}^0(\Omega; X) \times \mathcal{L}^0(\Omega; X) \ni (f,g) \longmapsto d_p(f,g) \in [0, \infty],$$

είναι γενικευμένη ψευδομετρική.

Απόδειξη Προφανώς η d_p είναι συμμετρική και $d_p(f,f) = 0$ για κάθε $\mathcal{L}^0(\Omega; X)$. Για την τριγωνική ανισότητα, παρατηρούμε ότι για κάθε $u, v \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$ με $0 \leq u \leq v$ μ-σ.π., έχουμε ότι $\|u\|_p \leq \|v\|_p$. Έτσι, η τριγωνική ανισότητα της d_p προκύπτει από αυτήν της νόρμας $\|\cdot\|_p$. Πράγματι, για κάθε $f, g, h \in \mathcal{L}^0(\Omega; X)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_p(f,g) &= \|d(f,g)\|_p \leq \|d(f,h) + d(h,g)\|_p \\ &\leq \|d(f,h)\|_p + \|d(h,g)\|_p = d_p(f,h) + d_p(h,g). \end{aligned}$$ □

Αν επιλέξουμε μία ισχυρά μετρήσιμη βασική απεικόνιση $f_0 : \Omega \longrightarrow X$ και περιορίσουμε την d_p στο σύνολο $\mathcal{L}^p(\mu; X, f_0)$ όλων των ισχυρά μετρήσιμων απεικονίσεων με πεπερασμένη απόσταση από την f_0, προκύπτει μία πεπερασμένη ψευδομετρική. Ως συνήθως, ταυτίζοντας μ-σ.π. ίσες συναρτήσεις, παίρνουμε μία (πεπερασμένη) μετρική στο σύνολο πηλικό $L^p(\mu; X, f_0) := \mathcal{L}^p(\mu; X, f_0)/\backsim$ αυτής της σχέσης.Εξακολουθούμε να συμβολίζουμε αυτή μετρική με d_p.

Πρόταση 2.3.7 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και (X, d) πλήρης μετρικός χώρος (X, d). Τότε, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ και κάθε ισχυρά μετρήσιμη απεικόνιση $f : \Omega \longrightarrow X$, ο $L^p(\mu; X, f_0)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη Όμοια με την γραμμική περίπτωση. □

Στην περίπτωση που ο $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι πεπερασμένος χώρος μέτρου, θα θεωρούμε πάντοτε ως βασική απεικόνιση κάποια σταθερή απεικόνιση $c_{x_0} : \Omega \longrightarrow X$, $x_0 \in X$. Τότε, ο $L^p(\mu; X, c_{x_0})$ περιέχει όλες τις σταθερές απεικονίσεις και προφανώς δεν εξαρτάται από την επιλογή της σταθερής βασικής απεικόνισης. Έτσι, για απλότητα στο συμβολισμό, όταν το μ είναι κάποιο πεπερασμένο μέτρο, δεν θα αναφέρουμε τη βασική απεικόνιση και θα γράφουμε απλά $L^p(\mu; X)$.

Επιπλέον, όταν ο (Ω, μ) είναι πεπερασμένος χώρος μέτρου, η απεικόνιση

$$X \ni x_0 \longmapsto c_{x_0} \in L^p(\mu; X)$$

είναι καλά ορισμένη και

$$d_p(c_{x_0}, c_{x_1}) = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} d(x_0, x_1),$$

για κάθε $x_0, x_1 \in X$, $1 \leq p \leq \infty$. Από την τελευταία ισότητα, έπεται ότι αν για κάποιο πεπερασμένο μέτρο μ και κάποιο μετρικό χώρο X ο $L^p(\mu; X)$ είναι γεωδαισιακός χώρος ή χώρος μήκους, τότε και ο X είναι. Θα δούμε τώρα ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αν προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την απόδειξη του αντίστοιχου αποτελέσματος για γινόμενα μετρικών χώρων, θα αντιμετωπίσουμε μία δυσκολία. Πράγματι, στην περίπτωση του γινομένου $X = X_1 \times X_2$, για κάθε $x, y \in X$, επιλέξαμε γεωδαισιακή $\gamma^i_{x,y}$ στον X_i, τ.ω. να συνδέει τις i-οστές συντεταγμένες των x, y. Στην περίπτωση των χώρων L^p, αν $f, g \in L^p(\mu; X, f_0)$, η επιλογή γεωδαισιακών γ_ω, $\omega \in \Omega$, που ενώνουν τις ω-οστές "συντεταγμένες" $f(\omega), g(\omega)$ των f, g, πρέπει να είναι μετρήσιμη.

Ορισμός 2.3.4 Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος. Μία μετρήσιμη επιλογή γεωδαισιακών στον X είναι μία οικογένεια $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$, Borel απεικονίσιεων $H_t : X \times X \longrightarrow X$, τ.ω. για κάθε $x, y \in X$, η καμπύλη

$$[0,1] \ni t \longmapsto H_t(x, y) \in X,$$

να είναι γεωδαισιακή από το x στο y.

Προφανώς σε κάθε μονοσήμαντα γεωδαισιακό χώρο του οποίου οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, υπάρχει μοναδική μετρήσιμη επιλογή γεωδαισιακών. Παρατηρούμε επίσης ότι οι H_0, H_1 είναι οι φυσικές προβολές και η $H_{\frac{1}{2}}$ μία απεικόνιση μέσων στον X. Μάλιστα, υπάρχει μετρήσιμη επιλογή γεωδαισιακών στον X ανν υπάρχει μετρήσιμη απεικόνιση μέσων στον X.

Πρόταση 2.3.8 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω (X, d) μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος με γεωδαισιακές συνεχώς εξαρτώμενες από τα άκρα τους. Τότε, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ και κάθε ισχυρά μετρήσιμη βασική απεικόνιση $o : \Omega \longrightarrow X$, ο $L^p(\mu; X, o)$ είναι γεωδαισιακός χώρος. Αν επιπλέον $1 < p < \infty$, τότε και ο $L^p(\mu; X, o)$ είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος.*

Απόδειξη Έστω $f_0, f_1 \in L^p(\mu; X, o)$ και έστω $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ η μοναδική μετρήσιμη επιλογή γεωδαισιακών στον X. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $f : [0,1] \longrightarrow L^p$ με τύπο $f_t = H_t(f_0, f_1)$ είναι γεωδαισιακή από τη f_0 στη f_1. Από τον ορισμό της f, έχουμε ότι για κάθε $s, t \in [0,1]$,

$$d(f_t, f_s) = d(H_t(f_0, f_1), H_s(f_0, f_1)) = |t - s| d(f_0, f_1). \tag{2.5}$$

Ελέγχουμε πρώτα ότι η f_t είναι ισχυρά μετρήσιμη για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Καταρχάς, επειδή η H_t είναι συνεχής και οι f_0, f_1 είναι ισχυρά μετρήσιμες, από την πρόταση 2.3.5 έπεται ότι η $H_t(f_0, f_1)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Επιπλέον αφού για κάθε $0 \leq t \leq 1$ και κάθε $\omega \in \Omega$ το σημείο $f_t(\omega)$ ανήκει σε κάποια γεωδαισιακή με αρχή στο $f(\Omega)$ και τέλος στο $g(\Omega)$, έπεται ότι

$$f_t(\Omega) \subseteq \mathrm{co}\big(f(\Omega) \times g(\Omega)\big).$$

Αφού όμως το $f_0(\Omega) \cup f_1(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμο και οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, και το $\mathrm{co}\big(f_0(\Omega) \times f_1(\Omega)\big)$ είναι διαχωρίσιμο. Συνεπώς η εικόνα της f_t είναι διαχωρίσιμη. Από την (2.5), έπεται τώρα ότι $f_t \in L^p(\mu; X, o)$. Πράγματι, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_p(f_t, o) &\leq d_p(f_t, f_0) + d(f_0, o) = \|d(f_t, f_0)\|_p + \|d(f_0, o)\|_p \\ &= t\|d(f_0, f_1)\|_p + \|d(f_0, o)\|_p < \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς η τροχιά της f περιέχεται στον $L^p(\mu; X)$. Το ότι η f είναι γεωδαισιακή, συνάγεται και αυτό από την (2.5), αφού για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ έχουμε ότι

$$d_p(f_t, f_s) = \|d(f_t, f_s)\| = |t-s|\|d(f_0, f_1)\|_p = |t-s| d_p(f_0, f_1).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $1 < p < \infty$ και θα αποδείξουμε ότι ο $L^p(\mu; X, o)$ είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός. Αφού ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν η $f : [0,1] \longrightarrow L^p(\mu; X, o)$ είναι γεωδαισιακή, τότε μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, η καμπύλη

$$[0,1] \ni t \overset{\gamma_\omega}{\longmapsto} f_t(\omega) \in X,$$

είναι γεωδαισιακή από το $f_0(\omega)$ στο $f_1(\omega)$. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό των γεωδαισιακών μέσω μέσων ζευγών σημείων της πρότασης 1.3.2. Έστω λοιπόν $f : [0,1] \longrightarrow L^p(\mu; X, o)$ μία γεωδαισιακή και έστω $s, t \in [0,1]$. Θέτουμε $g := f(t)$, $h := f(s)$ και $m := f(\frac{t+s}{2})$. Πρέπει να δείξουμε ότι μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$,

$$d(g(\omega), m(\omega)) = d(m(\omega), h(\omega)) = \frac{1}{2} d(g(\omega), h(\omega)). \tag{2.6}$$

Αφού $1 < p < \infty$, για κάθε $\omega \in \Omega$, η ανισότητα

$$d^p(g(\omega), h(\omega)) \leq 2^{p-1}\big(d^p(g(\omega), m(\omega)) + d^p(m(\omega), h(\omega))\big),$$

ισχύει ως ισότητα ανν η (2.6) ισχύει. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή ως προς το μ, έπεται ότι

$$d_p^p(g, h) \leq 2^{p-1}\big(d_p^p(g, m) + d_p^p(m, h)\big), \tag{2.7}$$

με ισότητα ανν η (2.6) ισχύει μ-σ.π. στο Ω. Όμως η f είναι γεωδαισιακή, και άρα

$$d_p(g, m) = d_p(m, h) = \frac{1}{2} d_p(g, h),$$

από όπου έπεται ότι η (2.7) ισχύει ως ισότητα. Σύμφωνα με το χαρακτηρισμό των γεωδαισιακών μέσω μέσων, βλέπουμε ότι η γ_ω είναι γεωδαισιακή μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$.□

Κεφάλαιο 3

Κυρτές και Αφφινικές Συναρτήσεις

Όπως έχουμε δει, μέσω των γεωδαισιακών μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της κυρτότητας για υποσύνολα μετρικών χώρων. Παρόμοια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γεωδαισιακές για να ορίσουμε κυρτές, κοίλες και αφφινικές απεικονίσεις. Οι αφφινικές απεικονίσεις ειδικότερα, δηλαδή οι απεικονίσεις που απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές, μπορούν να θεωρηθούν ως μορφισμοί της κατηγορίας των γεωδαισιακών χώρων. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τις έννοιες της κυρτότητας και της αφφινικότητας για συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες.

3.1 Κυρτές Συναρτήσεις

Ορισμός 3.1.1 Έστω (X,d) γεωδαισιακός χώρος και έστω $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ μία συνάρτηση. Η f λέγεται *κυρτή* αν για κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, η συνάρτηση $f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow (-\infty,\infty]$ είναι κυρτή, δηλαδή αν $f(\gamma_t) \leq (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1)$, για κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ και κάθε $0 \leq t \leq 1$. Το *επιγράφημα* της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{epi}(f) := \big\{(x,r) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \leq r\big\}.$$

Η προβολή του $\mathrm{epi}(f)$ στον X λέγεται το ουσιώδες πεδίο ορισμού της f, συμβολίζεται $\mathrm{Dom}(f)$ και αποτελείται από τα $x \in X$ εκείνα, για τα οποία το $f(x)$ είναι πεπερασμένο.

Η f λέγεται αυστηρά κυρτή αν για κάθε μη σταθερή γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ τ.ω. $f(\gamma_0) \vee f(\gamma_1) < +\infty$, ισχύει ότι

$$f(\gamma_t) < (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1),$$

για κάθε $0 < t < 1$.

Πρόταση 3.1.1 *Έστω (X,d) γεωδαισιακός χώρος και έστω $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ μία συνάρτηση.*

(α) *Η f είναι κυρτή ανν το επιγράφημα της είναι κυρτό υποσύνολο του $X \times \mathbb{R}$.*

(β) *Αν η f είναι κυρτή, τότε το ουσιώδες πεδίο ορισμού της f είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή. Θέτουμε $\hat{x_i} := (x_i, r_i) \in \mathrm{epi}(f)$, $i = 0, 1$. Αφού ο X είναι γεωδαισιακός χώρος, υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma \in C(x_0, x_1)$. Τότε, η καμπύλη $\hat{\gamma} \in C(\hat{x_0}, \hat{x_1})$ με τύπο

$$\hat{\gamma}(t) = (\gamma_t, (1-t)r_0 + tr_1), \tag{3.1}$$

είναι προφανώς γεωδαισιακή. Πρέπει να δείξουμε ότι η εικόνα κάθε γεωδαισιακής που συνδέει τα $\hat{x_0}, \hat{x_1}$ περιέχεται στο $\mathrm{epi}(f)$. Έστω, λοιπόν, $\hat{\gamma} \in C(\hat{x_0}, \hat{y_0})$ γεωδαισιακή. Από το χαρακτηρισμό των γεωδαισιακών στους χώρους γινόμενα, έπεται ότι η $\hat{\gamma}$ είναι της μορφής (3.1) για κάποια γεωδαισιακή $\gamma \in C(x_0, x_1)$. Αφού $\hat{x_0}, \hat{x_1} \in \mathrm{epi}(f)$, έχουμε ότι $f(x_0) \le r_0$ και $f(x_1) \le r_1$. Η f όμως είναι κυρτή και άρα για κάθε $t \in [0,1]$, έχουμε ότι

$$f(\gamma_t) \le (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \le (1-t)r_0 + tr_1,$$

δηλαδή ότι $\mathrm{Im}\hat{\gamma} \subseteq \mathrm{epi}(f)$.

Αντίστροφα, έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ γεωδαισιακή. Θέτουμε $x_i := \gamma(i)$, $r_i := f(x_i)$ για $i = 0, 1$. Αν $r_0 = +\infty$ ή $r_1 = +\infty$, τότε η ζητούμενη ανισότητα του ορισμού της κυρτότητας είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι $r_0, r_1 < \infty$. Τότε $\hat{x_i} := (x_i, r_i) \in \mathrm{epi}(f)$, $i = 0, 1$, και αφού το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό, η εικόνα της γεωδαισιακής $\hat{\gamma}$ με τύπο $\hat{\gamma}(t) = (\gamma_t, (1-t)r_0 + tr_1)$, περιέχεται στο $\mathrm{epi}(f)$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

(β) Έστω $x_0, x_1 \in \mathrm{Dom}(f)$ και έστω $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\hat{x_i} := (x_i, r_i) \in \mathrm{epi}(f)$, $i = 0, 1$. Το επιγράφημα της f είναι κυρτό και άρα υπάρχει γεωδαισιακή $\hat{\gamma} \in C(\hat{x_0}, \hat{x_1})$, και κάθε τέτοια γεωδαισιακή περιέχεται στο $\mathrm{epi}(f)$. Θέτουμε $r := r_0 \vee r_1$ και $\hat{x_i}' := (x_i, r) \in \mathrm{epi}(f)$. Τότε $d(\hat{x_0}', \hat{x_1}') = d(x_0, x_1)$. Από την κυρτότητα του επιγραφήματος της f, υπάρχει γεωδαισιακή $\hat{\gamma}' \in C(\hat{x_0}', \hat{x_1}')$. Όμως η προβολή $p_X : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ είναι 1-Lipschitz και άρα

$$L(p_X \circ \hat{\gamma}') \le L(\hat{\gamma}') = d(\hat{x_0}', \hat{x_1}') = d(x_0, x_1).$$

Συνεπώς, η $\gamma := p_X \circ \hat{\gamma}' \in C(x_0, x_1)$ είναι γεωδαισιακή. Απομένει να δείξουμε ότι κάθε γεωδαισιακή $\gamma \in C(x_0, x_1)$ περιέχεται στο $\mathrm{Dom}(f)$. Έστω, λοιπόν, $\gamma \in C(x_0, x_1)$. Η καμπύλη $\hat{\gamma} : [0,1] \longrightarrow X \times \mathbb{R}$ με τύπο $\hat{\gamma}(t) = (\gamma_t, (1-t)f(x_0) + tf(x_1))$ είναι γεωδαισιακή και, αφού η f είναι κυρτή, από το (α) έχουμε ότι $\mathrm{Im}\hat{\gamma} \subseteq \mathrm{epi}(f)$. Έτσι,

$$f(\gamma_t) \le (1-t)f(x_0) + tf(x_1) < \infty,$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Συνεπώς, $\mathrm{Im}\gamma \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. $\square$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ είναι κυρτή ανν το $\mathrm{Dom}(f)$ είναι κυρτό και η $f|_{\mathrm{Dom}(f)}$ είναι κυρτή.

Πρόταση 3.1.2 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ είναι κάτω ημισυνεχής ανν το επιγράφημά της είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Προφανώς, το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κλειστό ανν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ με $x_n \longrightarrow x \in X$ και κάθε ακολουθία $\{r_n\} \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x_n) \le r_n$ και $r_n \longrightarrow r$, ισχύει ότι $f(x) \le r$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής.

Πράγματι, έστω ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής και έστω $\{x_n\} \subseteq X$, $\{r_n\} \subseteq \mathbb{R}$ ακολουθίες όπως παραπάνω και $\varepsilon > 0$. Από την κάτω ημισυνέχεια της f, υπάρχει περιοχή V του x τ.ω. $y \in V \implies f(y) \geq f(x) - \varepsilon$. Έτσι, για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $r_n \geq f(x_n) \geq f(x) - \varepsilon$, και, συνεπώς, $r \geq f(x) - \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $r \geq f(x)$, όπως ζητούσαμε.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f δεν είναι κάτω ημισυνεχής. Υπάρχει τότε $x \in X$ τ.ω. η f να μην είναι κάτω ημισυνεχής στο x. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) $f(x) < \infty$: Υπάρχει τότε $\varepsilon > 0$ τ.ω. για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $x_n \in D(x, 1/n)$ τ.ω. $f(x_n) \leq f(x) - \varepsilon$. Αν θέσουμε $r_n := (f(x) - \varepsilon) \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $r_n \longrightarrow r \in \mathbb{R}$, $f(x_n) \leq r_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $f(x) > r$, δηλαδή $(x, r) \notin \mathrm{epi}(f)$.
(ii) $f(x) = \infty$: Σ' αυτή την περίπτωση, υπάρχει $M > 0$ και ακολουθία $x_n \longrightarrow x$ τ.ω. $f(x_n) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, αν $r_n := M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προφανώς $r_n \longrightarrow M$, αλλά $f(x) > M$. □

Οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί των κάτω ημισυνεχών κυρτών συναρτήσεων μέσω μέσων ζευγών σημείων του X είναι χρήσιμοι.

Πρόταση 3.1.3 *Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος και έστω $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Τότε*

(α) *Η f είναι κυρτή ανν για κάθε $x, y \in X$ και κάθε μέσο z των $x, y \in X$ ισχύει ότι*

$$f(z) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big).$$

(β) *Η f είναι αυστηρά κυρτή ανν για κάθε $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ με $x \neq y$, ισχύει ότι*

$$f(z) < \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big),$$

για κάθε μέσο z των x, y.

Απόδειξη (α) Έστω $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ μία γεωδαισιακή. Από την υπόθεση παίρνουμε ότι $f(\gamma_t) \leq (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1)$ για κάθε δυαδικό ρητό $t \in [0, 1]$ και από την κάτω ημισυνέχεια της f βλέπουμε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $t \in [0, 1]$.
(β) Η f προφανώς ικανοποιεί τη συνθήκη του (α) και συνεπώς είναι κυρτή. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ τ.ω. $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathrm{Dom}(f)$ και $t \in (0, 1)$ τ.ω.

$$f(\gamma_t) = (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1).$$

Αφού η f είναι κυρτή, το $\mathrm{Dom}(f)$ είναι κυρτό και άρα $\gamma_t \in \mathrm{Dom}(f)$ για κάθε $t \in (0, 1)$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subseteq (0, 1)$. Αφού η γ είναι γεωδαισική σταθερής ταχύτητας, το γ_t είναι μέσο των $\gamma_{t-\varepsilon}, \gamma_{t+\varepsilon}$, και άρα

$$\begin{aligned}
f(\gamma_t) &< \frac{1}{2}\big(f(\gamma_{t-\varepsilon}), f(\gamma_{t+\varepsilon})\big) \\
&\leq \frac{1}{2}\big((1-t+\varepsilon)f(\gamma_0) + (t-\varepsilon)f(\gamma_1) + (1-t-\varepsilon)f(\gamma_0) + (t+\varepsilon)f(\gamma_1)\big) \\
&= (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1),
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Ορισμός 3.1.2 Έστω (X,d) γεωδαισιακός χώρος. Μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ λέγεται ομοιόμορφα κυρτή αν για κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, ισχύει ότι

$$f(\gamma_{1/2}) \leq \frac{1}{2}\big(f(\gamma_0) + f(\gamma_1)\big) - \eta\big(d(\gamma_0,\gamma_1)\big),$$

για κάποια γνησίως αύξουσα συνάστηση $\eta : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$.

Μία σημαντική κλάση ομοιόμορφα κυρτών συναρτήσεων είναι οι λεγόμενες λ-κυρτές συναρτήσεις, τις οποίες περιγράφουμε στη συνέχεια. Όπως ξέρουμε, εξ ορισμού μία συνάρτηση $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου το I είναι κάποιο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$, είναι κυρτή αν για κάθε $s,t \in I$ το γράφημά της βρίσκεται στο $[s \wedge t, s \vee t]$ κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(s, f(s))$ και $(t, f(t))$. Με άλλα λόγια, η f είναι κυρτή ανν για τη μοναδική αφφινική συνάρτηση ϕ με $\phi(s) = f(s)$ και $\phi(t) = f(t)$ έχουμε ότι $f \leq \phi$ στο $[s\wedge t, s\vee t]$. Αντικαθιστώντας την οικογένεια των αφφινικών απεικονίσεων στον παραπάνω ισοδύναμο χαρακτηρισμό των κυρτών συναρτήσεων με άλλες οικογένειες συνεχών συναρτήσεων, προκύπτουν χρήσιμες παραλλαγές της έννοιας της κυρτότητας.

Ορισμός 3.1.3 Έστω $\Phi \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων. Μία απεικόνιση $f : I \longrightarrow (-\infty,\infty]$ λέγεται Φ-κυρτή, αν

$$f \leq \phi \quad \text{στο} \quad [s \wedge t, s \vee t],$$

για κάθε $s,t \in I$ και κάθε $\phi \in \Phi$ με $\phi(s) = f(s)$ και $\phi(t) = f(t)$.

Έστω $\lambda > 0$. Μία απεικόνιση $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται λ-κυρτή αν είναι Φ_λ-κυρτή, όπου Φ_λ είναι η οικογένεια $\Phi_\lambda = \{\lambda t^2 + at + b \,|\, a,b \in \mathbb{R}\}$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν μία οικογένεια Φ αποτελείται από κυρτές συναρτήσεις και για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ με $x_1 \neq x_2$ υπάρχει συνάρτηση $\phi \in \Phi$ τ.ω. $x,y \in \mathrm{Graph}(\phi)$, τότε κάθε Φ-κυρτή συνάρτηση είναι κυρτή.

2. Η οικογένεια Φ_λ αποτελείται από όλες τις μεταφορές της κυρτής συνάρτησης $t \mapsto \lambda t^2$. Για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ με $x_1 \neq x_2$, υπάρχει μοναδική $\phi \in \Phi_\lambda$ τ.ω. $\phi(x_1) = y_1$ και $\phi(x_2) = y_2$. Έτσι, δεδομένης μίας συνάρτησης $f : I \longrightarrow (-\infty,\infty]$, για κάθε $s,t \in \mathrm{Dom}(f)$ με $s \neq t$, υπάρχει μοναδική μεταφορά $\phi = \phi_{f,s,t}$ της $\mathbb{R} \ni t \mapsto \lambda t^2$ τ.ω. $\phi(s) = f(s)$ και $\phi(t) = f(t)$. Η f είναι λ-κυρτή ανν το γράφημα της βρίσκεται κάτω από την $\phi_{f,s,t}$ στο $[s \wedge t, s \vee t]$, για κάθε $s,t \in \mathrm{Dom}(f)$.

3. Μία συνάρτηση $f : I \longrightarrow (-\infty,\infty]$ είναι λ-κυρτή ανν η συνάρτηση $f_\lambda : I \longrightarrow (-\infty,\infty]$ με τύπο $f_\lambda(t) = f(t) - \lambda t^2$ είναι κυρτή, δηλαδή ανν

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b) - \lambda t(1-t)(b-a)^2,$$

για κάθε $a,b \in I$ και κάθε $t \in [0,1]$.

4. Η λ-κυρτότητα δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από αφφινικές αναπαραμετρίσεις. Π.χ., η συνάρτηση $t \mapsto t^2$ είναι 1-κυρτή, αλλά η $t \mapsto (\frac{1}{2}t)^2$ δεν είναι 1-κυρτή.

5. Αν η $f : I \longrightarrow (-\infty, \infty]$ είναι λ-κυρτή, τότε κάθε αφφινική αναπαραμέτριση $\bar{f} = f \circ u$ της f είναι λ'-κυρτή, όπου $\lambda' = \mathrm{Lip}(u)^2\lambda > 0$.

Σύμφωνα με την παρατήρηση 4, για να ορίσουμε την έννοια της λ-κυρτότητας για συναρτήσεις f που ορίζονται σε γεωδαισιακούς χώρους, απαιτώντας η σύνθεσή τους με τις γεωδαισιακές να είναι λ-κυρτή συνάρτηση, πρέπει να περιοριστούμε σε γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας.

Ορισμός 3.1.4 Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος. Μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ λέγεται λ-κυρτή, $\lambda > 0$, αν για κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0, \ell] \longrightarrow X$ μοναδιαίας ταχύτητας, η συνάρτηση $f \circ \gamma$ είναι λ-κυρτή.

Ισοδύναμα, η f είναι λ-κυρτή αν για κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$,

$$f(\gamma_t) \leq (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1) - \lambda t(1-t)d^2(\gamma_0, \gamma_1),$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Ειδικότερα βλέπουμε ότι κάθε λ-κυρτή συνάρτηση είναι ομοιόμορφα κυρτή ως προς τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\eta : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ με τύπο $\eta(x) = (\lambda/4)x^2$.

Πρόταση 3.1.4 *Έστω f κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Η f είναι λ-κυρτή ανν για κάθε $x, y \in X$, ισχύει ότι*

$$f(z) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) - \frac{\lambda}{4}d^2(x, y),$$

για κάθε μέσο z των $x, y \in X$.

Η ομοιόμορφη κυρτότητα είναι αρκετά ισχυρή ώστε σε πλήρεις μετρικούς χώρους να εξασφαλίζεται η ύπαρξη μοναδικού σημείου ελαχίστου για τις ομοιόμορφα κυρτές συναρτήσεις.

Πρόταση 3.1.5 *Έστω (X, d) πλήρης γεωδαισιακός χώρος και έστω $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ μία ομοιόμορφα κυρτή και κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Τότε η f έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου, δηλαδή υπάρχει μοναδικό σημείο $z \in X$ τ.ω. $f(z) = \inf_{x \in X} f(x)$. Το σημείο αυτό συμβολίζεται με*

$$z := \operatorname*{argmin}_{x \in X} f(x).$$

Απόδειξη Έστω (x_n) μία ακολουθία στον X τ.ω. $f(x_n) \longrightarrow \alpha := \inf_{x \in X} f(x)$. Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ένα μέσο $x_{n,m}$ των x_n και x_m. Τότε, από την ομοιόμορφη κυρτότητα της f έχουμε ότι

$$\alpha \leq f(x_{n,m}) \leq \frac{1}{2}\big(f(x_n) + f(x_m)\big) - \eta\big(d(x_n, x_m)\big),$$

για κάποια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\eta : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$. Συνεπώς $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$. Έτσι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και άρα, αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $z \in X$ τ.ω. $x_n \longrightarrow z$. Όμως, από την κάτω ημισυνέχεια της f, έχουμε ότι $f(z) \leq \liminf f(x_n) = a$, και άρα $f(z) = \min_{x \in X} f(x)$.

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα του σημείου ελαχίστου της f, υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχουν $z_0, z_1 \in X$, $z_0 \neq z_1$ τ.ω. $f(z_0) = f(z_1) = \min_{x\in X} f(x)$. Η f, ως ομοιόμορφα κυρτή, είναι αυστηρά κυρτή. Έτσι, αν το z είναι κάποιο μέσο των z_0, z_1, τότε

$$f(z) < \frac{1}{2}\big(f(z_0) + f(z_1)\big) = \inf_{x\in X} f(x),$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Είναι φανερό από την απόδειξη, ότι για τη μοναδικότητα του σημείου ελαχίστου αρκεί η αυστηρή κυρτότητα της f, και ότι στην περίπτωση που ο X είναι συμπαγής, για την ύπαρξη σημείου ελαχίστου αρκεί η κάτω ημισυνέχεια της f.

3.2 Κυρτοί Μετρικοί Χώροι

Μέσω της έννοιας της κυρτότητας, μπορούμε να μελετήσουμε τους μετρικούς χώρους εκείνους των οποίων η μετρική είναι κυρτή.

Ορισμός 3.2.1 Ένας γεωδαισιακός χώρος (X, d) λέγεται κυρτός αν η μετρική του $d : X\times X \longrightarrow [0, \infty]$ είναι κυρτή, δηλαδή αν για κάθε ζευγάρι γεωδαισιακών $\gamma, \sigma : [0, 1] \longrightarrow X$, ισχύει ότι

$$d(\gamma_t, \sigma_t) \leq (1 - t)d(\gamma_0, \sigma_0) + td(\gamma_1, \sigma_1).$$

Ξεκινάμε δίνοντας μία πιο γεωμετρική περιγραφή της κυρτότητας της μετρικής. Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος και έστω $\gamma, \sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ δύο γεωδαισιακές τ.ω $\gamma(0) = \sigma(0) = p$. Η κυρτότητα της συνάρτησης $[0, 1] \ni t \mapsto d(\gamma_t, \sigma_t)$, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $(0, 1] \ni t \mapsto \frac{d(\gamma_t,\sigma_t)}{t}$ είναι αύξουσα. Στους ευκλείδιους χώρους, η ίδια συνάρτηση είναι σταθερή. Έτσι με μία έννοια, η κυρτότητα της d μας λέει ότι οι γεωδαισιακές στον X αποκλίνουν γρηγορότερα από ότι οι γεωδαισιακές στους ευκλείδιους χώρους. Αυτή η σύγκριση του ρυθμού απόκλισης των γεωδαισιακών στον X και στο ευκλείδιο επίπεδο $\mathbb{E}^2$, μπορεί να διατυπωθεί αυστηρά μέσω τριγώνων σύγκρισης στο $\mathbb{E}^2$. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5, ο ρυθμός απόκλισης των γεωδαισιακών σε ένα μετρικό χώρο συνδέεται στενά με την καμπυλότητα του χώρου. Π.χ., στις πολλαπλότητες Riemann, η κυρτότητα της μετρικής είναι ισοδύναμη με το ότι όλες οι καμπυλότητες τομής είναι μη-θετικές.

Πρόταση 3.2.1 *Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Η μετρική του X είναι κυρτή.*

(β) *Για κάθε ζευγάρι γεωδαισιακών $\gamma, \sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ με $\gamma(0) = \sigma(0)$, έχουμε ότι*

$$d(\gamma_t, \sigma_t) \leq td(\gamma_1, \sigma_1).$$

(γ) *Για κάθε τριάδα (p, x, y) σημείων του X, η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε μέσων m_x και m_y των p, x και p, y αντίστοιχα, είναι μικρότερη ή ίση από την ευκλείδια απόσταση των μέσων των πλευρών $[\bar{p}, \bar{x}]$ και $[\bar{p}, \bar{y}]$, σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ στο $\mathbb{E}^2$ για την τριάδα (p, x, y).*

Απόδειξη Η συνεπαγωγή (α)$\Longrightarrow$(β) είναι προφανής. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι το (β) συνεπάγεται το (γ). Έστω λοιπόν $p, x, y \in X$ και έστω $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ ένα τρίγωνο σύγκρισης στο $\mathbb{E}^2$ για την τριάδα (p, x, y). Έστω m_x και m_y μέσα των p, x και p, y αντίστοιχα. Θεωρούμε τις γεωδαισιακές $\gamma \in C(p, x)$ και $\sigma \in C(p, y)$ που διέρχονται από τα σημεία m_x και m_y αντίστοιχα. Έστω $\bar{m_x}$ και $\bar{m_y}$ τα μέσα των πλευρών $[\bar{p}, \bar{x}]$ και $[\bar{p}, \bar{y}]$ αντίστοιχα, του τριγώνου σύγκρισης $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$. Τότε, το (β) συνεπάγεται ότι

$$d(m_x, m_y) = d(\gamma_{1/2}, \sigma_{1/2}) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_1, \sigma_1) = \frac{1}{2}d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{m_x}, \bar{m_y}).$$

(γ)$\Longrightarrow$(α) Έστω $\gamma, \sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ δύο γεωδαισιακές και έστω $0 \leq s \leq t \leq 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$d\Big(\gamma\Big(\frac{t+s}{2}\Big), \sigma\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\Big) \leq \frac{1}{2}\big(d(\gamma_t, \sigma_t) + d(\gamma_s, \sigma_s)\big). \tag{3.2}$$

Έστω m το μέσο κάποιας γεωδαισιακής $g : [0, 1] \longrightarrow X$ τ.ω. $g_0 = \sigma_s$ και $g_1 = \gamma_t$. Θέτουμε $\gamma_{s,t} = \gamma\big(\frac{t+s}{2}\big)$ και $\sigma_{s,t} = \sigma\big(\frac{t+s}{2}\big)$. Τότε, αν $(\bar{\gamma_t}, \bar{\gamma_s}, \bar{\sigma_s})$ είναι κάποιο τρίγωνο σύγκρισης στο $\mathbb{E}^2$ για την τριάδα $(\gamma_t, \gamma_s, \sigma_s)$ και $\bar{\gamma_{s,t}}, \bar{m}$ είναι τα μέσα των πλευρών $[\bar{\gamma_s}, \bar{\gamma_t}]$ και $[\bar{\gamma_t}, \bar{\sigma_s}]$ αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$d(\gamma_{s,t}, m) \leq d(\bar{\gamma_{s,t}}, \bar{m}) = \frac{1}{2}d(\gamma_s, \sigma_s).$$

Ομοίως, $d(\sigma_{s,t}, m) \leq \frac{1}{2}d(\sigma_t, \gamma_t)$, και άρα η (3.2) έπεται από την τριγωνική ανισότητα. $\square$

Το 1948, ο Busemann χρησιμοποίησε το (γ) της πρότασης αυτής για να ορίσει το τι σημαίνει να έχει ένας μετρικός χώρος καμπυλότητα ≤ 0 και μελέτησε εκτενώς τους μετρικούς χώρους με καμπυλότητα τοπικά ≤ 0. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο ορισμός του Busemann για το πότε ένας μετρικός χώρος έχει καμπυλότητα ≤ 0 είναι ασθενέστερος από αυτόν του A.D. Alexandrov. Οι δύο αυτοί ορισμοί συμπίπτουν για λείες πολλαπλότητες Riemann.

Οι κυρτοί μετρικοί μετρικοί χώροι απολαμβάνουν τις ακόλουθες χρήσιμες ιδιότητες.

Πρόταση 3.2.2 *Έστω (X, d) κυρτός μετρικός χώρος με πεπερασμένη μετρική. Τότε*

(α) *Ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός και οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους.*

(β) *Όλες οι μπάλες στον X είναι κυρτές.*

(γ) *Ο X είναι συρρικνώσιμος, και ειδικότερα απλά συνεκτικός.*

(δ) *Κάθε τοπική γεωδαισιακή στον X είναι γεωδαισιακή.*

Απόδειξη(α) Έστω $\gamma, \sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ δύο γεωδαισιακές τ.ω. $\gamma_0 = \sigma_0$ και $\gamma_1 = \sigma_1$. Από την κυρτότητα της d, για κάθε $0 \leq t \leq 1$, έχουμε ότι

$$d(\gamma_t, \sigma_t) \leq (1-t)d(\gamma_0, \sigma_0) + td(\gamma_1, \sigma_1) = 0,$$

και άρα $\gamma = \sigma$. Έστω τώρα $x, y \in X$ και έστω $\gamma \in C(x, y)$ η μοναδική γεωδαισιακή που συνδέει τα x, y. Έστω $\gamma_n \in C(x_n, y_n)$ μία ακολουθία γεωδαισιακών τ.ω. $x_n \longrightarrow x$ και

$y_n \longrightarrow y$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\gamma_n \longrightarrow \gamma$. Αυτό όμως είναι προφανές, αφού από την κυρτότητα της d έχουμε ότι

$$d(\gamma(t), \gamma_n(t)) \leq (1-t)d(x, x_n) + td(y, y_n) \longrightarrow 0,$$

για κάθε $0 \leq t \leq 1$.
(β) Έστω $D(p,r)$ μία μπαλα στον X και έστω $x, y \in D(p,r)$. Έστω $\gamma \in C(x,y)$ η μοναδική γεωδαισιακή που συνδέει τα x, y. Τότε, αν $c_p : [0,1] \longrightarrow X$ είναι η σταθερή γεωδαισιακή στο p, από την κυρτότητα της d έχουμε ότι για κάθε $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} d(\gamma_t, p) &= d(\gamma(t), c_p(t)) \leq (1-t)d(\gamma_0, c_p(0)) + td(\gamma_1, c_p(1)) \\ &= (1-t)d(x,p) + td(y,p) \leq r. \end{aligned}$$

Το (γ) έπεται άμεσα από το (α) και την πρόταση 2.2.3.
(δ) Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ τοπική γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας. Για να αποδείξουμε ότι είναι γεωδαισιακή πρέπει να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του I είναι γεωδαισιακή. Έστω λοιπόν $[a,b] \subseteq I$. Θέτουμε

$$S := \big\{ r \in [a,b] \;\big|\; \text{η } \gamma|_{[a,r]} \text{ είναι γεωδαισιακή} \big\}.$$

Αφού η γ είναι τοπική γεωδαισιακή, το S περιέχει μία ανοικτή περιοχή του a. Θα δείξουμε ότι το S είναι ανοικτό και κλειστό στο I. Δείχνουμε πρώτα ότι είναι κλειστό. Έστω λοιπόν (r_n) μία αύξουσα ακολουθία στο S τ.ω. $r_n \longrightarrow r \in I$. Έστω σ η θετική (δηλαδή που διατηρεί τον προσανατολισμό) αφφινική αναπαραμέτριση της $\gamma|_{[a,r]}$ στο $[0,1]$. Τότε, αν σ_n είναι οι θετικές αφφινικές αναπαραμετρίσεις των γεωδαισιακών $\gamma|_{[a,r_n]}$ στο $[0,1]$, έχουμε ότι $\sigma_n \longrightarrow \sigma$, και άρα από τις ιδιότητες του συναρτησοειδούς του μήκους, έχουμε ότι

$$L(\gamma|_{[a,r]}) = L(\sigma) \leq \liminf_n L(\sigma_n) = \lim_n d(\gamma_a, \gamma_{r_n}) = d(\gamma_a, \gamma_r).$$

Σημειώνουμε ότι ως τώρα η κυρτότητα της d δεν έχει χρησιμοποιηθεί.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το S είναι ανοικτό. Έστω $r \in S$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $r+\varepsilon \in S$. Φυσικά, αν $r = a$ ή $r = b$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a < r < b$. Αφού η γ είναι τοπική γεωδαισιακή, υπάρχει $0 < \varepsilon < (b-r) \wedge (r-a)$ τ.ω. η $\gamma_{[r-\varepsilon, r+\varepsilon]}$ να είναι γεωδαισιακή. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\gamma|_{[a,r+\varepsilon]}$ είναι γεωδαισιακή, και γι' αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(\gamma_a, \gamma_r) + d(\gamma_r, \gamma_{r+\varepsilon}) = d(\gamma_a, \gamma_{r+\varepsilon})$. Παραμετρίζουμε τα γεωδαισιακά τμήματα $[\gamma_r, \gamma_a]$ και $[\gamma_r, \gamma_{r+\varepsilon}]$ ως γεωδαισιακές σ_1, σ_2 αντίστοιχα, στο $[0,1]$. Συγκεκριμένα,

$$\sigma_1(t) = \gamma\big(r + t(a-r)\big), \quad \sigma_2(t) = \gamma(r + t\varepsilon).$$

Αφού η $\gamma|_{[r-\varepsilon, r+\varepsilon]}$ είναι γεωδαισιακή, για κάθε $t < \frac{\varepsilon}{r-a}$ έχουμε ότι $d(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = d(\sigma_1(t), \gamma_r) + d(\gamma_r, \sigma_2(t))$. Συνεπώς, αν διαλέξουμε $0 < t < \frac{\varepsilon}{r-a}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(\gamma_a, \gamma_r) + d(\gamma_r, \gamma_{r+\varepsilon}) &= d\big(\sigma_1(0), \sigma_1(1)\big) + d\big(\sigma_2(0), \sigma_2(1)\big) \\ &= (1/t)\Big[d\big(\sigma_1(0), \sigma_1(t)\big) + d\big(\sigma_2(0), \sigma_2(t)\big)\Big] \\ &= (1/t)d\big(\sigma_1(t), \sigma_2(t)\big) \leq d\big(\sigma_1(1), \sigma_2(1)\big) \\ &= d(\gamma_a, \gamma_{r+\varepsilon}). \end{aligned}$$

όπως ζητούσαμε. □

Στην περίπτωση που στην παραπάνω πρόταση, η μετρική του χώρου παίρνει και την τιμή ∞, τα (α), (β) και (δ) εξακολουθούν να ισχύουν. Το (γ) ισχύει για κάθε συνεκτική συνιστώσα του X ξεχωριστά.

Πρόταση 3.2.3 *Έστω (X,d) κυρτός μετρικός χώρος και έστω $K \subseteq X$ ένα κυρτό σύνολο. Τότε η 1-Lipschitz συνάρτηση $d_K : X \longrightarrow [0,\infty]$ με τύπο*

$$d_K(x) = \inf\big\{d(x,z)\,\big|\, z \in K\big\},$$

είναι κυρτή.

Απόδειξη Το ότι η d_K είναι 1-Lipschitz είναι αληθές σε όλους τους μετρικούς χώρους, όχι μόνο για κυρτά υποσύνολα και είναι τετριμμένο. Θα αποδείξουμε ότι η d_K είναι κυρτή. Έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ μία γεωδαισιακή και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $z_0, z_1 \in K$ τ.ω. $d(z_i,\gamma_i) \leq d_K(\gamma_i) + \varepsilon, \quad i = 0,1$. Έστω $\sigma \in C(z_0,z_1)$ γεωδαισιακή. Από την κυρτότητα του K, έχουμε ότι $\mathrm{Im}\sigma \subseteq K$, και άρα για κάθε $0 \leq t \leq 1$ έπεται ότι,

$$\begin{aligned} d_K(\gamma(t)) &\leq d(\sigma(t),\gamma(t)) \leq (1-t)d(z_0,\gamma_0) + td(z_1,\gamma_1) \\ &\leq (1-t)d_K(\gamma_0) + td_K(\gamma_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο, έπεται ότι η d_K είναι κυρτή. □

Ειδικότερα, στους κυρτούς μετρικούς χώρους, η συνάρτηση $|\cdot|_p : X \longrightarrow [0,\infty]$ με τύπο $|x|_p = d(p,x)$ είναι κυρτή.

Πρόταση 3.2.4 *Ένας χώρος με νόρμα X είναι κυρτός ως μετρικός χώρος ανν η μοναδιαία μπάλα του είναι αυστηρά κυρτή.*

Απόδειξη Αν η μοναδιαία μπάλα του X δεν είναι αυστηρά κυρτή, τότε ο X δεν είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός και συνεπώς δεν μπορεί να είναι κυρτός ως μετρικός χώρος. Αντίστροφα, έστω ότι η μοναδιαία μπάλα του X είναι αυστηρά κυρτή. Έστω $x,y \in X \times X$. Αφού ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, έχουμε ότι $\mathrm{midp}(x,y) = \{\frac{1}{2}(x+y)\}$ και άρα για την κυρτότητα της d αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(\frac{1}{2}(x+y)) \leq \frac{1}{2}\big(d(x)+d(y)\big)$. Αυτό όμως είναι προφανές, αφού

$$d\big(\frac{1}{2}(x+y)\big) = \frac{1}{2}\|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\| \leq \frac{1}{2}\big(d(x)+d(y)\big).$$

3.3 Αφφινικές Απεικονίσεις

Ορισμός 3.3.1 Έστω X, Y γεωδαισιακοί χώροι. Μία απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ λέγεται αφφινική αν για κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ η καμπύλη $\phi \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή. Ένα αφφινικό συναρτησοειδές είναι μία αφφινική απεικόνιση με πραγματικές τιμές.

Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι γεωδαισιακές θεωρούνται γραμμικά παραμετρισμένες, δηλαδή παραμετρισμένες ώστε να έχουν σταθερή ταχύτητα. Παρατηρούμε ότι μία απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ μεταξύ γεωδαισιακών χώρων είναι αφφινική ανν απεικονίζει οποιαδήποτε γεωδαισιακή $\gamma : I \longrightarrow X$, όπου το $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι κάποιο διάστημα, σε γεωδαισιακή.

Παραδείγματα

1. Μία απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δύο αυστηρά κυρτών χώρων με νόρμα είναι αφφινική ανν είναι της μορφής $\phi(x) = T(x) + y,\ y \in Y$, για κάποια γραμμική απεικόνιση $T : X \longrightarrow Y$.

2. Από την περιγραφή των γεωδαισιακών στο ℓ_p-γινόμενο γεωδαισιακών χώρων, $1 < p < \infty$, έπεται ότι οι προβολές $x^i : X_1 \times_p X_2 \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$, είναι αφφινικές απεικονίσεις για όλους τους γεωδαισιακούς χώρους X_1, X_2.

Πρόταση 3.3.1 *Έστω $\phi : X \longrightarrow Y$ αφφινική απεικόνιση μεταξύ γεψδαισιακών χώρων. Τότε*

$$\begin{aligned} L_\phi &:= \lim_{r\searrow 0} \sup_{d(x,y)=r} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)} = \sup_{0<d(x,y)\le 1} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)} = \sup_{x\neq y} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)} \\ &= \sup\big\{ |\phi\circ\gamma|'(0) \,\big|\, \gamma : [0,\ell] \longrightarrow X \text{ είναι γεωδαισιακή, } |\gamma|'(0) = 1 \big\}. \end{aligned}$$

Αν επιπλέον υπάρχει $r > 0$ τ.ω. κάθε γεωδαισιακό τμήμα στον X να μπορεί να επεκταθεί σε γεωδαισιακό τμήμα μήκους r, τότε

$$L_\phi = \sup_{d(x,y)=r} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)}.$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι αφού ο X είναι γεωδαισιακός χώρος. το σύνολο των τιμών της μετρικής είναι κάποιο αρχικό τμήμα $[0, a)$, $0 \le a \le \infty$, του $\mathbb{R}$, και άρα το πρώτο όριο είναι καλά ορισμένο. Θα δείξουμε ότι το πρώτο όριο υπάρχει δείχνοντας ότι η συνάρτηση

$$r \longmapsto \sup_{d(x,y)=r} \frac{d(\phi(x), \phi(y))}{d(x,y)}$$

αυξάνει καθώς $r \searrow 0$. Έστω λοιπόν $0 < r < s < a$ και έστω $x, y \in X$ τ.ω. $d(x,y) = s$. Το σημείο $y' := [x,y](\frac{r}{s})$, όπου $[x,y]$ είναι το γεωδαισιακό τμήμα με άκρα x, y παραμετρισμένο στο $[0,1]$, απέχει απόσταση r από το x. Έτσι, αφού η ϕ είναι αφφινική έχουμε ότι

$$\sup_{d(x,y)=r} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)} \ge \frac{d(\phi(x), \phi(y'))}{d(x,y')} = \frac{rd(\phi(x), \phi(y))}{rd(x,y)}.$$

Αφού τα σημεία x, y ήταν τυχόντα σημεία με $d(x,y) = s$, έχουμε τέλειωσει. Προφάνως για να δείξουμε ότι οι πρώτες τρεις ποσότητες του λήμματος είναι ίσες, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sup_{x\neq y} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)} \le \lim_{r\to 0} \sup_{d(x,y)=r} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)}.$$

Έστω λοιπόν $x, y \in X$ με $d(x,y) > 0$ και έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ μία γεωδαισιακή στον X με αρχή το x και τέλος το y. Επιλέγουμε $0 < r_0 < d(x,y)$ και για κάθε $0 < r \le r_0$ θέτουμε $t_r = r/d(x,y) \in [0,1]$. Τότε αφού η ϕ είναι αφφινική έχουμε ότι για κάθε $0 < r \le r_0$,

$$\frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)} = \frac{d\big(\phi(x), \phi(\gamma(t_r))\big)}{d\big(x, \gamma(t_r)\big)} \le \sup_{d(x,y)=r} \frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x,y)}.$$

Αφού τα x, y ήταν τυχόντα, παίρνοντας το όριο καθώς το $r \to 0$, βρίσκουμε το ζητούμενο. Η τελευταία ισότητα είναι προφανής.

Τέλος υποθέτουμε ότι κάθε γεωδαισιακή στον X μπορεί να επεκταθεί σε γεωδαισιακή μήκους τουλάχιστον $r > 0$. Τότε αν $0 < s < r$ και τα $x, y \in X$ απέχουν απόσταση s, επεκτείνοντας την $[x, y]$ σε γεωδαισιακή μήκους r, βρίσκουμε σημεία $x', y' \in X$ με απόσταση r, τ.ω.

$$\frac{d\big(\phi(x), \phi(y)\big)}{d(x, y)} = \frac{d\big(\phi(x'), \phi(y')\big)}{d(x', y')},$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.3.2 *Μία συνεχής αφφινική απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ μεταξύ γεωδαισιακών χώρων απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα.*

Απόδειξη Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχει μπάλα $D(o, R) \subseteq X$ τ.ω. το $\phi(D(o, R))$ να μην είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in X$ τ.ω. $d(o, x_n) < R$ και $d(\phi(o), \phi(x_n)) > n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $y_n := [o, x_n](\frac{1}{n})$. Προφανώς $d(o, y_n) \leq \frac{R}{n} \longrightarrow 0$. Αφού η ϕ είναι συνεχής, έχουμε ότι $\phi(y_n) \longrightarrow \phi(o)$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού το ότι η ϕ είναι αφφινική, μας δίνει ότι

$$d(\phi(y_n), \phi(o)) = \frac{1}{n} d(\phi(x_n), \phi(o)) > 1,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 3.3.3 *Έστω X κυρτός μετρικός χώρος με την ιδιότητα ότι υπάρχουν $r_0 > 0$ και μία μπάλα $D(x_0, \varepsilon_0) \subseteq X$ τ.ω. κάθε γεωδαισιακό τμήμα στη $D(x_0, \varepsilon_0)$ μήκους $\leq r_0$ να μπορεί να επεκταθεί σε γεωδαισιακό τμήμα στον X, μήκους r_0. Έστω Y αφφινικός μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνεχής αφφινική απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ είναι Lipschitz συνεχής.*

Απόδειξη Δείχνουμε πρώτα ότι η $\phi|_{D(x_0, \varepsilon_0)}$ είναι Lipschitz συνεχής. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η $\phi|_{D(x_0, \varepsilon_0)}$ δεν είναι Lipschitz. Τότε, από τη πρόταση 3.3.1, υπάρχουν $x_n, y_n \in D(x_0, \varepsilon_0)$ με $d(x_n, y_n) \leq r_0$, τ.ω.

$$d(\phi(x_n), \phi(y_n)) > n d(x_n, y_n).$$

Εξ' υποθέσεως, κάθε γεωδαισιακό τμήμα $[x_n, y_n]$ μπορεί να επεκταθεί σε γεωδαισιακό τμήμα $[x_n', y_n']$ μήκους r_0. Τότε, αφού η ϕ είναι αφφινική,

$$d(\phi(x_n'), \phi(y_n')) > n d(x_n', y_n').$$

Ο X είναι γεωδαισιακός χώρος, και έτσι δεν είναι αριθμήσιμος (εκτός κι αν είναι μονοσύνολο), οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $o \in X$ τ.ω. $o \neq x_n$ και $o \neq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\|x\| := d(o, x)$ για κάθε $x \in X$ και χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό στον Y ως προς το σημείο $o' := \phi(o)$. Θεωρούμε τα σημεία $z_n := [o, x_n'](1/n)$, $w_n := [o, y_n'](1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $z_n, w_n \longrightarrow o$. Πράγματι,

$$\|z_n\| = \frac{1}{n}\|x_n'\| \leq \frac{1}{n}(\|x_0\| + \varepsilon_0 + r_0) \longrightarrow 0,$$

και όμοια βλέπουμε ότι $w_n \longrightarrow o$, το οποίο από τη συνέχεια της ϕ μάς δίνει ότι

$$\|\phi(z_n)\| + \|\phi(w_n)\| \longrightarrow 0.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού

$$\|\phi(z_n)\| + \|\phi(w_n)\| = \frac{1}{n}\big(\|\phi(x'_n)\| + \|\phi(y'_n)\|\big) \geq \frac{1}{n} d(\phi(x'_n), \phi(y'_n)) \geq r_0.$$

Έπειτα δείχνουμε ότι η ϕ είναι αφφινική. Έστω $L \geq 0$ η σταθερά Lipschitz της $\phi|_{D(x_0,\varepsilon_0)}$. Θα δείξουμε ότι

$$\sup_{x\neq y} \frac{d(\phi(x), \phi(y))}{d(x,y)} \leq L.$$

Έστω λοιπόν $x, y \in X$. Θεωρούμε τα γεωδαισιακά τμήματα $[x_0, x]$, $[x_0, y]$ παραμετρισμένα στο $[0, 1]$. Έστω $0 < t < 1$ τ.ω. $tx := [x_0, x](t) \in D(x_0, \varepsilon_0)$ και $ty := [x_0, y](t) \in D(x_0, \varepsilon_0)$. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό $ty := [\phi(x_0), y](t)$, $y \in Y$, $0 \leq t \leq 1$ στον Y, όπου το γεωδαισιακό τμήμα $[\phi(x_0), y]$ θεωρείται πάντα παραμετρισμένο στο $[0, 1]$. Αφού ο X ειναι κυρτός $d(tx, ty) \leq td(x, y)$, και αφού η ϕ είναι αφφινική και ο Y αφφινικός χώρος, έχουμε ότι

$$d(\phi(tx), \phi(ty)) = d(t\phi(x), t\phi(y)) = td(\phi(x), \phi(y)).$$

Συνεπώς,

$$\frac{d(\phi(x), \phi(y))}{d(x,y)} = \frac{td(\phi(x), \phi(y))}{td(x,y)} \leq \frac{d(\phi(tx), \phi(ty))}{d(tx,ty)} \leq L,$$

όπως ζητούσαμε.

Πρόταση 3.3.4 *Το κατά σημείο όριο μίας ακολουθίας αφφινικών απεικονίσεων είναι αφφινική απεικόνιση*

Απόδειξη Έστω X, Y μετρικοί χώροι και έστω $\phi_n : X \longrightarrow Y$ μία ακολουθία αφφινικών απεικονίσεων, συγκλίνουσα κατά σημείο σε κάποια απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$. Αν η $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ είναι γεωδαισιακή, τότε η καμπύλη $\phi_n \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow Y$ είναι γεωδαισιακή στον Y για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\phi_n \longrightarrow \phi$ κατά σημείο, έχουμε ότι $\phi_n \circ \gamma \longrightarrow \phi \circ \gamma$ κατά σημείο, το οποίο δείχνει ότι η $\phi \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή. $\square$

Πρόταση 3.3.5 *Έστω X, Y μονοσήμαντα γεωδαισιακοί χώροι. Μία συνεχής απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ είναι αφφινική ανν μετατίθεται με την απεικόνιση των μέσων του X, δηλαδή ανν*

$$\phi\big(m(x, y)\big) = m\big(\phi(x), \phi(y)\big),$$

για κάθε $x, y \in X$.

Απόδειξη Είναι προφανές ότι αν η ϕ είναι αφφινική, τότε μετατίθεται με την απεικόνιση των μέσων. Αντίστροφα, έστω $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ μία γεωδαισιακή και έστω $[\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)]$ η μονοδική γεωδαισιακή που συνδέει τα $\phi(\gamma_0)$ και $\phi(\gamma_1)$, παραμετρισμένη στο $[0, 1]$. Οι $\phi \circ \gamma$, $[\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)]$ είναι συνεχείς, και έτσι για να δείξουμε ότι $\phi \circ \gamma = [\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)]$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\phi \circ \gamma(t) = [\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)](t), \tag{3.3}$$

για κάθε δυαδικό ρητό t, $0 \leq t \leq 1$. Για να δείξουμε λοιπόν ότι ισχύει για κάθε δυαδικό ρητό t, αρκεί να δείξουμε ότι αν ισχύει για κάποια $0 \leq s, t \leq 1$, τότε ισχύει και για το $\frac{t+s}{2}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
[\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)]\left(\frac{t+s}{2}\right) &= m\big([\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)](t), [\phi(\gamma_0), \phi(\gamma_1)](s)\big) \\
&= m\big(\phi(\gamma_t), \phi(\gamma_s)\big) = \phi\big(m(\gamma(t), \gamma(s))\big) = \phi\left(\gamma\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\right),
\end{aligned}$$

όπως ζητούσαμε. $\square$

Πρόταση 3.3.6 *Έστω (X, d) μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(α) *Η απεικόνιση $H_t : X \times X \longrightarrow X$ με τύπο $H_t(x, y) = [x, y](t)$ είναι αφφινική.*

(β) *Η απεικόνιση των μέσων $m : X \times X \longrightarrow X$ του X είναι αφφινική.*

(γ) *Για κάθε $x, y, z, w \in X$,*

$$m\big(m(x, y), m(z, w)\big) = m\big(m(x, z), m(y, w)\big).$$

Ένα απλό παράδειγμα χώρου του οποίου η απεικόνιση των μέσων δεν είναι αφφινική είναι ο τρίποδας. Ο τρίποδας μπορεί να περιγραφεί ως ο χώρος που προκύπτει αν εφοδιάσουμε την ένωση τριών ευθύγραμμων τμημάτων με μοναδικό κοινό σημείο το αρχικό τους σημείο με τη μετρική μήκους που επάγεται από τον περιορισμό της ευκλείδιας μετρικής του $\mathbb{R}^2$

3.4 Αφφινικά Συναρτησοειδή

Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος και $o \in X$ βασικό σημείο. Θέτουμε $(X, o)^*$ το σύνολο όλων των Lipschitz συνεχών αφφινικών συναρτησοειδών $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $x^*(o) = 0$. Προφανώς, ο $(X, o)^*$ είναι γραμμικός χώρος. Για κάθε $x^* \in (X, o)^*$ θέτουμε

$$\|x^*\|_o := \sup_{x \neq y} \frac{|x^*(x) - x^*(y)|}{d(x, y)} < \infty$$

Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα γράφουμε απλά $\|x^*\|$ αντί $\|x^*\|_o$. Προφανώς, η συνάρτηση $\|\cdot\|_o : (X, o)^* \longrightarrow [0, \infty)$ είναι νόρμα στον $(X, o)^*$.

Πρόταση 3.4.1 *Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος και έστω $o \in X$ ένα βασικό σημείο. Ο $(X, o)^*$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα $\|\cdot\|_o : (X, o)^* \longrightarrow [0, \infty)$.*

Απόδειξη Έστω (x_n^*) ακολουθία Cauchy στον $(X, o)^*$ και έστω $x \in X$. Τότε

$$|x_n^*(x) - x_m^*(x)| \leq \|x_n^* - x_m^*\|_o d(o, x) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Αρα η $x_n^*(x)$ είναι ακολουθία Cauchy για κάθε $x \in X$, και, έτσι, από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^*(x) \in \mathbb{R}$ τ.ω. $x_n^*(x) \longrightarrow x^*(x)$. Το συναρτησοειδές $X \ni x \mapsto x^*(x) \in \mathbb{R}$ είναι αφφινικό ως κατά σημείο όριο συνεχών αφφινικών συναρτησοειδών και προφανώς $x^*(o) = 0$. Θα δείξουμε ότι το x^* είναι Lipschitz συνεχές και $\|x_n^* - x^*\|_o \longrightarrow 0$.

Αφού η (x_n^*) είναι Cauchy, υπάρχει $R \geq 0$ τ.ω. $\|x_n^* - x_m^*\| \leq R$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $x, y \in X$ έχουμε ότι $|(x_1^* - x_m^*)(x) - (x_1^* - x_m^*)(y)| \leq Rd(x, y)$. Παίρνοντας όριο καθώς $m \longrightarrow \infty$ παίρνουμε ότι $|(x_1^* - x^*)(x) - (x_1^* - x^*)(y)| \leq Rd(x, y)$, το οποίο δίνει ότι

$$|x^*(x) - x^*(y)| \leq (R + \|x_1^*\|)d(x, y).$$

Συνεπώς το x^* είναι Lipschitz συνεχές.

Δείχνουμε τέλος ότι $\|x_n^* - x^*\|_o \longrightarrow 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n^*) είναι Cauchy, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \|x_n^* - x_m^*\| < \varepsilon.$$

Έτσι, αν $x, y \in X$, τότε $|(x_n^* - x_m^*)(x) - (x_n^* - x_m^*)(y)| \leq \varepsilon d(x, y)$ για κάθε $m, n \geq N$. Παίρνοντας όριο καθώς $m \to \infty$, παίρνουμε ότι $|(x_n^* - x^*)(x) - (x_n^* - x^*)(y)| \leq \varepsilon d(x, y)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x, y \in X$, έπεται ότι $\|x_n^* - x^*\| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq N$. □

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, η κλάση ισομορφίας του $(X, o)^*$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του βασικού σημείου $o \in X$.

Πρόταση 3.4.2 *Έστω X γεωδαισιακός χώρος και $o, o' \in X$. Τότε $(X, o)^* \cong (X, o')^*$.*

Απόδειξη Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η απεικόνιση $T : (X, o)^* \longrightarrow (X, o')^*$ με τύπο

$$T(x^*)(x) = x^*(x) - x^*(o'),$$

είναι γραμμική (επί) ισομετρία. □

Ο $(X, o)^*$ είναι χώρος με νόρμα και έτσι ο δυικός του $(X, o)^{**}$ ορίζεται ως συνήθως.

Πρόταση 3.4.3 *Η απεικόνιση $\tau : X \longrightarrow (X, o)^{**}$ με τύπο*

$$\tau(x)(x^*) = x^*(x),$$

είναι συστολή και ισχυρά αφφινική, με την έννοια ότι απεικονίζει γεωδαισιακά τμήματα του X σε γραμμικές γεωδαισιακές του $(X, o)^{**}$.

Απόδειξη Έστω $x, y \in X$. Τότε

$$\|\tau(x) - \tau(y)\| = \sup_{\|x^*\|=1} |\tau(x)(x^*) - \tau(y)(x^*)| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x) - x^*(y)| \leq d(x, y),$$

και άρα η τ είναι συστολή. Έστω τώρα $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ γεωδαισιακή. Για κάθε $x^* \in (X, o)^*$ και κάθε $0 \leq t \leq 1$ έχουμε ότι

$$\tau(\gamma_t)(x^*) = x^*(\gamma_t) = (1 - t)x^*(\gamma_0) + tx^*(\gamma_1) = (1 - t)\tau(\gamma_0)(x^*) + t\tau(\gamma_1)(x^*),$$

δηλαδή $\tau(\gamma_t) = (1 - t)\tau(\gamma_0) + t\tau(\gamma_1)$ όπως ζητούσαμε. □

Ορισμός 3.4.1 Έστω X γεωδαισιακός χώρος. Λέμε ότι τα αφφινικά συναρτησοειδή στον X διαχωρίζουν τα σημεία του X αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει αφφινικό συναρτησοειδές $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. $x^*(x) \neq x^*(y)$.

Πρόταση 3.4.4 *Έστω (X, d) γεωδαισιακός χώρος, τ.ω. τα αφφινικά συναρτησοειδή να διαχωρίζουν τα σημεία του. Υπάρχει τότε αφφινική ένθεση του (X, d) σε κάποιο χώρο με νόρμα.*

Απόδειξη Έστω $o \in X$. Αφού τα αφφινικά συναρτησοειδή διαχωρίζουν τα σημεία του X, η αφφινική συστολή $\tau : X \longrightarrow (X, o)^{**}$ της προηγούμενης πρότασης είναι ένθεση. $\square$

Έχει αποδειχθεί από τους Petra Hitzelberger και Alexander Lytchak στο [14] ότι τα αφφινικά συναρτησοειδή ενός γεωδαισιακού χώρου X διαχωρίζουν τα σημεία του ανν ο X είναι ισομετρικός με κάποιο κυρτό υποσύνολο ενός αυστηρά κυρτού χώρου με νόρμα.

Κεφάλαιο 4

Οι Χώροι-Μοντέλα M_κ^n

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τους χώρους-μοντέλα M_κ^n, $n \geq 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$, οι οποίοι διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στον ορισμό της καμπυλότητας στους μετρικούς χώρους, λειτουργώντας ως χώροι με τους οποίους μπορεί κανείς να συγκρίνει αποδοτικά γενικότερους γεωδαισιακούς χώρους. Ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί κανείς να περιγράψει το χώρο M_κ^n, $\kappa \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, είναι ως η μοναδική πλήρης και απλά συνεκτική n-διάστατη πολλαπλότητα Riemann σταθερής καμπυλότητας τομής $= \kappa$. Ωστόσο, θα τους μελετήσουμε πρώτα ως μετρικούς χώρους, αφήνοντας την περιγραφή τους ως πολλαπλότητες Riemann για την τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου.

Για καθε $n \geq 2$, οι χώροι M_κ^n διακρίνονται σε τρεις ποιοτικά διαφορετικές κλάσεις, ανάλογα με το αν το κ είναι μηδέν, θετικός, ή αρνητικός. Για $\kappa = 0$, ο M_0^n είναι απλά ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{E}^n$, για $\kappa = 1$, ο M_1^n είναι η n-διάστατη σφαίρα $\mathbb{S}^n$ με την εσωτερική της μετρική, και για $\kappa = -1$, ο M_{-1}^n είναι ο n-διάστατος υπερβολικός $\mathbb{H}^n$. Οι χώροι M_κ^n, $\kappa > 0$, προκύπτουν από την $\mathbb{S}^n$ πολλαπλασιάζοντας τη μετρική της με κατάλληλη σταθερά, και ομοίως οι χώροι M_κ^n, $\kappa < 0$ προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τη μετρική του $\mathbb{H}^n$ με κατάλληλη σταθερά. Έτσι, για απλότητα θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις $\kappa = 0, 1, -1$, και μετά θα δείξουμε πώς προκύπτουν από αυτούς οι υπόλοιποι χώροι-μοντέλα με κλιμάκωση της μετρικής τους.

4.1 Ο n-διάστατος Ευκλείδιος Χώρος $\mathbb{E}^n$

Ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{E}^n$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με τη μετρική που επάγεται από το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο. Όπως είναι γνωστό, ο $\mathbb{E}^n$ είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός. Εξ' ορισμού, ένα υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{E}^n$ είναι ένας $(n-1)$-διάστατος αφφινικός υπόχωρος του $\mathbb{E}^n$. Αν $p \in H$ και το $u \in \mathbb{E}^n$ είναι κάθετο στο H, τότε

$$H = \big\{ x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x - p, u \rangle = 0 \big\}.$$

Κάθε υπερεπίπεδο στον $\mathbb{E}^n$ προκύπτει κατά τον ακόλουθο τρόπο. Δεδομένων δύο σημείων $a, b \in \mathbb{E}^n$, το σύνολο $H_{a,b}$ όλων των σημείων $x \in \mathbb{E}^n$ που ισαπέχουν από τα a και b, λέγεται το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των a και b. Είναι πράγματι υπερεπίπεδο, περιέχει το μέσο του τμήματος $[a, b]$ και είναι κάθετο στο $b - a$. Τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{E}^n$, καθώς και στους

$\mathbb{S}^n$ και $\mathbb{H}^n$ χρησιμεύουν στην περιγραφή των ομάδων ισομετριών των χώρων μοντέλα. Σε κάθε υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{E}^n$, αντιστοιχεί μία ισομετρία r_H του $\mathbb{E}^n$, η ανάκλαση ως προς το H. Αν $p \in H$ και το $u \in H$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο H, τότε η r_H δίνεται από τον τύπο

$$r_H(x) = x - 2\langle x - p, u\rangle u.$$

Το σύνολο των σταθερών σημείων της r_H είναι το H. Για κάθε $x \notin H$, το υπερεπίπεδο H είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των x και $r_H(x)$ και, αντίστροφα, αν το H είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των $a, b \in \mathbb{E}^n$, τότε $b = r_H(a)$.

4.2 Η n-διάστατη Σφαίρα $\mathbb{S}^n$

Η n-διάστατη σφαίρα, $\mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι το σύνολο

$$S^n := \{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\},$$

εφοδιασμένο με τη μετρική $d : S^n \times S^n \longrightarrow [0, \infty)$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος $(x, y) \in S^n \times S^n$ το μοναδικό αριθμό $d(x, y) \in [0, \pi]$, για τον οποίο

$$\cos d(x, y) = \langle x, y\rangle.$$

Η d είναι πράγματι μετρική· είναι προφανώς συμμετρική και θετικά ορισμένη, και η τριγωνική ανισότητα έπεται από την τριγωνική ανισότητα για τις γωνίες, αφού η απόσταση $d(x, y)$ είναι η γωνία στον $\mathbb{E}^{n+1}$ των γεωδαισιακών τμημάτων $[0, x]$ και $[0, y]$.

Για να εναρμονίσουμε τη μελέτη της $\mathbb{S}^n$ με αυτή του υπερβολικού χώρου, θα δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας, βασισμένη στο σφαιρικό νόμο των συνημιτόνων. Καταρχάς, πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε λέγοντας σφαιρικό τρίγωνο στην $\mathbb{S}^n$ και (εσωτερική) γωνία κορυφής ενός σφαιρικού τριγώνου. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με την ορολογία, επειδή δε θέλουμε να προυποθέσουμε ότι η d είναι μετρική, και έτσι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες της γεωδαισιακής και της γωνίας του πρώτου κεφαλαίου.

Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική δομή του περιβάλλοντα χώρου $\mathbb{E}^{n+1}$ της $\mathbb{S}^n$. Εξ' ορισμού, ένας *μέγιστος κύκλος* στην $\mathbb{S}^n$ είναι η τομή της $\mathbb{S}^n$ με κάποιο 2-διάστατο γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n+1}$. Υπάρχει ένας φυσικός τρόπος να παραμετρίζουμε τόξα μέγιστων κύκλων: Δεδομένων ενός σημείου $x \in \mathbb{S}^n$, ενός μοναδιαίου δια-νύσματος $u \in \mathbb{E}^{n+1}$ κάθετου στο x και ενός αριθμού $\alpha \in [0, \pi]$, ορίζουμε την καμπύλη $\gamma_{x,u} : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ από τον τύπο

$$\gamma_{x,u}(t) = (\cos t)x + (\sin t)u.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $r, t \in [0, \alpha]$ έχουμε ότι $d(\gamma_{x,u}(t), \gamma_{x,u}(r)) = |t - r|$, αφού

$$\langle\gamma_{x,u}(t), \gamma_{x,u}(r)\rangle = \cos t \cos r + \sin t \sin r = \cos(|t - r|).$$

Η τροχιά της $\gamma_{x,u}$ περιέχεται στο μέγιστο κύκλο της $\mathbb{S}^n$ που προκύπτει ως τομή της $\mathbb{S}^n$ με το γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n+1}$ που παράγεται από τα x και u. Θα αναφερόμαστε στην τροχιά της $\gamma_{x,u}$ ως το μέγιστο τόξο με αρχικό διάνυσμα $u \in \mathbb{E}^{n+1}$, που συνδέει το x με το $\gamma_{x,u}(\alpha)$. Προφανώς, αν $\alpha = \pi$, τότε για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathbb{E}^{n+1}$ κάθετο στο $x \in \mathbb{S}^n$, έχουμε ότι $\gamma_{x,u}(\pi) = -x$. Από την άλλη, για κάθε $x, y \in \mathbb{S}^n$ με $d(x,y) < \pi$ υπάρχει μοναδικό μέγιστο τόξο από το x στο y. Αν $x \neq y$, τότε το αρχικό διάνυσμα αυτού του μέγιστου τόξου είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $y - \langle x, y\rangle x$.

Ορίζουμε τώρα τη *σφαιρική γωνία* μεταξύ δύο μέγιστων τόξων που εκκινούν από το ίδιο σημείο με αρχικά μοναδιαία διανύσματα u, v, να είναι ο μοναδικός αριθμός $\alpha \in [0, \pi]$ για τον οποίο $\cos\alpha = \langle u, v\rangle$. Ένα *σφαιρικό τρίγωνο* Δ στην $\mathbb{S}^n$, αποτελείται από τρία διακεκριμένα σημεία A, B, C, τα οποία λέγονται οι κορυφές του, και μία επιλογή τριών μέγιστων τόξων, τις πλευρές του, κάθε μία από τις οποίες ενώνει και ένα ζεύγος κορυφών του. Η γωνία στην κορυφή C, είναι η σφαιρική γωνία των πλευρών του Δ που ενώνουν το C με το A και το C με το B. Κατά την ενασχόλησή μας με γεωδαισιακά τρίγωνα στους χώρους μοντέλα M^n_κ, θα χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση στο συμβολισμό. Θα συμβολίζουμε τις κορυφές ενός τριγώνου με κεφαλαία γράμματα, π.χ. A, B, C, και θα συμβολίζουμε το μήκος κάθε πλευράς με το αντίστοιχο μικρό γράμμα της απέναντι κορυφής, δηλαδή $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ και $c = d(A, B)$.

Πρόταση 4.2.1 *Έστω Δ σφαιρικό τρίγωνο στην $\mathbb{S}^n$ με κορυφές A, B, C και έστω θ η γωνία στην κορυφή C. Τότε*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\theta.$$

Απόδειξη Έστω $u, v \in \mathbb{E}^{n+1}$ τα αρχικά διανύσματα των πλευρών του Δ που ενώνουν την κορυφή C με τις κορυφές A και B, αντίστοιχα. Εξ' ορισμού, $\cos\theta = \langle u, v\rangle$, και άρα

$$\begin{aligned} \cos c &= \langle A, B\rangle = \big\langle (\cos b)\cdot C + (\sin b)\cdot u, (\cos a)\cdot C + (\sin a)\cdot v\big\rangle \\ &= \cos a \cos b \cdot \langle C, C\rangle + \sin b \sin a \cdot \langle u, v\rangle \\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$ □

Πρόταση 4.2.2 *Για κάθε $A, B, C \in \mathbb{S}^n$,*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

με ισότητα ανν το C ανήκει σε κάποιο μέγιστο τόξο που συνδέει τα A και B. Συνεπώς,

(α) *Η $(\mathbb{S}^n, d)$ είναι γεωδαισιακός χώρος, και τα γεωδαισιακά του τμήματα είναι ακριβώς τα μέγιστα τόξα.*

(β) *Αν $d(A, B) < \pi$ τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή που συνδέει τα A και B.*

(γ) *Κάθε ανοικτή (αντιστ. κλειστή) μπάλα ακτίνας $r \leq \pi/2$ (αντιστ. $< \pi/2$) στην $\mathbb{S}^n$, είναι κυρτή.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι τα A, B, C είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Οι άλλες περιπτώσεις είναι τετριμένες. Έστω Δ ένα σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές A, B, C και έστω θ η γωνία στην κορυφή C. Η συνάρτηση cos είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$, και συνεπώς για δεδομένα $a, b \in [0, \pi]$ η συνάρτηση

$$[0, \pi] \ni \theta \longmapsto \cos a \cos b + \sin a \sin b \cdot \cos\theta,$$

φθίνει από $\cos(b-a)$ σε $\cos(b+a)$ καθώς η θ αυξάνει από 0 σε π. Έτσι από το νόμο των συνημιτόνων, έπεται ότι $\cos c \geq \cos(a+b)$, και άρα $c \leq a+b$, με ισότητα ανν $\theta = \pi$ και $b+a \leq \pi$. Οι συνθηκές για ισότητα ισχύουν ανν το C ανήκει στο μέγιστο τόξο ανήκει σε κάποιο μέγιστο τόξο από το A στο B.

Τα (α) και (β) έπονται άμεσα. Θα δείξουμε το (γ). Έστω, λοιπόν, $P \in \mathbb{S}^n$, $r \leq \pi/2$ και $A, B \in D(P,r)$. Τότε $d(A,B) < \pi$, και άρα από το (β) υπάρχει μοναδικό μέγιστο τόξο γ από το A στο B. Αυτό το τόξο περιέχεται στην τομή της $\mathbb{S}^n$ με το 2-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n+1}$ που παράγεται από τα σημεία A, B, και έτσι αποτελείται από σημεία της μορφής $\lambda A+\mu B$, όπου $\lambda+\mu \geq 1$. Αλλά για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda+\mu \geq 1$ για τα οποία $\lambda A+\mu B \in \gamma$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \big\langle \lambda A + \mu B, P \big\rangle &= \lambda\langle A, P\rangle + \mu\langle B, P\rangle \\ &= \lambda \cos d(A,P) + \mu \cos d(B,P) \\ &> (\lambda+\mu)\cos r \geq \cos r, \end{aligned}$$

και άρα $d(P, \lambda A+\mu B) < r \leq \pi/2$, δηλαδή $\gamma \subseteq D(P,r)$. □

Ορισμός 4.2.1 Ένα υπερεπίπεδο H στην $\mathbb{S}^n$ είναι η τομή της $\mathbb{S}^n$ με κάποιο n-διάστατο γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n+1}$. Η ανάκλαση $r_H : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ ως προς το υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{S}^n$, είναι ο περιορισμός στην $\mathbb{S}^n$ της ανάκλασης ως προς το υπερεπίπεδο $\langle H\rangle$ του $\mathbb{E}^{n+1}$ που παράγεται από το H στον $\mathbb{E}^{n+1}$.

Παρατηρήστε ότι ο περιορισμός της μετρικής της $\mathbb{S}^n$, σε κάθε υπερεπίπεδο H της $\mathbb{S}^n$, είναι ισομετρικό με την $\mathbb{S}^{n-1}$. Επίσης, είναι φανερό ότι η ανάκλαση ως προς κάποιο υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{S}^n$ είναι ισομετρία της $\mathbb{S}^n$.

Έστω $A, B \in \mathbb{S}^n$. Το σύνολο H όλων των σημείων της $\mathbb{S}^n$ που ισαπέχουν από τα A και B είναι υπερεπίπεδο στην $\mathbb{S}^n$, το υπερεπίπεδο, $\mathbb{S} \cap (A-B)^{\perp}$, και λέγεται το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των A και B. Πράγματι, το $x \in H$ ανν $d(x,A) = d(x,B)$, δηλαδή ανν $\langle x, A-B\rangle = 0$. Αν το H είναι υπερεπίπεδο στην $\mathbb{S}^n$ και r_H είναι η ανάκλαση στην $\mathbb{S}^n$ ως προς το H, τότε για κάθε $A \in \mathbb{S}^n$, το H είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των A και $r_H(A)$. Πράγματι, για κάθε $x \in H$, έχουμε ότι

$$d(x,A) = d(r_H(x), r_H(A)) = d(x, r_H(A)),$$

το οποίο δείχνει ότι $H \subseteq H_{A,r_H(A)}$, όπου $H_{A,r_H(A)}$ είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των A και $r_H(A)$. Αυτό όμως προφανώς συνεπάγεται ότι $H = H_{A,r_H(A)}$. Αντίστροφα, αν H είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των A και B, τότε $r_H(A) = B$.

4.3 Ο n-διάστατος Υπερβολικός Χώρος $\mathbb{H}^n$

Ο χώρος του, $\mathbb{M}^n$, είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με τη συμμετρική διγραμμική μορφή $(\cdot|\cdot)$ του Minkowski, με τύπο

$$(x|y) = -x_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i.$$

Υπενθυμίζουμε κάποια βασικά αποτέλεσμα απο τη θεωρία των χώρων με εσωτερικό γινόμενο: Σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (όχι απαραίτητα θετικά ορισμένο) με $\dim V = n < +\infty$, υπάρχει βάση $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ του V τ.ω. ο πίνακας $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_E := (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ως προς τη βάση E, να είναι διαγώνιος. Το πλήθος των θετικών (αρνητικών) στοιχείων της διαγωνίου του $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_E$ είναι το ίδιο για κάθε βάση E του V ως προς την οποία ο πίνακας του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι διαγώνιος, και λέγεται ο θετικός (αρνητικός, αντιστ.) δείκτης του $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ομοίως, το πλήθος των μηδενικών στοιχείων της διαγωνίου του $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_E$ είναι το ίδιο για κάθε βάση E του V ως προς την οποία ο πίνακας του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι διαγώνιος, και λέγεται ο δείκτης εκφυλισμού του $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι ισόμορφοι ανν τα εσωτερικά τους γινόμενα έχουν τον ίδιο θετικό δείκτη και τον ίδιο δείκτη εκφυλισμού. Ενα εσωτερικό γινόμενο λέγεται μη-εκφυλισμένο αν ο δείκτης εκφυλισμού του είναι 0. Ένα εσωτερικό γινόμενο τύπου (m, k, ℓ) είναι ένα εσωτερικό γινόμενο με θετικό δείκτη m, αρνητικό δείκτη k και δείκτη εκφυλισμού ℓ. Η διάσταση ενός γραμμικού χώρου στον οποίο ορίζεται κάποιο εσωτερικό γινόμενο τύπου (m, k, ℓ) είναι προφανώς $m + k + \ell$.

Η μορφή του Minkowski είναι μη-εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο τύπου $(n-1, 1, 0)$. Τα σημεία $x \in \mathbb{M}^n$ του χώρου του Minkowski χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το πρόσημο του $(x|x)$. Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, τα σημεία $x \in \mathbb{M}^n$ για τα οποία $(x|x) < 0$ λέγονται χωρικά και τα $x \in \mathbb{M}^n$ για τα οποία $(x|x) > 0$ λέγονται χρονικά σημεία. Το σύνολο όλων των σημείων $x \in \mathbb{M}^n$ με $(x|x) = 0$ λέγεται ο κώνος φωτός. (Συχνά, στην ειδική θεωρία της σχετικότητας χρησιμοποιείται η αντίθετη της μορφής του Minkowski, δηλαδή η μορφή $-(\cdot|\cdot)$, έτσι ώστε τα χωρικά σημεία να είναι εκείνα για τα οποία $(x|x) > 0$.)

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου V του $\mathbb{M}^n$ είναι εξ' ορισμού το σύνολο

$$V^\perp = \big\{x \in \mathbb{M}^n \,\big|\, (x|v) = 0 \text{ για κάθε } v \in V\big\}.$$

Προφανώς το $V^\perp$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{M}^n$ διάστασης $n - \dim\langle V\rangle$. Μια θεμελιώδης ιδιότητα του χώρου του Minkowski είναι η ακόλουθη: Αν ένα σημείο $v \in \mathbb{M}^n$ είναι χωρικό, τότε ο περιορισμός της μορφής του Minkowski στο $v^\perp$ είναι ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο, ενώ αν το $v \in \mathcal{M}^n$ είναι χρονικό, τότε ο περιορισμός της μορφής του Minkowski στο $v^\perp$ είναι μη-εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο τύπου $(n-2, 1, 0)$. Αν τέλος το $v \in \mathcal{M}^n$ ανήκει στον κώνο φωτός, τότε ο $v^\perp$ εφάπτεται στον κώνο φωτός, και σ' αυτή την περίπτωση ο περιορισμός της μορφής του Minkowski στον $v^\perp$ είναι εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο τύπου $(n-2, 0, 1)$.

Ορισμός 4.3.1 Ο n-διάστατος υπερβολικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$, είναι το σύνολο

$$\mathbb{H}^n := \big\{x \in \mathcal{M}^{n+1} \,|\, (x|x) = -1,\ x_{n+1} \geq 0\big\},$$

εφοδιασμένο με τη μετρική $d : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \longrightarrow [0, \infty)$ που αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος (x, y) σημείων του $\mathbb{H}^n$ το μοναδικό αριθμό $d(x, y) \in [0, \infty)$ για τον οποίο

$$\cosh d(x, y) = -(x|y).$$

Πρόταση 4.3.1 *Η μετρική του $\mathbb{H}^n$ όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι καλά ορισμένη και είναι πράγματι μετρική.*

Απόδειξη Η συνάρτηση $\cosh|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Συνεπώς για να ελέγξουμε ότι ο ορισμός της d έχει νόημα, πρέπει να ελέγξουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{H}^n$ έχουμε $(x, y) \leq -1$. Έστω $x, y \in \mathbb{H}^n$. Τότε,

$$\begin{aligned}(x|y) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1}y_{n+1} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2} - x_{n+1}y_{n+1} \\ &= (x_{n+1}-1)^{1/2}(y_{n+1}-1)^{1/2} - x_{n+1}y_{n+1},\end{aligned}$$

και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η τελευταία αυτή ποσότητα είναι μικρότερη ή ίση από -1, για κάθε $x_{n+1}, y_{n+1} \geq 1$, με ισότητα ανν $x_{n+1} = y_{n+1}$. Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας, θα συνάγουμε την τριγωνική ανισότητα από την κατάλληλη μορφή του νόμου των των συνημιτόνων. $\square$

Ξανά, όπως στην περίπτωση της σφαίρας, για να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τον υπερβολικό νόμο των συνημιτόνων, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τις πρωταρχικές έννοιες υπερβολικό τμήμα, υπερβολική γωνία και υπερβολικό τρίγωνο. Εξ' ορισμού, μία *υπερβολική ευθεία* είναι η τομή του $\mathbb{H}^n$ με κάποιο 2-διάστατο γραμμικό υπόχωρο του $\mathcal{M}^{n+1}$. Οι υπερβολικές ευθείες παραμετρίζονται με τρόπο ανάλογο με τα μέγιστα τόξα. Ακριβέστερα, αν $A \in \mathbb{H}^n$ και το $u \in A^\perp \subseteq \mathbb{M}^{n+1}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, (ως προς τον περιορισμό της μορφής του Minkowski στον $A^\perp$,) ορίζουμε την καμπύλη $\gamma_{A,u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^n$, από τον τύπο

$$\gamma_{A,u}(t) = (\cosh t)\cdot A + (\sinh t)\cdot u.$$

Η εικόνα της $\gamma_{A,u}$ είναι μία υπερβολική ευθεία· η τομή του $\mathbb{H}^n$ με το 2-διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{M}^{n+1}$ που παράγεται από τα A και u. Θα λέμε την $\gamma_{A,u}$ παραμετρισμένη υπερβολική ευθεία. Παρατηρούμε ότι

$$(\gamma_{A,u}(t), \gamma_{A,u}(s)) = \sinh t \sinh s - \cosh t \cosh s = -\cosh|t-s|,$$

και άρα $d(\gamma_{A,u}(t), \gamma_{A,u}(s)) = |t-s|$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$. Δεδομένου $a \geq 0$, θα αναφερόμαστε στην εικόνα του $[0, a]$ μέσω της $\gamma_{A,u}$, ως το *υπερβολικό τμήμα* με αρχή το A, τέλος το $\gamma_{A,u}(A)$, και αρχικό διάνυσμα $u \in A^\perp$. Όπως θα δούμε, υπάρχει μοναδικό υπερβολικό τμήμα με δεδομένα άκρα. Έστω $A, B \in \mathbb{H}^n$, $A \neq B$. Αν για κάποιο $u \in A^\perp$ και κάποιο $t > 0$ έχουμε ότι $\gamma_{A,u}(t) = B$, τότε αναγκαστικά $t = d(A, B)$. Όμως για κάθε $B \neq A$ υπάρχει μοναδικό μοναδιαίο διάνυσμα $u_{A,B} \in A^\perp$ τ.ω. $B \in \gamma_{A,u_{A,B}}([0,\infty))$. Πράγματι, αν $\gamma_{A,u}(d(A, B)) = B$ για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $u \in A^\perp$, τότε

$$\begin{aligned}B &= \gamma_{A,u}(d(A,B)) = \cosh d(A,B)\cdot A + \sinh d(A,B)\cdot u \\ &= -(A|B)\cdot A + \left((A|B)^2 - 1\right)^{1/2}\cdot u,\end{aligned}$$

και συνεπώς το

$$u = \frac{B + (A|B)A}{\sqrt{(A|B)^2 - 1}},$$

είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $B+(A|B)A$. Αντίστροφα, αμέσως βλέπουμε ότι αν το u είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $B+(A|B)A$, τότε $\gamma_{A,u}(d(A,B)) = B$. Συνεπώς υπάρχει μοναδικό υπερβολικό τμήμα από A στο B, το τμήμα $\gamma_{A,u}([0,d(A,B)])$, όπου $u \in A^{\perp}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $B+(A|B)A$. Θα συμβολίζουμε αυτό το τμήμα ως $[A,B]$ και το u θα λέγεται το αρχικό διάνυσμα του τμήματος $[A,B]$.

Η *υπερβολική γωνία* μεταξύ δύο υπερβολικών τμημάτων με αρχή το $A \in \mathbb{H}^n$ και αρχικά διανύσματα τα u, v, είναι εξ' ορισμού ο μοναδικός αριθμός $\theta \in [0,\pi]$ για τον οποίο $\cos\theta = (u|v)$. Ο ορισμός αυτός έχει νόημα, αφού όπως έχουμε δει, ο περιορισμός του $(\cdot|\cdot)$ στον $A^{\perp}$ είναι θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο. Ένα *υπερβολικό τρίγωνο* $\mathbb{H}^n$ αποτελείται από τρία σημεία, τις κορυφές του. Τα υπερβολικά τμήματα που ενώνουν τις κορυφές του λέγονται πλευρές. Η γωνία στην κορυφή C ενός υπερβολικού τριγώνου (A,B,C), είναι η υπερβολική γωνία των πλευρών του $[C,A]$ και $[C,B]$. Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε τον υπερβολικό νόμο των συνημιτόνων.

Πρόταση 4.3.2 *Έστω Δ ένα υπερβολικό τρίγωνο στον $\mathbb{H}^n$ με κορυφές A,B,C. Αν θ είναι η γωνία του Δ στην κορυφή C, τότε*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\theta.$$

Απόδειξη Έστω u, v τα αρχικά διανύσματα των υπερβολικών τμημάτων $[C,A]$ και $[C,B]$ αντίστοιχα. Εξ' ορισμού, $\cos\theta = (u,v)$ και άρα

$$\begin{aligned}
\cosh c &= -(A|B) = -\big(\cosh b \cdot C + \sinh b \cdot u | \cosh a \cdot C + \sinh a \cdot u\big) \\
&= -\cosh a \cosh b \cdot (C|C) - \sinh a \sinh b \cdot (u|v) \\
&= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\theta.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.3.3 *Για κάθε $A,B,C \in \mathbb{H}^n$,*

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B),$$

με ισότητα ανν το C ανήκει στο υπερβολικό τμήμα που συνδέει το A με το B. Συνεπώς,

(α) *Ο $(\mathbb{H}^n, d)$ είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός μετρικός χώρος, και το γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα A και B είναι το υπερβολικό τμήμα $[A,B]$.*

(β) *Αν η τομή ενός 2-διάστατου υπόχωρου του $\mathbb{M}^{n+1}$ με τον $\mathbb{H}^n$ είναι μη-κενή, τότε είναι γεωδαισιακή ευθεία, και όλες οι γεωδαισιακές στον $\mathbb{H}^n$ προκύπτουν κατ' αυτό τον τρόπο.*

(γ) *Όλες οι μπάλες στον $\mathbb{H}^n$ είναι κυρτές.*

Απόδειξη Έστω $\Delta \subseteq \mathbb{H}^n$ ένα υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές A,B,C, και έστω θ η γωνία του στην κορυφή C. Καθώς η θ αυξάνει από 0 σε π, η συνάρτηση

$$[0,\pi] \ni \theta \longmapsto \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\theta,$$

αυξάνει γνησίως από $\cosh(b-a)$ σε $\cosh(b+a)$.

Έτσι, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι $\cosh c \leq \cosh(a+b)$ και άρα $c \leq a+b$ με ισότητα ανν $\theta = \pi$. Αλλά $\theta = \pi$ ανν το C ανήκει στο γεωδαισιακό τμήμα $[A, B]$. Πράγματι, αν $C \in [A, B]$, τότε $\theta = \pi$. Αντίστροφα, αν $\theta = \pi$, τότε $u_{C,A} = -u_{C,B}$, και άρα ο 2-διάστατος υπόχωρος που παράγεται από τα $C, u_{C,A}$ συμπίπτει με αυτόν που παράγεται από τα $C, u_{C,B}$, από όπου έπεται ότι $C \in [A, B]$.

Τα (α) και (β) έπονται άμεσα. Θα αποδείξουμε το (γ). Η απόδειξη είναι όμοια με τη σφαιρική περίπτωση. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι κάθε $C \in [A, B]$ είναι της μορφής $\lambda A + \mu B$, για κάποια $\lambda, \mu \geq 0$ με $\lambda + \mu \leq 1$. Όμως αν τα A, B ανήκουν σε κάποια $D(P, r) \subseteq \mathbb{H}^n$, τότε για κάθε σημείο στον $\mathbb{H}^n$ της μορφής $\lambda A + \mu B$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu \leq 1$ έχουμε ότι

$$(\lambda A + \mu B | P) = \lambda(A|P) + \mu(B|P) > -(\lambda + \mu)\cosh r \geq -\cosh r,$$

από όπου έπεται ότι $\lambda A + \mu B \in D(P, r)$. Συνεπώς $[A, B] \subseteq D(P, r)$, και άρα η $D(P, r)$ είναι κυρτή. $\square$

Ορισμός 4.3.2 Ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{H}^n$ είναι μία μη-κενή τομή του $\mathbb{H}^n$ με κάποιο n-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{M}^{n+1}$.

Οι n-διάστατοι υπόχωροι H του $\mathbb{M}^{n+1}$ οι οποίοι έχουν μη-κενή τομή με τον $\mathbb{H}^n$ είναι ακριβώς εκείνοι της μορφής $H = v^\perp$, όπου το $v \in \mathbb{M}^{n+1}$ είναι κάποιο χρονικό σημείο. Η παρατήρηση αυτή έχει δύο συνέπειες. Πρώτον, κάθε υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{H}^n$ του $\mathbb{H}^n$ είναι με τον περιορισμό της μετρικής του $\mathbb{H}^n$ ισομετρικό με τον $\mathbb{H}^{n-1}$. Πράγματι, αφού $H = v^\perp$ για κάποιο χρονικό σημείο, έπεται ότι ο περιορισμός του $(\cdot|\cdot)$ στο γραμμικό χώρο $\langle H \rangle$ που παράγεται από το H στον $\mathbb{M}^{n+1}$ είναι εσωτερικό γινόμενο τύπου $(n-1, 1, 0)$, και άρα υπάρχει ισομετρία $f : \langle H \rangle \longrightarrow \mathbb{M}^n$. Ο περιορισμός της f στο H είναι ισομετρία $f|_H : (H, d|_H) \longrightarrow \mathbb{H}^{n-1}$. Δεύτερον, για κάθε n-διάστατο υπόχωρο H του $\mathbb{M}^{n+1}$ με μη-κενή τομή με τον $\mathbb{H}^n$, κάθε $u \in H^\perp$ είναι χρονικό σημείο, και άρα η ανάκλαση $r_H : \mathbb{M}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{M}^{n+1}$, με τύπο $r_H(x) = x - 2(x|u)u$, όπου το u είναι κάποιο (μοναδικό modulo πρόσημο) μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο H, είναι καλά ορισμένη. Η ανάκλαση r_H είναι αντιστρέψιμη με $r_H^{-1} = r_H$ και διατηρεί τη μορφή του Minkowski, δηλαδή $(r_H(x)|r_H(y)) = (x\,|\,y)$ για κάθε $x, y \in \mathcal{M}^{n+1}$. Έτσι ο περιορισμός της $r_H|_{\mathbb{H}^n}$ στον $\mathbb{H}^n$ είναι ισομετρία του $\mathbb{H}^n$.

Ορισμός 4.3.3 Έστω $H \subseteq \mathbb{H}^n$ υπερεπίπεδο. Η ανάκλαση $r_H : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$ ως προς το H είναι ο περιορισμός στον $\mathbb{H}^n$ της ανάκλασης του $\mathbb{M}^{n+1}$ ως προς τον n-διάστατο υπόχωρο που παράγεται από το H στον $\mathbb{M}^{n+1}$.

Προφανώς κάθε ανάκλαση του $\mathbb{H}^n$ είναι ισομετρία. Για κάθε $A, B \in \mathbb{H}^n$, το σύνολο όλων των σημείων που ισαπέχουν από τα A και B είναι υπερεπίπεδο στον $\mathbb{H}^n$, το υπερεπίπεδο $\mathbb{H}^n \cap (A - B)^\perp$, και λέγεται το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των A και B. Επιπλέον, το σύνολο όλων των σταθερών σημείων της ανάκλασης r_H του $\mathbb{H}^n$ ως προς το υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{H}^n$ είναι ακριβώς το H. Αν $A \notin H$, τότε το H είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των A και $r_H(A)$, και αντίστροφα, αν το H είναι το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των $A, B \in \mathbb{H}^n$, τότε $r_H(A) = B$.

4.4 Οι Χώροι Μοντέλα M^n_κ

Ορισμός 4.4.1 Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Συμβόλιζουμε με M^n_κ τον εξής μετρικό χώρο:

(α) Αν $\kappa = 0$, τότε $M^n_\kappa := \mathbb{E}^n$.

(β) Αν $\kappa > 0$, τότε ο M^n_κ είναι ο χώρος που προκύπτει από τη σφαίρα $\mathbb{S}^n$ πολλαπλασιάζοντας τη μετρική της με $1/\sqrt{\kappa}$.

(γ) Αν $\kappa < 0$, τότε ο M^n_κ είναι ο χώρος που προκύπτει από τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^n$ πολλαπλασιάζοντας τη μετρική του με τη σταθερά $1/\sqrt{-\kappa}$.

Οι χώροι M^n_κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ λέγονται οι χώροι-μοντέλα.

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνεπεία του ορισμού των χώρων-μοντέλα και των αποτελεσμάτων των προηγούμενων παραγράφων.

Πρόταση 4.4.1 *Για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, ο M^n_κ είναι γεωδαισιακός χώρος. Αν $\kappa \leq 0$, τότε ο M^n_κ είναι μονοσήμαντα γεωαδαισιακός και όλες οι μπάλες στον M^n_κ είναι κυρτές. Αν $\kappa > 0$, τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή που σψνδέει δύο σημεία $x, y \in M^n_\kappa$ ανν $d(x, y) < \pi/\sqrt{\kappa}$, και όλες οι (κλειστές) μπάλες στον M^n_κ διαμέτρου $\leq 2\pi/\sqrt{\kappa}$ ($< 2\pi/\sqrt{\kappa}$, αντίστ.) είναι κυρτές.*

Κατά τη μελέτη των χώρων-μοντέλα, χρειάζεται συχνά να διατυπώνουμε υποθέσεις και συμπεράσματα συναρτήσει της ποσότητας $\pi/\sqrt{\kappa}$. Έτσι υιοθετούμε την ακόλουθη ορολογία.

Ορισμός 4.4.2 Για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με D_κ τη διάμετρο του M^n_κ. Έτσι, $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ αν $\kappa > 0$ και $D_\kappa = \infty$ αν $\kappa \leq 0$.

Είναι άμεσο από τον ορισμό των χώρων μοντέλα, ότι, ως σύνολα, τα γεωδαισιακά τμήματα του M^n_κ είναι ακριβώς τα γεωδαισιακά τμήματα του $\mathbb{H}^n$ αν $\kappa < 0$ και τα γεωδαισιακά τμήματα της $\mathbb{S}^n$ αν $\kappa > 0$. Συνεπώς, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.4.3 Η γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων $[C, A]$ και $[C, B]$ στον M^n_κ είναι η γωνία που σχηματίζουν ως γεωδαισιακά τμήματα στον $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{E}^n$ και $\mathbb{S}^n$ αν $\kappa < 0$, $\kappa = 0$ και $\kappa > 0$ αντίστοιχα.

Στους χώρους-μοντέλα, ο νόμος των συνημιτόνων παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Πρόταση 4.4.2 *Έστω Δ γεωδαισιακό τρίγωνο στον M^n_κ με πλευρές θετικού μήκους a, b, c και γωνία θ στην κορυφή απέναντι από την πλευρά μήκους c.*

Αν $\kappa < 0$, τότε

$$\cosh(c\sqrt{-\kappa}) = \cosh(a\sqrt{-\kappa})\cosh(b\sqrt{-\kappa}) - \sinh(a\sqrt{-\kappa})\sinh(b\sqrt{-\kappa})\cos\theta,$$

αν $\kappa = 0$, τότε

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

και αν $\kappa > 0$, τότε

$$\cos(c\sqrt{\kappa}) = \cos(a\sqrt{\kappa})\cos(b\sqrt{\kappa}) - \sin(a\sqrt{\kappa})\sin(b\sqrt{\kappa})\cos\theta.$$

Ειδικότερα, για σταθερά a, b και κ, το μήκος c είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση της γωνίας θ, και αυξάνει από $|b - a|$ έως $a + b$, καθώς η θ αυξάνει από 0 έως π.

Απόδειξη Είναι άμεσο από τους ορισμούς και το νόμο των συνημιτόνων στους $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{E}^n$ και $\mathbb{S}^n$. $\square$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να περάσουμε από τον τύπο του νόμου των συνημιτόνων για $\kappa > 0$ στον τύπο για $-\kappa$ αντικαθιστώντας την $\sqrt{\kappa}$ με $\sqrt{-\kappa} = i\sqrt{\kappa}$, αφού για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $\cos(it) = \cosh t$ και $\sin(it) = i \sinh t$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων στον M^n_κ ισούται με τη γωνία Alexandrov που σχηματίζουν. Αυτό το ξέρουμε ήδη για $\kappa = 0$. Από τους ορισμούς είναι φανερό ότι μένει να το αποδείξουμε για τους $\mathbb{H}^n$ και $\mathbb{S}^n$.

Πρόταση 4.4.3 *Η υπερβολική (αντιστ. σφαιρική) γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων* $[C, A]$ *και* $[C, B]$ *στον* $\mathbb{H}^n$ *(αντιστ. στην* $\mathbb{S}^n$*) ισούται με τη γωνία* Alexandrov *που σχηματίζουν, η οποία μάλιστα υπάρχει με την αυστηρή έννοια.*

Απόδειξη Θα δούμε τις λεπτομέρειες της απόδειξης μόνο στην υπερβολική περίπτωση. Η σφαιρική περίπτωση είναι όμοια.

Θέτουμε $b := d(A, C)$, $a := d(B, C)$ και θ την υπερβολική γωνία μεταξύ των $[C, A]$ και $[C, B]$ στο C. Για κάθε $0 < t \leq a$, $0 < s \leq b$, θέτουμε A_s, B_t τα σημεία των τμημάτων $[C, A]$ και $[C, B]$ που απέχουν από το C απόσταση s και t αντίστοιχα. Επίσης, για κάθε $0 < t \leq a$, $0 < s \leq b$, θέτουμε $c_{s,t} := d(A_s, B_t)$ και $\theta_{s,t}$ τη γωνία σύγκρισης των A_s και B_t στο C. Δηλαδή, η $\theta_{s,t}$ είναι η γωνία στην κορυφή $\overline{C}$ σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $(\overline{C}, \overline{A}_s, \overline{B}_t)$ στον $\mathbb{E}^n$ για την τριάδα (C, A_s, B_t). Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\cos \theta_{s,t} \overset{s,t \to 0^+}{\longrightarrow} \cos \theta.$$

Από τον ευκλείδιο νόμο των συνημιτόνων, έχουμε ότι για κάθε $0 < t \leq a$, $0 < s \leq b$,

$$c_{s,t}^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos \theta_{s,t}.$$

Ο υπερβολικός νόμος των συνημιτόνων συσχετίζει το μήκος $c_{s,t}$ με τα s, t και θ:

$$\cosh c_{s,t} = \cosh s \cosh t - \sinh s \sinh t \cos \theta.$$

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της

$$\cos \theta_{s,t} = \frac{s^2 + t^2 - c_{s,t}^2}{2st},$$

καθώς $s, t \to 0$, χρησιμοποιούμε τη βοηθητική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} x^i.$$

Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει σε όλο το $\mathbb{R}$, και αφού η αναπαράσταση της $\cosh$ σε δυναμοσειρά είναι η $\cosh(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} x^{2i}$, η h συνδέεται με την $\cosh$ από τον τύπο $\cosh x - 1 = h(x^2)$. Αφού $h(0) = 0$ και $h'(0) = 1/2$, η h αμφιδιαφόριση σε μία περιοχή του 0. Η τοπική αντίστροφη της h δίνεται από μία δυναμοσειρά της μορφής

$$h^{-1}(x) = 2x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i,$$

αφού η αντίστροφη μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι αναλυτική συνάρτηση και $(h^{-1})'(0) = 2$. Από τον υπερβολικό νόμο των συνημιτόνων, μπορούμε να γράψουμε την ποσότητα $h(c_{s,t}^2) = \cosh c_{s,t} - 1$, ως

$$\begin{aligned} h(c_{s,t}^2) &= \cosh c_{s,t} - 1 = \cosh s \cosh t - 1 - \sinh s \sinh t \cos\theta \\ &= (\cosh s - 1)\cosh t + \cosh t - 1 - \sinh s \sinh t \cos\theta \\ &= h(s^2)\cosh t + h(t^2) - \sinh s \sinh t \cos\theta. \end{aligned}$$

Έτσι η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(s,t) = h(c_{s,t}^2)$ είναι αναλυτική συνάρτηση τ.ω.

$$(a)\ g(0,0) = 0, \quad (b)\ g(s,0) = h(s^2), \quad (c)\ g(0,t) = h(t^2).$$

Επιπλέον, ο συντελεστής του st στην αναπαράσταση της g σε δυναμοσειρά είναι $-\cos\theta$.

Από το (α), έπεται ότι η $f = h^{-1} \circ g$, η οποία συμπίπτει με $c_{s,t}^2$ για μικρά και θετικά s, t και ορίζεται σε μία περίοχη του 0, στην οποία έχει αναπαράσταση σε δυναμοσειρά της μορφής

$$f(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{i,0}s^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{0,j}t^j - st \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}s^{i-1}t^{j-1}.$$

Από τα (β) και (γ) έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{i,0}s^i = s^2 \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{0,j}t^j = t^2.$$

Έπεται ότι για μικρά $s, t > 0$ έχουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}s^{i-1}t^{j-1} = \frac{s^2 + t^2 - c_{s,t}^2}{st} = 2\cos\theta_{s,t}.$$

Συνδυάζοντας τώρα την αναπαράσταση της h^{-1} σε δυναμοσειρά με το γεγονός ότι ο συντελεστής του st στην αναπαράσταση της g σε δυναμοσειρά είναι $-\cos\theta$, συνάγουμε ότι $b_{1,1} = 2\cos\theta$, και άρα

$$\cos\theta_{s,t} = \cos\theta + \frac{1}{2} \sum_{i>1 \text{ ή } j>1}^{\infty} b_{i,j}s^{i-1}t^{j-1},$$

από όπου έπεται ότι $\cos\theta_{s,t} \longrightarrow \cos\theta$. □

Στην παράγραφο 1.4, ορίσαμε την έννοια του τριγώνου σύγκρισης για να συγκρίνουμε τη γεωμετρία των μετρικών χώρων με αυτή του επίπεδου $\mathbb{E}^2$. Κατά τη μελέτη της καμπυλότητας των μετρικών χώρων στο κεφάλαιο 5, θα χρειαστεί να συγκρίνουμε τη γεωμετρία των μετρικών χώρων όχι μόνο με το ευκλείδιο επίπεδο, αλλά και με τους M_κ^n, για $\kappa \neq 0$. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να μπορούμε να κατασκευάζουμε τρίγωνο σύγκρισης στους M_κ^n για δεδομένη τριάδα σημείων σε ένα μετρικό χώρο. Στην περίπτωση $\kappa > 0$ προκύπτουν κάποιες δυσκολίες. Καταρχάς, υπενθυμίζουμε ότι ένα τρίγωνο σύγκρισης στον $\mathbb{E}^2$ για μία τριάδα (p,x,y) σημείων ενός μετρικού χώρου X, ορίστηκε ως μία τριάδα $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ σημείων του $\mathbb{E}^2$ τ.ω.

$$d(\bar{p},\bar{x}) = d(p,x), \quad d(\bar{p},\bar{y}) = d(p,y), \quad d(\bar{x},\bar{y}) = d(x,y).$$

Έπειτα, αφού ο $\mathbb{E}^2$ είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, η τριάδα αυτή καθόριζε (μοναδικό modulo ισομετρία) τρίγωνο, και έτσι μπορέσαμε να ορίσουμε την έννοια της γωνίας σύγκρισης. Όμως, όταν $\kappa > 0$, ο M_κ^n δεν είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, και έτσι ο ορισμός των τριγώνων σύγκρισης στους M_κ^n πρέπει να τροποποιηθεί.

Ορισμός 4.4.4 Έστω X μετρικός χώρος. Ένα γεωδαισιακό τρίγωνο στον X αποτελείται από τρία σημεία $p, x, y \in X$, τις κορυφές του και μία επιλογή τριών γεωδαισιακών, px, py και xy, που τα ενώνουν, τις πλευρές του. Ένα τέτοιο γεωδαισιακό τρίγωνο συμβολίζεται με $\Delta(px, py, xy)$ και η ένωση των πλευρών του συμβολίζεται με $\mathrm{Im}\Delta$.

Αν ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, θα γράφουμε $\Delta(p, x, y)$ για να συμβολίσουμε το μοναδικό τρίγωνο με κορυφές $p, x, y \in X$.

Ορισμός 4.4.5 Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω (p, x, y) μία τριάδα σημείων στον X. Κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(\bar{p}\bar{x}, \bar{p}\bar{y}, \bar{x}\bar{y})$ στον M_κ^n τ.ω.

$$d(\bar{p}, \bar{x}) = d(p, x), \quad d(\bar{p}, \bar{y}) = d(p, y), \quad d(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y), \tag{4.1}$$

λέγεται τρίγωνο σύγκρισης για την τριάδα (p, x, y) στον M_κ^n.

Παρατηρούμε ότι αφού για $\kappa > 0$, ο M_κ^n έχει διάμετρο $= D_\kappa < \infty$, έπεται από την τριγωνική ανισότητα ότι αν μία τριάδα p, x, y σημείων του μετρικού χώρου X έχει περίμετρο $d(p, x) + d(p, y) + d(x, y) > 2D_\kappa$, τότε δεν μπορεί να υπάρχει τρίγωνο σύγκρισης για την (p, x, y) στον M_κ^n.

Ορισμός 4.4.6 Έστω (p, x, y) μία τριάδα σημείων του μετρικού χώρου X. Ο αριθμός

$$|pxy| := d(p, x) + d(p, y) + d(x, y),$$

λέγεται η περίμετρος της τριάδας (p, x, y).

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου η περίμετρος της τριάδας (p, x, y) είναι $= 2D_\kappa$. Στην περίπτωση όπου $\kappa \leq 0$, αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει τρίγωνο σύγκρισης στον M_κ^n. Έτσι κι αλλιώς, στην περίπτωση που ο X είναι χώρος μήκους, αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον δύο από τα σημεία της τριάδας (p, x, y) ανήκουν σε διαφορετικές κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες του X, και δεν έχει νόημα να συγκρίνουμε τριάδες σημείων που δεν ανήκουν όλα στην ίδια κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του X. Στην περίπτωση όπου $\kappa > 0$ και $|pxy| = 2D_\kappa$, υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις:

(i) Δύο από τα σημεία της τριάδας, ας πούμε τα x, y, έχουν απόσταση D_κ, και συνεπώς $d(p, x) + d(p, y) = D_\kappa$. Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχουν άπειρα τρίγωνα σύγκρισης. Πράγματι, μπορούμε να θέσουμε δύο οποιαδήποτε αντιδιαμετρικά σημεία στον M_κ^n ως $\bar{x}, \bar{y}$, να τα συνδέσουμε με κάποιο γεωδαισιακό τμήμα $\bar{x}\bar{y}$, και να τοποθετήσουμε το $\bar{p}$ σε *οποιοδήποτε* γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα $\bar{x}, \bar{y}$, έτσι ώστε $d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x})$ και $d(p, y) = d(\bar{p}, \bar{y})$.

(ii) $d(p, x) \vee d(p, y) \vee d(x, y) < D_\kappa$. Σ' αυτή την περίπτωση, υπάρχει μοναδικό (modulo ισομετρία) τρίγωνο σύγκρισης για την τριάδα (p, x, y)· ένας μέγιστος κύκλος με τρία κατάλληλα επιλεγμένα σημεία του, ως κορυφές.

Λόγω των παραπάνω, θα θεωρούμε τρίγωνα σύγκρισης μόνο για τριάδες με περίμετρο $< 2D_\kappa$. Όπως θα δούμε, σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει πάντοτε μοναδικό τρίγωνο σύγκρισης (modulo ισομετρία πάντα), το οποίο μάλιστα καθορίζεται μονοσήμαντα από τις κορυφές του.

Πρόταση 4.4.4 *Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ και έστω X μετρικός χώρος. Για κάθε τριάδα (p, x, y) σημείων του X με περίμετρο $< 2D_\kappa$, υπάρχει μοναδικό (modulo ισομετρία) τρίγωνο σύγκρισης στον M^n_κ για την (p, x, y).*

Απόδειξη Θέτουμε $a = d(p, x)$, $b = d(p, y)$ και $c = d(x, y)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \leq b \leq c$. Καταρχάς παρατηρούμε ότι $c < D_\kappa$. Πράγματι, αν $k \leq 0$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $k > 0$ και $c \geq D_\kappa$, τότε από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$a + b + c \geq c + c \geq 2D_\kappa,$$

το οποίο αντιφάσκει με το ότι η τριάδα (p, x, y) έχει περίμετρο $< 2D_\kappa$. Έπεται ότι αν υπάρχει κάποια τριάδα $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ σημείων του M^n_κ η οποία ικανοποιεί την (4.1), τότε κάθε ζεύγος σημείων της τριάδας $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ συνδέεται από μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα. Μία τέτοια τριάδα κατασκευάζεται μέσω του νόμου των συνημιτόνων, όπως ακριβώς και στην περίπτωση τριγώνων σύγκρισης στο $\mathbb{E}^2$. Η μοναδικότητα (modulo ισομετρία) αυτής της τριάδας έπεται από την ακόλουθη πρόταση σχετικά με τη μεταβατικότητα της δράσης των ισομετριών του M^n_κ. □

Πρόταση 4.4.5 *Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω $2m$ σημεία $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ στον M^n_κ τ.ω.*

$$d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j),$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, m$. Υπάρχει τότε ισομετρία $f : M^n_\kappa \longrightarrow M^n_\kappa$ τ.ω. $f(x_i) = y_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Επιπλέον, η ισομετρία f προκύπτει ως σύνθεση το πολύ m ανακλάσεων ως προς υπερεπίπεδα.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με επαγωγή στο m. Για $m = 1$, η ανάκλαση ως προς το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των x_1, y_1 είναι η ζητούμενη ισομετρία. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τον $m - 1 \in \mathbb{N}$, και θα δείξουμε ότι ισχύει κια για τον m. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ισομετρία $f : M^n_\kappa \longrightarrow M^n_\kappa$, σύνθεση το πολύ $m - 1$ ανακλάσεων μέσω υπερεπιπέδων, τ.ω. $f(x_i) = y_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m - 1$. Αν $f(x_m) = y_m$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(x_m) \neq y_m$. Έστω H το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο των x_m και y_m. Παρατηρούμε ότι $y_i = f(x_i) \in H$ για κάθε $i = 1, \ldots, m - 1$, αφού

$$d(f(x_m), y_i) = d(f(x_m), f(x_i)) = d(x_m, x_i) = d(y_m, y_i).$$

Συνεπώς η $r_H \circ f$ είναι η ζητούμενη ισομετρία. □

Ειδικότερα, η δράση της ομάδας των ισομετριών του M^n_κ στον M^n_κ μέσω της απεικόνισης εκτίμησης είναι μεταβατική. Έχοντας τώρα στα χέρια μας την πρόταση 4.4.4, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.4.7 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $\kappa \in \mathbb{R}$. Έστω (p,x,y) μία τριάδα σημείων του X με περίμετρο $< 2D_\kappa$. Η γωνία κ-σύγκρισης των x και y στο p είναι η γωνία στο $\bar{p}$ σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\Delta(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ για την (p,x,y) στον M_κ^n, και συμβολίζεται με $\angle_p^{(\kappa)}(x,y)$. Ειδικότερα, $\angle_p^{(0)}(x,y) = \overline{\angle}_p(x,y)$.

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, ο ορισμός της γωνίας Alexandrov δεν αλλάζει αν χρησιμοποιήσουμε γωνίες κ-σύγκρισης $\kappa \neq 0$, αντί ευκλείδιων γωνιών σύγκρισης.

Πρόταση 4.4.6 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\gamma : [0,a] \longrightarrow X$, $\gamma' : [0,a'] \longrightarrow X$ δύο μοναδιαίες γεωδαισιακές με αρχή το $p \in X$. Τότε, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι*

$$\angle(\gamma,\gamma') = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0<t,t'<\varepsilon} \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t,\gamma'_{t'}). \tag{4.2}$$

Απόδειξη Καταρχάς παρατηρούμε ότι το $\limsup$ στη δεξιά πλευρά της (4.2) έχει νόημα, αφού υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $|p\gamma_t\gamma'_{t'}| < 2D_\kappa$, για κάθε $0 < t,t' < \varepsilon$. Φυσικά, αν $\kappa = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Θα δούμε την απόδειξη της υπερβολικής περίπτωσης $\kappa < 0$. Η περίπτωση $\kappa > 0$ είναι όμοια. Για να δείξουμε την (4.2), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\angle_p^{(0)}(\gamma_t,\gamma'_{t'}) - \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t,\gamma'_{t'}) \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ή ισοδύναμα, (αφού οι cos και arccos είναι ομοιόμορφα συνεχείς στα $[0,\pi]$ και $[-1,1]$ αντίστοιχα) ότι

$$\Delta(t,t') := \cos\angle_p^{(0)}(\gamma_t,\gamma'_{t'}) - \cos\angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t,\gamma'_{t'}) \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Έτσι, θέτοντας $c_{t,t'} := d(\gamma_t,\gamma'_{t'})$ για κάθε $(t,t') \in [0,a]\times[0,a']$ και $\beta := \sqrt{-\kappa}$, αυτό που έχουμε να δείξουμε είναι ότι

$$\frac{t^2+t'^2-c_{t,t'}^2}{2tt'} - \frac{\cosh(\beta t)\cosh(\beta t') - \cosh(\beta c_{t,t'})}{\sinh(\beta t)\sinh(\beta t')} \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το όριο θα χρησιμοποιήσουμε τις αναπαραστάσεις των cosh και sinh σε δυναμοσειρές. Ο παρανομαστής μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\sinh(\beta t)\sinh(\beta t') &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\beta t')^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\\ &= \beta^2 tt'\cdot F(t)\cdot F(t'),\end{aligned}$$

όπου $F(t) := 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\beta t)^{2i}}{(2i+1)!}$. Φυσικά, $F(t)F(t') \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 1$. Επίσης, αν θέσουμε $G(t) := \sum_{i=2}^{\infty}(\beta t)^{2i}/(2i)!$, $t \in \mathbb{R}$, τότε ο αριθμητής $A_{t,t'} := \cosh(\beta t)\cosh(\beta t') - \cosh(\beta c_{t,t'})$, μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}A_{t,t'} &= \left(1+\frac{\beta^2t^2}{2}+G(t)\right)\left(1+\frac{\beta^2t'^2}{2}+G(t')\right) - \left(1+\frac{\beta^2c_{t,t'}^2}{2}+G(c_{t,t'})\right)\\ &= \frac{\beta^2(t^2+t'^2-c_{t,t'}^2)}{2} + \frac{\beta^4(tt')^2}{4} + \frac{\beta^2(t^2G(t')+t'^2G(t))}{2} + G(t)G(t')\\ &\quad +G(t)+G(t')-G(c_{t,t'}).\end{aligned}$$

Έπειτα, θέτουμε

$$o(t,t') := \frac{\beta^4 (tt')^2}{4} + \frac{\beta^2 (t^2 G(t') + t'^2 G(t))}{2} + G(t)G(t').$$

Προφανώς $\frac{o(t,t')}{tt'} \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 0$. Τέλος, θέτουμε $u_{t,t'} := \frac{t^2+t'^2-c_{t,t'}^2}{2tt'}$. Αφού $F(t)F(t') \longrightarrow 1$, για να δείξουμε ότι $\Delta(t,t') \longrightarrow 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$H(t,t') := F(t)F(t')\Delta(t,t') \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Σύμφωνα με τους συμβολισμούς μας, έχουμε ότι

$$H(t,t') = \big(F(t)F(t') - 1\big)u_{t,t'} + \frac{o(t,t')}{\beta^2 tt'} + \frac{G(t) + G(t') - G(c_{t,t'})}{\beta^2 tt'}.$$

Η ποσότητα $u_{t,t'}$ είναι φραγμένη ως συνημίτονο γωνίας, και συνεπώς οι δύο πρώτοι όροι του παραπάνω αθροίσματος συγκλίνουν στο μηδέν καθώς $t, t' \longrightarrow 0$. Απομένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{tt'}\big(G(t) + G(t') - G(c_{t,t'})\big) \overset{t,t'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι $|t-t'| \leq c_{t,t'} \leq t + t'$ για κάθε $(t,t') \in [0,a] \times [0,a']$. Έτσι από τη μία,

$$\begin{aligned}
G(t) + G(t') - G(c_{t,t'}) &= G(t) + G(t') - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\beta c_{t,t'})^{2i}}{(2i)!} \\
&\leq G(t) + G(t') - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{2i}}{(2i)!}(t-t')^{2i} \\
&= G(t) + G(t') - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{2i}}{(2i)!} \sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} t^j (-t')^{2i-j} \\
&= -\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{2i}}{(2i)!} \sum_{j=1}^{2i-1} \binom{2i}{j} t^j (-t')^{2i-j} \\
&= -(tt') \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{2i}}{(2i)!} \sum_{j=1}^{2i-1} \binom{2i}{j} t^{j-1} (-t')^{2i-j-1},
\end{aligned}$$

και από την άλλη, ομοίως έχουμε ότι

$$G(c_{t,t'}) - G(t) - G(t') \leq tt' \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{2i}}{(2i)!} \sum_{j=1}^{2i-1} \binom{2i}{j} t^{j-1} (t')^{2i-j-1},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου, θα δούμε τρία λήμματα που θα μας φανούν χρήσιμα στη μελέτη της καμπυλότητας των μετρικών χώρων. Για την καλύτερη κατανόηση του πρώτου λήμματος, του λεγόμενου λήμματος του Alexandrov, καλό θα είναι να έχουμε στο μυαλό μας την ακόλουθη εικόνα. Έστω $\Delta(A,B,C)$, $\Delta(A,B',C)$ δύο (αρκετά μικρά) γεωδαισιακά τρίγωνα στον M^n_κ, με την πλευρά AC κοινή, τ.ω τα B, B' να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν τα A, B και τ.ω. το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών στην κορυφή C να είναι τουλάχιστον π. Σβήνουμε την κοινή πλευρά και φανταζόμαστε τις υπόλοιπες πλευρές ως στέρεες ράβδους που ενώνονται με μεντεσέδες στις κορυφές τους. Αυτό που μας λέει το λήμμα του Alexandrov είναι ότι αν ισιώσουμε την κατασκευή αυτή έτσι ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών στην κορυφή C να μειωθεί σε π, τότε οι εσωτερικές γωνίες σε όλες τις κορυφές, εκτός από τη C, αυξάνουν.

Για την ακριβή διατύπωση του λήμματος του Alexandrov, χρειαζόμαστε την ακόλουθη ορολογία. Όπως ξέρουμε, για κάθε $x, y \in M^2_\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδική (modulo αναπαραμέτρηση) τοπική γεωδαισιακή ευθεία που διέρχεται από τα x, y. Η εικόνα αυτής της ευθείας χωρίζει τον M^2_κ σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Θα λέμε ότι δύο σημεία $z, w \in M^2_\kappa$ ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές αυτής της ευθείας αν ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος της. Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε το λήμμα του Alexandrov.

Λήμμα 4.4.1 (Το λήμμα του Alexandrov) *Έστω $A, B, B', C \in M^2_\kappa$ τέσσερα διακεκριμένα σημεία τ.ω. $d(A,B)+d(B,C)+d(C,B')+d(B',A) < 2D_\kappa$ και τ.ω. τα B, B' να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν τα A και C.*

Θεωρούμε τα γεωδαισιακά τρίγωνα $\Delta := \Delta(A,B,C)$, $\Delta' := \Delta(A,B',C)$ και θέτουμε α, β, γ (α', β', γ' αντιστ.) τις γωνίες στις κορυφές A, B, C (A, B', C αντιστ.). Υποθέτουμε ότι $\gamma + \gamma' \geq \pi$. Τότε

$$(a) \quad d(B,C) + d(B',C) \leq d(B,A) + d(B',A).$$

Ειδικότερα $d(B,C) + d(B',C) < D_\kappa$.

Έστω $\bar{\Delta}$ το γεωδαισιακό τρίγωνο στον M^2_κ με κορυφές $\bar{A}, \bar{B}, \bar{B}'$ τ.ω. $d(\bar{A},\bar{B}) = d(A,B)$, $d(\bar{A},\bar{B}') = d(A,B')$ και $d(\bar{B},\bar{B}') = d(B,C) + d(C,B') < D_\kappa$. Έστω $\bar{C}$ το μοναδικό σημείο του $[\bar{B},\bar{B}']$ για το οποίο $d(\bar{B},\bar{C}) = d(B,C)$. Έστω, τέλος, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}'$ οι γωνίες του $\bar{\Delta}$ στις κορυφές $\bar{A}, \bar{B}, \bar{B}'$ αντίστοιχα. Τότε,

$$(b) \qquad \bar{\alpha} \geq \alpha + \alpha', \quad \bar{\beta} \geq \beta, \quad \bar{\beta}' \geq \beta' \quad \text{και} \quad d(A,C) \leq d(\bar{A},\bar{C}).$$

Επιπλέον, αν κάποια από τις παραπάνω ανισότητες είναι ισότητα, τότε όλες οι ανισότητες είναι ισότητες, και αυτό ισχύει ανν $\gamma + \gamma' = \pi$

Απόδειξη (α) Έστω $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow M^2_\kappa$ η μοναδική (τοπική, αν $\kappa > 0$) γεωδαισιακή με $\sigma(0) = B$ και $\sigma(d(B,C)) = C$. Θέτουμε $\widetilde{B'} := \sigma\big(d(B,C) + d(C,B')\big)$. Αφού

$$\big[d(B,C) + d(C,B')\big] - d(B,C) = d(C,B') < D_\kappa,$$

έπεται ότι $d(\widetilde{B'},C) = d(B',C)$. Παρατηρούμε ότι αν $\theta := \angle([C,A],[C,\widetilde{B'}])$ τότε $\gamma + \theta = \pi \leq \gamma + \gamma'$, και άρα $\theta \leq \gamma'$. Έτσι από το νόμο των συνημιτόνων, $d(A,\widetilde{B'}) \leq d(A,B')$. Αν τώρα $\kappa \leq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(B,A) + d(B',A) &\geq d(B,A) + d(A,\widetilde{B'}) \geq d(B,\widetilde{B'}) \\ &\overset{(*)}{=} d(B,C) + d(\widetilde{B'},C) = d(B,C) + d(B',C). \end{aligned}$$

Το πρόβλημα στην περίπτωση όπου $\kappa > 0$ είναι ότι για να γράψουμε την ισότητα $(*)$, πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $d(B,C) + d(\widetilde{B'},C) \leq D_\kappa$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει για να καταλήξουμε σε αντίφαση. Πράγματι, αν $d(B,C) + d(\widetilde{B'},C) > D_\kappa$, τότε

$$\begin{aligned} 2D_\kappa &> d(A,B) + d(B,C) + d(C,B') + d(B',A) \\ &\geq d(B,C) + d(C,\widetilde{B'}) + d(\widetilde{B'},B) = 2D_\kappa, \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Αυτό αποδεικνύει το (α).
(β) Από την απόδειξη του (α), γνωρίζουμε ότι $d(A,B') \geq d(A,\widetilde{B'})$ και άρα $d(\bar{A},\bar{B}') \geq d(A,\widetilde{B'})$. Επίσης από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $d(\bar{B},\bar{B}') \geq d(B,B')$. Προφανώς, η τελευταία αυτή ανισότητα ισχύει ως ισότητα ανν $C \in [B,B']$, το οποίο με τη σειρά του ισχύει ανν $\gamma + \gamma' = \pi$. Πράγματι, αν $C \in [B,B']$ και $u_{C,A}, u_{C,B}, u_{C,B'} \in C^\perp$ είναι τα μοναδιαία αρχικά διανύσματα των τμημάτων $[C,A]$, $[C,B]$ και $[C,B']$ αντίστοιχα, τότε $u_{C,B} = -u_{C,B'}$ και άρα

$$\cos\gamma = \langle u_{C,A}, u_{C,B}\rangle = -\langle u_{C,A}, u_{C,B}\rangle = -\cos\gamma' = \cos(\pi - \gamma'),$$

από όπου έπεται ότι $\gamma + \gamma' = \pi$. Αντίστροφα, αν $\gamma + \gamma' = \pi$, τότε αφού τα B, B' ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν τα A, C, έπεται ότι

$$\angle([C,B],[C,B']) = \pi,$$

και άρα $C \in [B,B']$. Κοιτώντας ξανά την απόδειξη της ανισότητας $d(A,B') \geq d(A,\widetilde{B'})$ βλέπουμε ότι και η ανισότητα $d(\bar{A},\bar{B}') \geq d(A,\widetilde{B'})$ ισχύει ως ισότητα ανν $\gamma + \gamma' = \pi$.

Εφαρμόζοντας τώρα το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\Delta(\bar{A},\bar{B},\bar{B}')$ και $\Delta(A,B,\widetilde{B'})$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $d(\bar{A},\bar{B}') \geq d(A,\widetilde{B'})$, βλέπουμε ότι $\beta \leq \bar{\beta}$. Εναλλάσοντας τους ρόλους των B και B' έπεται ότι $\beta' \leq \bar{\beta}'$. Προφανώς και οι δύο αυτές ανισότητες ισχύουν ως ισότητες ανν $\gamma + \gamma' = \pi$. Εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\Delta(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ και $\Delta(A,B,C)$, η ανισότητα $\beta \leq \bar{\beta}$ μας δίνει ότι $d(\bar{A},\bar{C}) \geq d(A,C)$. Πάλι αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα ανν $\gamma + \gamma' = \pi$. Έπειτα, εφαρμόζοντας μία ακόμη φορά το νόμο των συνημιτόνων, στα τρίγωνα $\Delta(\bar{A},\bar{B},\bar{B}')$ και $\Delta(A,B,B')$ αυτή τη φορά, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $d(\bar{B},\bar{B}') \geq d(B,B')$, έπεται ότι $\bar{\alpha} \geq \angle\big([C,B],[C,B']\big) = \alpha + \alpha'$. Τέλος, για μια ακόμη φορά, η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα ανν $\gamma + \gamma' = \pi$ και άρα το λήμμα του Alexandrov έχει αποδειχθεί. □

Λήμμα 4.4.2 *Έστω (X,d) γνήσιος μετρικός χώρος και $x, y \in X$. Αν υπάρχει μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα $[x,y]$ που συνδέει τα x, y, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε $z \in X$,*

$$d(x,z) + d(z,y) < d(x,y) + \delta \quad \Longrightarrow \quad d(z,[x,y]) < \varepsilon.$$

Απόδειξη Θέτουμε $S_\varepsilon := \{p \in X \mid d(p,[x,y]) = \varepsilon\}$. Αφού ο X είναι γεωδαισιακός χώρος, το S_ε είναι κενό ανν κάθε $z \in X$ απέχει λιγότερο από ε από το $[x,y]$. Έτσι αν το S_ε είναι κενό, το ζητούμενο προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι είναι μη κενό. Το S_ε είναι προφανώς κλειστό και φραγμένο και έτσι αφού ο X είναι γνήσιος, είναι συμπαγές. Η συνάρτηση $f : S_\varepsilon \longrightarrow [0,\infty)$ με τύπο

$$f(z) = d(x,z) + d(z,y) - d(x,y),$$

είναι αυστηρά θετική από τη μοναδικότητα του $[x,y]$, και από τη συμπάγεια του S_ε έπεται ότι παίρνει ελάχιστη τιμή $\delta > 0$.

Αν $d(z,[x,y]) \geq \varepsilon$ για κάποιο $z \in X$, υπάρχει $w \in S_\varepsilon$ τ.ω. $d(x,z) = d(x,w) + d(w,z)$, και άρα

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= d(x,w) + d(w,z) + d(z,y) \\ &\geq d(x,w) + d(w,y) \\ &= d(x,y) + f(w) \geq d(x,y) + \delta. \end{aligned}$$

Συνεπώς ο ζητούμενος δ είναι ο $\delta := \min_{x \in S_\varepsilon} f(x) > 0$. □

Λήμμα 4.4.3 *Για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, $\ell < D_\kappa$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\kappa, \ell, \varepsilon) > 0$ τ.ω. για κάθε $x, y \in M_\kappa^n$ με $d(x,y) \leq \ell$, κάθε δ-μέσο των x, y είναι ε-κοντά στο μέσο των x, y.*

Απόδειξη Από την πρόταση 4.4.5, ξέρουμε ότι η ομάδα των ισομετριών του M_κ^n δρα μεταβατικά σε ζεύγη σημείων του X σταθερής απόστασης. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $[x,y]$ είναι αρχικό τμήμα κάποιου γεωδαισιακού τμήματος $[x,y_0]$ μήκους ℓ. Από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει $\delta_0 > 0$ τ.ω.

$$d(x,z) + d(z,y_0) < d(x,y_0) + \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad d(z,[x,y_0]) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Θα δείξουμε ότι αν $\delta < \frac{\varepsilon}{3} \wedge \frac{\delta_o}{2}$, τότε κάθε δ-μέσο των x, y απέχει λιγότερο από ε από το μέσο m των x, y. Έστω, λοιπόν, $z \in M_\kappa^n$ ένα δ-μέσο των x, y. Τότε,

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y_0) &\leq d(x,z) + d(z,y) + d(y,y_0) \\ &\leq d(x,y) + 2\delta + d(y,y_0) < d(x,y_0) + \delta_0, \end{aligned}$$

και άρα $d(z,[x,y_0]) < \frac{\varepsilon}{3}$. Από τη συμπάγεια του $[x,y_0]$, υπάρχει $z_0 \in [x,y_0]$ τ.ω. $d(z,z_0) = d(z,[x,y_0])$. Τότε,

$$d(x,z_0) \leq d(x,z) + d(z,z_0) < \frac{\varepsilon}{3} + \delta + \frac{1}{2} d(x,y),$$

και, ομοίως, $d(z_0,y) < \varepsilon/3 + \delta + (1/2)d(x,y)$. Όμως το z_0 ανήκει στο $[x,y]$ και έτσι $m \in [x,z_0] \cup [z_0,y]$. Συνεπώς είτε $d(x,z_0) = d(x,m) + d(m,z_0)$ είτε $d(z_0,y) = d(z_0,m) + d(m,y)$. Σε κάθε περίπτωση, $d(z_0,m) < \varepsilon/3 + \delta < 2\varepsilon/3$, και άρα

$$d(z,m) \leq d(z,z_0) + d(z_0,m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$ □

4.5 Οι M_κ^n ως Πολλαπλότητες Riemann

Ως τώρα έχουμε μελετήσει τους χώρους-μοντέλα M_κ^n ως μετρικούς χώρους. Σ' αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη ρημάννεια δομή τους και θα αποδείξουμε ότι οι επαγόμενοι μετρικοί χώροι είναι αυτοί που ορίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Έπειτα θα δούμε πως εκφράζεται η μετρική Riemann των χώρων-μοντέλα σε πολικές συντεταγμένες. Θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση αυτή στο κεφάλαιο 5 για να αποδείξουμε ότι η μετρική τού M_κ^n είναι κυρτή αν $\kappa < 0$, και κοίλη αν $\kappa > 0$.

Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$. Αν $\kappa = 0$ θέτουμε $M^n_\kappa := \mathbb{E}^n$. Για κάθε $\kappa > 0$, θέτουμε M^n_κ την n-διάστατη σφαίρα ακτίνας $1/\sqrt{\kappa}$ στον $\mathbb{E}^{n+1}$, δηλαδή

$$M^n_\kappa = \Big\{x \in \mathbb{E}^{n+1} \,|\, \langle x, x\rangle = \frac{1}{\kappa}\Big\}.$$

Για κάθε $\kappa < 0$ θέτουμε M^n_κ τη n-διάστατη σφαίρα φανταστικής ακτίνας $i \cdot 1/\sqrt{-\kappa}$ στο χώρο $\mathbb{M}^{n+1}$ του Minkowski. Δηλαδή

$$M^n_\kappa := \Big\{x \in \mathbb{M}^{n+1} \,|\, (x\,|\,x) = \frac{1}{\kappa},\ x_{n+1} > 0\Big\}.$$

Επιπλέον, για κάθε $\kappa \geq 0$ θέτουμε i_κ την ένθεση $M^n_\kappa \hookrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, και για $\kappa < 0$ θέτουμε i_κ την ένθεση $M^n_\kappa \hookrightarrow \mathbb{M}^{n+1}$.

Θα συμβολίζουμε με g τη ρημάννεια μετρική του $\mathbb{E}^{n+1}$, δηλαδή $g = \sum_{i=1}^{n+1}(dx^i)^2$ και την ψεύδο-ρημάννεια μετρική του $\mathbb{M}^{n+1}$ με $h := -(dx^{n+1})^2 + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$. Οι χώροι-μοντέλα ορίζονται ως πολλαπλότητες Riemann ως εξής: Για $\kappa > 0$, θέτουμε $(M^n_\kappa, g_\kappa) := (M^n_\kappa, i^*_\kappa(g))$, για $\kappa = 0$ θέτουμε $(M^n_\kappa, g_\kappa) = (\mathbb{E}^n, g)$ και για $\kappa < 0$ θέτουμε $(M^n_\kappa, g_\kappa) := (M^n_\kappa, i^*_\kappa(h))$. Αφού για $\kappa < 0$ το σύνολο M^n_κ περιέχεται στο σύνολο όλων των χωρικών σημείων τού $\mathbb{M}^{n+1}$, ο περιορισμός $g_\kappa = i^*_\kappa(h)$ της ψεύδο-ρημάννειας μετρικής του Minkowski στον M^n_κ είναι μετρική Riemann.

Οι M^n_κ έχουν όπως ξέρουμε σταθερή καμπυλότητα τομής κ. Επειδή οι M^n_κ είναι απλά συνεκτικοί χώροι, έπεται από το θεώρημα Cartan-Hadamard της γεωμετρίας Riemann, ότι η (M^n_κ, g_κ) είναι η μοναδική πλήρης και απλά συνεκτική n-πολλαπλότητα Riemann σταθερής καμπυλότητας τομής $\kappa \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι οι μετρικοί χώροι που επάγονται από τις πολλαπλότητες Riemann M^n_κ είναι οι μετρικοί χώροι που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για την απόδειξη αυτή θα συμβολίζουμε τους μετρικούς χώρους M^n_κ ως (M^n_κ, d_κ).

Πρόταση 4.5.1 *Οι μετρικοί χώροι (M^n_κ, d_κ) είναι οι μετρικοί χώροι που επάγονται από τις πολλαπλότητες Riemann (M^n_κ, g_κ), $\kappa \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Παρατηρούμε καταρχάς ότι για κάθε $\kappa > 0$, η απεικόνιση $S^n \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot x \in M^n_\kappa$ είναι ισομετρία μεταξύ των πολλαπλοτήτων Riemann $(S^n, \frac{1}{\kappa} \cdot g_1)$ και (M^n_κ, g_κ), και ότι για κάθε $\kappa < 0$, η απεικόνιση $\mathbb{H}^n \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \cdot x \in M^n_\kappa$ είναι ισομετρία μεταξύ των πολλαπλοτήτων Riemann $(\mathbb{H}^n, \frac{1}{-\kappa} \cdot g_1)$ και (M^n_κ, g_κ). Αφού όταν πολλαπλασιάζουμε μία μετρική Riemann g με $\alpha > 0$, η επαγόμενη συνάρτηση απόστασης πολλαπλασιάζεται με $\sqrt{\alpha}$, δηλαδή $d_{\alpha g} = \sqrt{\alpha} d_g$, αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις $\kappa = 1$ και $\kappa = -1$. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση $\kappa = 1$. Η άλλη είναι απλούστερη.

Έστω $p, q \in S^n \subseteq \mathbb{E}^{n+1}$. Καταρχάς, $d_1(p,q) = \pi$ ανν $q = -p$, το οποίο όπως είναι γνωστό από τη γεωμετρία Riemann, ισχύει ανν $d_{g_1}(p,q) = \pi$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $r := d_1(p,q) < \pi$. Τότε, επίσης $r' := d_{g_1}(p,q) < \pi$. Έστω $\gamma : [0,r] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ η μοναδική μοναδιαία d_1-γεωδαισιακή από το p στο q. Δίνεται, όπως ξέρουμε, από τον τύπο $\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)u$, όπου u είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $q - \langle q,p\rangle \cdot p$. Η γ είναι προφανώς και g_1-γεωδαισιακή (ως πρός τη συνοχή Levi-Civita) με αρχικές συνθήκες $(\gamma(0), \dot\gamma(0)) = (p, u_p)$, όπου $u_p = (p,u) \in \{p\} \times p^\perp \cong T_pS^n$. Από τη γεωμετρία Riemann είναι γνωστό ότι η εκθετική απεικόνιση $\exp_p : D(0_p, \pi) \longrightarrow S^n \setminus \{-p\}$ είναι αμφιδιαφόριση.

Η γ ξεκινά από το p και περιέχεται στη γεωδαισιακή μπάλα $\exp_p D(0_p,\pi) = S^n \setminus \{p\}$, η οποία είναι η μέγιστη κανονική περιοχή του p. Συνεπώς η γ είναι ελάχιστη γεωδαισιακή της g_1, και άρα

$$r' = L_R(\gamma) = r\|\dot\gamma(0)\| = r. \qquad \square$$

Θα δούμε τώρα την περιγραφή της ρημάννειας μετρικής του M^n_κ σε πολικές συντεταγμένες που προκύπτει τραβώντας την στον $T_pM^n_\kappa$ μέσω της εκθετικής επικόνισης exp. Όπως είναι γνωστό από τη γεωμετρία Riemann, για κάθε $p \in M^n_\kappa$, η απεικόνιση

$$\exp_p : D(0_p, D_\kappa) \longrightarrow D(p, D_\kappa) \subseteq M^n_\kappa$$

είναι αμφιδιαφόριση. Αν $\kappa \leq 0$, τότε $D(p,D_\kappa) = M^n_\kappa$, ενώ αν $\kappa > 0$ τότε $D(p, D_\kappa) = M^n_\kappa \setminus \{p\}$. Αν τραβήξουμε την $g_\kappa|_{D(p,D_\kappa)}$ στο $D(0_p, D_\kappa)$ μέσω της exp, παίρνουμε στην $D(0_p, D_\kappa)$ τη μετρική Riemann $h_\kappa := \exp_p^* g_\kappa$ για την οποία έχουμε ότι $(D(0_p,D_\kappa), h_\kappa) \cong (D(p, D_\kappa), g_\kappa)$. Κάθε $x \in D'(0_p, D_\kappa) := D(0_p, D_\kappa) \setminus \{0_p\}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $r_x u_x$ για κάποιο $0 < r_x < D_\kappa$ και κάποιο $u_x \in S_pM^n_\kappa := \{u \in T_pM^n_\kappa \mid \|u\|_p = 1\}$, $r_x = \|x\|_p$ και $u_x = (1/\|x\|_p)x$. Ορίζεται έτσι η απεικόνιση $\phi_p = (r,u) : D'(0_p, D_\kappa) \longrightarrow (0, D_\kappa) \times S_pM^n_\kappa$ με τύπο $\phi_p(x) = (r_x, u_x) = (\|x\|_p, 1/\|x\|_p x)$. Θέτουμε $\widetilde{g_\kappa}^p := (\phi_p^{-1})^*(h_\kappa)$. Τότε,

$$\big((0,D_\kappa) \times S_pM^n_\kappa, \widetilde{g_\kappa}^p\big) \overset{\phi_p}{\cong} \big(D'(0_p, D_\kappa), h_\kappa\big) \overset{\exp_p}{\cong} \big(D'(p, D_\kappa), g_\kappa\big),$$

όπου φυσικά $D'(p, D_\kappa) = D(p, D_\kappa)\setminus\{p\}$. Εξ' ορισμού, οι πολικές συντεταγμένες με κέντρο το p, ενός σημείου $x \in D'(0_p, D_\kappa)$, είναι το ζευγάρι $\phi_p(x)$. Οι πολικές συντεταγμένες με κέντρο το p, ενός σημείου $q \in D'(p, D_\kappa)$ είναι το ζεύγος $(\phi_p \circ \exp_p^{-1})(q)$. Η αντίστροφη της ϕ_p έχει τύπο $\phi_p(r, u) = ru$. Έτσι, μία καμύλη γ στην $D'(p, D_\kappa)$ έχει πολικές συντεταγμένες (r, u) με κέντρο το p ανν $\gamma = \exp_p(r\cdot u)$. Θα χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ορολογία.

Ορισμός 4.5.1 Έστω $p \in M^n_\kappa$. Ο χάρτης πολικών συντεταγμένων γύρω από το p στον M^n_κ, είναι η αμφιδιαφόριση

$$\Phi_p := \phi_p \circ \exp_p^{-1} : D'(p, D_\kappa) \longrightarrow (0, D_\kappa) \times S_pM^n_\kappa.$$

Η έκφραση της μετρικής Riemann του M^n_κ γύρω από το p σε πολικές συντεταγμένες, είναι η μετρική $\widetilde{g_\kappa}^p := (\Phi_p^{-1})^* g_\kappa$.

Για κάθε $p \in M^n_\kappa$, θα θεωρούμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_pM^n_\kappa$ του M^n_κ στο p ως πολλαπλότητα Riemann εφοδιάζοντας τον με τη μετρική που ορίζεται από την $\langle (x,v),(x,w)\rangle_x = \langle v, w\rangle_p$ για κάθε $x \in T_pM^n_\kappa$ και κάθε $(x,v),(x,w) \in T_xT_pM^n_\kappa$. Ο $T_pM^n_\kappa$ με αυτή τη μετρική Riemann είναι ισομετρικός με τον $\mathbb{E}^n$. Έστω s^p ο περιορισμός αυτής της μετρικής Riemann στη μοναδιαία σφαίρα $S_pM^n_\kappa$ του $T_pM^n_\kappa$. Όπως θα δούμε, η μετρική $\widetilde{g_\kappa}^p$ γράφεται ως $C^\infty(M)$-γραμμικός συνδυασμός της s^p και της ευκλείδιας μετρικής του $(0, D_\kappa) \subseteq \mathbb{R}$.

Πρόταση 4.5.2 *Έστω $p \in M^n_\kappa$ και έστω $j : (0, D_\kappa) \times S_pM^n_\kappa \longrightarrow S_pM^n_\kappa$ και $t : (0, D_\kappa) \times S_pM^n_\kappa \longrightarrow (0, D_\kappa)$ οι φυσικές προβολές. Τότε η έκφραση $\widetilde{g_\kappa}^p$ της ρημάννειας μετρικής του M^n_κ σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τον τύπο*

$$\widetilde{g_\kappa}^p = (dt)^2 + (G_\kappa \circ t)\cdot j^*(s^p),$$

όπου η $G_\kappa : (0, D_\kappa) \longrightarrow \mathbb{R}$ *δίνεται από το τύπο*

$$G_\kappa(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa}\sinh^2(r\sqrt{-\kappa}), & \kappa < 0, \\ r^2, & \kappa = 0, \\ \frac{1}{\kappa}\sin^2(r\sqrt{\kappa}), & \kappa > 0. \end{cases}$$

Απόδειξη Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $(r, u) \in (0, D_\kappa) \times S_pM_\kappa^n$ και κάθε $A \in T_{(r,u)}\big((0, D_\kappa) \times S_pM_\kappa^n\big)$ έχουμε

$$\widetilde{g_\kappa}^p(A, A) = \big(dt|_{(r,u)}(A)\big)^2 + G_\kappa(r) \cdot (j^*(s^p))_{(r,u)}(A, A).$$

Μέσω της ταύτισης $T_{(r,u)}\big((0, D_\kappa) \times S_pM_\kappa^n\big) \cong T_r(0, D_\kappa) \times T_uS_pM_\kappa^n$, οι παράγωγοι $t_{*(r,u)} : T_r(0, D_\kappa) \times T_uS_pM_\kappa^n \longrightarrow T_r(0, D_\kappa)$ και $j_{*(r,u)} : T_r(0, D_\kappa) \times T_uS_pM_\kappa^n \longrightarrow T_uS_pM_\kappa^n$ είναι οι φυσικές προβολές. Συνεπώς αυτό που πρέπει να αποδείξουμε, είναι ότι για κάθε $A = ([\lambda]_r, [\gamma]_u) \in T_r(0, D_\kappa) \times T_uS_pM_\kappa^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \widetilde{g_\kappa}^p(A, A) &= (\lambda'(0))^2 + G_\kappa(r)s^p([\gamma]_u, [\gamma]_u) \\ &= (\lambda'(0))^2 + G_\kappa(r)g_\kappa(\gamma'(0), \gamma'(0)), \end{aligned}$$

όπου $\gamma'(0)$ είναι η παράγωγος κάποιου αντιπροσώπου $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_pM_\kappa^n \subseteq T_pM_\kappa^n$ του $[\gamma]_u$, αφού μέσω της φυσικής ταύτισης $T_uT_pM_\kappa^n \cong T_pM_\kappa^n$, έχουμε $\gamma'(0) = [\gamma]_u$.

Έστω λοιπόν $A = [(\lambda, \gamma)]_{(r,u)} \in T_{(r,u)}\big((0, D_\kappa) \times S_pM_\kappa^n\big)$. Η αντίστροφη του χάρτη πολικών συντεταγμένων Φ_p δίνεται από τον τύπο $\Phi_p^{-1}(\lambda, v) = \exp_p(\lambda v)$ και, έτσι, αν θέσουμε $q := \exp_p(ru)$, έχουμε ότι

$$\widetilde{g_\kappa}^p(A, A) = (\Phi_p^{-1})^*(g_\kappa)_{(r,u)}(A, A) = g_\kappa\big([\exp_p(\lambda\gamma)]_q, [\exp_p(\lambda\gamma)]_q\big).$$

Διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του κ.
(i) $\kappa = 0$: Σ' αυτή την περίπτωση, η Φ_p^{-1} έχει τύπο $\Phi_p^{-1}(\lambda, v) = \exp_p(\lambda v) = p + \lambda v$, και συνεπώς μέσω της ταύτισης $S_p\mathbb{E}^n \cong \{p\} \times S^{n-1}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \widetilde{g_\kappa}^p_{(r,u)}(A, A) &= g_\kappa\big([p + \lambda\gamma]_q, [p + \lambda\gamma]_q\big) = \big\langle(\lambda\gamma)'(0), (\lambda\gamma)'(0)\big\rangle \\ &= \big\langle\lambda'(0)\gamma(0) + \lambda(0)\gamma'(0), \lambda'(0)\gamma(0) + \lambda(0)\gamma'(0)\big\rangle \\ &= \big(\lambda'(0)\big)^2\|\gamma(0)\|^2 + \big(\lambda(0)\big)^2\|\gamma'(0)\|^2 \\ &= \big(\lambda'(0)\big)^2 + r^2 g_\kappa\big(\gamma'(0), \gamma'(0)\big), \end{aligned}$$

όπως ζητούσαμε, αφού $\gamma'(0) \perp \gamma(0)$ και $\gamma(0) = u \in S_p\mathbb{E}^n$.
(ii) $\kappa > 0$: Σ' αυτή την περίπτωση, η Φ_p^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$\Phi_p^{-1}(t, v) = \exp_p(tv) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\left(\frac{\cos(t\sqrt{\kappa})}{\|p\|} \cdot p + \sin(t\sqrt{\kappa})v\right).$$

Θα θεωρούμε τον $T_pM_\kappa^n$ ως τον $\{p\} \times p^\perp \subseteq \{p\} \times \mathbb{E}^{n+1}$ και θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_\kappa$ την οικογένεια των νορμών που ορίζεται από τη μετρική Riemann του M_κ^n. Έτσι, αν όπως προηγουμένως $A=[(\lambda,\gamma)]_{(r,u)}\in T_{(r,u)}\big((0,D_\kappa)\times S_pM^n_\kappa\big)$ και $q=\exp_p(ru)$, τότε

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g_\kappa}^p(A,A) &= \frac{1}{\kappa}\left\|\Big[\frac{\cos(\lambda\sqrt{\kappa})}{\|p\|}\cdot p+\sin(\lambda\sqrt{\kappa})\cdot\gamma\Big]_q\right\|_\kappa^2\\
&= \frac{1}{\kappa}\left\|-\lambda'(0)\sqrt{\kappa}\sin(r\sqrt{\kappa})\frac{p}{\|p\|}+\lambda'(0)\sqrt{\kappa}\cos(r\sqrt{\kappa})u+\sin(r\sqrt{\kappa})\gamma'(0)\right\|^2\\
&= \lambda'(0)^2\sin^2(r\sqrt{\kappa})+\lambda'(0)^2\cos^2(r\sqrt{\kappa})+\frac{1}{\kappa}\sin^2(r\sqrt{\kappa})\|\gamma'(0)\|^2\\
&= \lambda'(0)^2+G_\kappa(r)\cdot g_\kappa\big(\gamma'(0),\gamma'(0)\big),
\end{aligned}
$$

όπως ζητάμε, αφού $p\perp u$, $p\perp\gamma'(0)$ και $u\perp\gamma'(0)$.
(iii) $\kappa<0$: Και σε αυτή την περίπτωση θα θεωρούμε τον $T_pM^n_\kappa$ ως τον $\{p\}\times p^\perp$ όπου φυσικά η έννοια της καθετότητας αναφέρεται στη μορφή του Minkowski. Έστω $|\cdot|$ η νόρμα που επάγεται από τη μορφή του Minkowski στον $p^\perp$. Μέσω αυτής της ταύτισης,

$$
\Phi_p^{-1}(t,v)=\exp_p(tv)=\frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}\left(\frac{\cosh(t\sqrt{|\kappa|})}{\sqrt{|(p\,|\,p)|}}\cdot p+\sinh(t\sqrt{|\kappa|})v\right).
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g_\kappa}^p(A,A) &= -\frac{1}{\kappa}\left\|\Big[\frac{\cosh(\lambda\sqrt{|\kappa|})}{\sqrt{|(p\,|\,p)|}}\cdot p+\sinh(\lambda\sqrt{|\kappa|})\cdot\gamma\Big]_q\right\|_\kappa^2\\
&= -\frac{1}{\kappa}\left|\sqrt{|\kappa|}\lambda'(0)\left(\frac{\sinh(r\sqrt{|\kappa|})}{\sqrt{(p|p)}}p+\cosh(r\sqrt{|\kappa|})u\right)+\sinh(r\sqrt{|\kappa|})\gamma'(0)\right|^2\\
&= -\lambda'(0)^2\sinh^2(r\sqrt{-\kappa})+\lambda'(0)^2\cosh^2(r\sqrt{-\kappa})-\frac{1}{\kappa}\sinh^2(r\sqrt{-\kappa})|\gamma'(0)|^2\\
&= \lambda'(0)^2+G_\kappa(r)\cdot g_\kappa\big(\gamma'(0),\gamma'(0)\big).
\end{aligned}
$$

□

Πόρισμα 4.5.1 *Για κάθε $p\in M^n_\kappa$ και κάθε $r\in(0,D_\kappa)$, η σφαίρα $\partial D(p,r)=\{q\in M^n_\kappa\,|\,d(q,p)=r\}$, με τον περιορισμό της ρημάννειας μετρικής του M^n_κ, είναι ισομετρική με μία σφαίρα ακτίνας $\sqrt{G_\kappa(r)}$ στον $\mathbb{E}^n$.*

Παρατηρήσεις

1. Για κάθε $r>0$, η συνάρτηση $(-\infty,\left(\frac{\pi}{r}\right)^2)\ni\kappa\mapsto G_\kappa(r)\in(0,\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

2. Σύμφωνα με την έκφραση της ρημάννειας μετρικής του M^n_κ σε πολικές συντεταγμένες γύρω από το $p\in M^n_\kappa$, για κάθε καμπύλη $\gamma:(a,b)\longrightarrow D'(p,D_\kappa)$ της μορφής $\gamma=\exp_p(ru)$, όπου οι $r:(a,b)\longrightarrow(0,D_\kappa)$ και $u:(a,b)\longrightarrow S_pM^n_\kappa$ είναι λείες καμπύλες, έχουμε ότι $\|\dot\gamma(t)\|^2_{\gamma(t)}=r'(t)^2+G_\kappa(r(t))\|u'(t)\|_p$.

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της μετρικής των M^n_κ σε πολικές συντεταγμένες, θα εξετάσουμε το πώς εξαρτάται η "γεωμετρία" των τριγώνων στους M^n_κ από το κ.

Πρόταση 4.5.3 *Έστω $\lambda < \kappa$ πραγματικοί αριθμοί και έστω $\Delta(p,x,y)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον M^n_κ. Αν η $(\hat{p},\hat{x},\hat{y})$ είναι μια τριάδα στον M^n_λ τ.ω. $d(\hat{p},\hat{x}) = d(p,x)$, $d(\hat{p},\hat{y}) = d(p,y)$ και $\angle_{\hat{p}}(\hat{x},\hat{y}) = \angle_p(x,y)$, τότε $d(x,y) < d(\hat{x},\hat{y})$.*

Απόδειξη Αφού οι χώροι-μοντέλα είναι ομογενείς χώροι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p = (1/\sqrt{|\kappa|})e_{n+1}$ και $\hat{p} = (1/\sqrt{|\lambda|})e_{n+1}$. Τότε, μέσω της ταύτισης $T_pM^n_\kappa \cong \{p\} \times p^\perp$, έχουμε ότι $S_pM^n_\kappa = \{p\} \times \big(S^{n-1} \times \{0\}\big) \cong S^{n-1}$, και ομοίως $S_{\hat{p}}M^n_\lambda = S^{n-1}$. Έστω $\Phi : D'(p, D_\kappa) \longrightarrow (0, D_\kappa) \times S^{n-1}$ και $\Psi : D'(\hat{p}, D_\lambda) \longrightarrow (0, D_\lambda) \times S^{n-1}$ οι χάρτες πολικών συντεταγμένων μέσω των παραπάνω ταυτίσεων. Για κάθε στροφή $\Theta : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, έστω $h_\Theta : D(p, D_\kappa) \longrightarrow D(\hat{p}, D_\lambda)$ η απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $h_\Theta(p) = \hat{p}$ και απαιτώντας μέσω των ταυτίσεων $D'(p, D_\kappa) \cong (0, D_\kappa) \times S^{n-1}$ και $D'(\hat{p}, D_\lambda) \cong (0, D_\lambda) \times S^{n-1}$ ο περιορισμός της $h_\Theta|_{D'(p,D_\kappa)}$ στο $D'(p, D_\kappa)$ να είναι η απεικόνιση $i \times \Theta : (0, D_\kappa) \times S^{n-1} \longrightarrow (0, D_\lambda) \times S^{n-1}$, όπου $i : (0, D_\kappa) \hookrightarrow (0, D_\lambda)$ είναι η ένθεση. Με άλλα λόγια, η h_Θ απεικονίζει σε κάθε $x \in D'(p, D_\kappa)$ με πολικές συντεταγμένες (ρ_x, u_x) στο χάρτι Φ το σημείο $y = h_\Theta(x) \in D'(\hat{p}, D_\lambda)$ με πολικές συντεταγμένες $(\rho_x, \Theta(u_x))$ στο χάρτι Ψ. Έστω $\widetilde{\Theta} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ η μοναδική στροφή τ.ω. $\widetilde{\Theta}|_{S^{n-1}} \equiv \Theta$. Τότε, μέσω των ταυτίσεων $T_pM^n_\kappa \cong \{p\}\times p^\perp = \{p\}\times(\mathbb{R}^n\times\{0\}) \cong \mathbb{R}^n$ και $T_{\hat{p}}M^n_\lambda \cong \{\hat{p}\}\times\hat{p}^\perp = \{\hat{p}\}\times(\mathbb{R}^n\times\{0\}) \cong \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$h_\Theta \equiv \exp_{\hat{p}} \circ \widetilde{\Theta} \circ \exp_p^{-1},$$

και άρα η h_Θ είναι λεία. Έστω $\angle(u,v)$ η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων $u, v \in S^{n-1} \subseteq \mathbb{E}^n$. Τότε

$$\angle(u_{\hat{q}}, u_{\hat{r}}) = \angle_{\hat{p}}(\hat{q}, \hat{r}) = \angle_p(q,r) = \angle(u_q, u_r),$$

και άρα η Θ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\Theta(u_q) = u_{\hat{q}}$ και $\Theta(u_r) = u_{\hat{r}}$. Αφού $\rho_{\hat{q}} = d(\hat{p},\hat{q}) = d(p,q) = \rho_q$ και ομοίως $\rho_{\hat{r}} = \rho_r$ έχουμε ότι $h_\Theta(q) = \hat{q}$ και $h_\Theta(r) = \hat{r}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η $h := h_\Theta$ αυξάνει γνήσια το μήκος κάθε μη ακτινικού μονοπατιού. Πράγματι, η εικόνα της h είναι η μπάλα ακτίνας D_κ και κέντρο $\hat{p}$ και άρα περιέχει το γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(\hat{p},\hat{q},\hat{r})$. Έτσι αν γ είναι η γεωδαισιακή από το $\hat{q}$ στο $\hat{r}$, τότε

$$d(q,r) = L(h^{-1} \circ \gamma) < L(\gamma) = d(\hat{q},\hat{r}).$$

Για να δείξουμε τώρα ότι η h αυξάνει γνήσια το μήκος κάθε μη ακτινικού μονοπατιού $\sigma : (a,b) \longrightarrow D'(p, D_\kappa)$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $(r,u) \in (0, D_\kappa) \times S^{n-1}$ και κάθε $A = ([\lambda]_r, [\gamma]_u) \in T_{(r,u)}\big((0, D_\kappa) \times S^{n-1}\big)$ έχουμε ότι

$$\|(i \times \Theta)_{*(r,u)}(A)\widetilde{\|} \geq \widetilde{g_\kappa}^p(A,A),$$

με ισότητα ανν $[\gamma]_u = 0$, όπου $\|\cdot\widetilde{\|}$ είναι η οικογένεια των νορμών της ρημάννειας μετρικής $\widetilde{g_\lambda}^{\hat{p}}$. Αυτό, όμως, πράγματι ισχύει, αφού

$$\begin{aligned}
\|(i \times \Theta)_{*(r,u)}(A)\widetilde{\|} &= \|[(\lambda, \Theta \circ \gamma)]_{(r,u)}\|^2 \\
&= \lambda'(0)^2 + G_\lambda(r)\|(\Theta \circ \gamma)'(0)\|^2 \\
&= \lambda'(0)^2 + G_\lambda(r)\|\Theta\big(\gamma'(0)\big)\|^2 \\
&= \lambda'(0)^2 + G_\lambda(r)\|\gamma'(0)\|^2 \\
&\geq \lambda'(0)^2 + G_\kappa(r)\|\gamma'(0)\|^2 = \widetilde{g_\kappa}^p(A,A),
\end{aligned}$$

και η μόνη ανισότητα που εμφανίζεται, σύμφωνα με την παρατήρηση 1, ισχύει ως ισότητα ανν $\gamma'(0) = 0$ δηλαδή $[\gamma]_u = 0$. □

Πόρισμα 4.5.2 *Έστω $\lambda < \kappa$ πραγματικοί αριθμοί και έστω $\Delta := \Delta(p, q, r)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον M^n_κ με περίμετρο $< 2D_\kappa$. Τότε η γωνία μεταξύ δύο οποιονδήποτε πλευρών ενός γεωδαισιακού τριγώνου σύγκρισης $\overline{\Delta}$ για το Δ στον M^n_λ είναι μικρότερη ή ίση από τη γωνία των αντίστοιχων πλευρών του $\Delta \subseteq M^n_\kappa$.*

Απόδειξη Έστω $\overline{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ ένα τρίγωνο σύγκρισης για το Δ στον M^n_λ. Πρέπει να δείξουμε ότι $\angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r}) \leq \angle_p(q, r)$. Καταρχάς, αν $\angle_p(q, r) = \pi$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $\angle_p(q, r) = 0$, τότε επίσης $\angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r}) = 0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\angle_p(q, r) \in (0, \pi)$. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι $\angle_p(q, r) < \angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r})$. Επιλέγοντας $\hat{r} \in M^n_\lambda$ τ.ω. $\angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \hat{r}) = \angle_p(q, r)$ και $d(\bar{p}, \hat{r}) = d(\bar{p}, \bar{r})$, από την προηγούμενη πρόταση και το νόμο των συνημιτόνων παίρνουμε ότι $d(q, r) < d(\bar{q}, \hat{r}) < d(\bar{q}, \bar{r})$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι το $\overline{\Delta}$ είναι τρίγωνο σύγκρισης για το Δ. $\square$

Πρόταση 4.5.4 *Για κάθε $\kappa > 0$ υπάρχει συνάρτηση $C : [0, D_\kappa) \longrightarrow [1, \infty)$ με $C(r) \stackrel{r \to 0}{\longrightarrow} 1$ τ.ω. για κάθε $p \in M^n_\kappa$ και οποιεσδήποτε γεωδαισιακές $\gamma, \sigma : [0, 1] \longrightarrow D(p, r)$ να έχουμε ότι*

$$d(\gamma_t, \sigma_t) \leq tC(r)d(\gamma_1, \sigma_1).$$

Κεφάλαιο 5

Καμπυλότητα

Η κατηγορία των μετρικών χώρων είναι αρκετά πλούσια κατηγορία και, έτσι, τις περισσότερες φορές, για να συναγάγουμε βαθύτερα αποτελέσματα για τη γεωμετρία των χώρων μήκους, είμαστε αναγκασμένοι να επιβάλουμε επιπλέον γεωμετρικούς περιορισμούς στους υπό μελέτη χώρους. Από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες είναι τα φράγματα στην καμπυλότητα.

Γύρω στο 1950, συγκρίνοντας τη γεωμετρία των γεωδαισιακών τριγώνων σε ένα χώρο μήκους X με τη γεωμετρία τριγώνων σύγκρισης στους χώρουσ-μοντέλα M^2_κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, ο Alexandrov όρισε τι σημαίνει να έχει ένας χώρος μήκους καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$. Χαλαρά μιλώντας, ένας χώρος μήκους X έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$ αν τοπικά τα γεωδαισιακά τρίγωνα στον X είναι λεπτότερα ή παχύτερα, αντίστοιχα, από τα τρίγωνα σύγκρισης τους στον M^2_κ. Όπως θα δούμε, ο ορισμός αυτός του Alexandrov γενικεύει την έννοια των φραγμάτων στις καμπυλότητες τομής από την κατηγορία των πολλαπλοτήτων Riemann στην κατηγορία των χώρων μήκους.

5.1 Χώροι Φραγμένης Καμπυλότητας

Σ' αυτή την παράγραφο θα δούμε διάφορους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για το τι σημαίνει να έχει ένας μετρικός χώρος καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$ καθώς και κάποιες άμεσες ιδιότητες και παραδείγματα τέτοιων χώρων.

Θα χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ορολογία. Έστω $\Delta(pq, pr, qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στο μετρικό χώρο X με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και έστω $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ ένα τρίγωνο σύγκρισης για το Δ στον M^2_κ. Ένα σημείο $\bar{x} \in \overline{qr}$ θα λέγεται σημείο σύγκρισης για το $x \in qr$ αν $d(q, x) = d(\bar{q}, \bar{x})$. Σημεία σύγκρισης ορίζονται όμοια και για τις άλλες πλευρές του Δ. Αν $q \neq p$ και $r \neq p$, τότε η γωνία του Δ στην κορυφή p, είναι η γωνία Alexandrov των γεωδαισιακών τμημάτων pq και pr. Επίσης θα γράφουμε $|xy|$ αντί $d(x, y)$ για την απόσταση δύο σημείων $x, y \in X$ για απλότητα στο συμβολισμό.

Ορισμός 5.1.1 Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ και έστω $\Delta(pq, pr, qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο με περίμετρο $< 2D_\kappa$ στο μετρικό χώρο (X, d). Θα λέμε ότι το Δ ικανοποιεί την $\overline{\text{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα αν

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$$

για κάθε $x, y \in \Delta$, όπου $\bar{x}, \bar{y} \in M_\kappa^2$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα x, y σε κάποιο (και άρα και σε κάθε) τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta}$ για το Δ στον M_κ^2. Ομοίως θα λέμε ότι το Δ ικανοποιεί την $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα αν

$$d(x,y) \geq d(\bar{x}, \bar{y})$$

για κάθε $x, y \in \Delta$, όπου $\bar{x}, \bar{y} \in M_\kappa^2$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα x, y σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta}$ για το Δ στον M_κ^2.

Ορισμός 5.1.2 Ένας χώρος μήκους X λέγεται $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ($\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος αντιστ.) αν είναι D_κ-γεωδαισιακός και κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$ ικανοποιεί την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα ($\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα αντιστ.)

<u>Παρατήρηση</u>

1. Έστω Δ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$. Τότε για κάθε x, y που ανήκουν στην ίδια πλευρά του Δ, οι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ και $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ ανισότητες ισχύουν ως ισότητες.

Ορισμός 5.1.3 Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ και έστω X χώρος μήκους. Θα λέμε ότι ο X έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ($\geq \kappa$ αντίστ.) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή του x η οποία είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ($\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος αντιστ.). Θα λέμε ότι ο X είναι επίπεδος (με την έννοια του Alexandrov) αν έχει καμπυλότητα ≤ 0 και ≥ 0.

Ένας NPC-χώρος (PC-χώρος αντίστ.) είναι ένας πλήρης χώρος μήκους X καμπυλότητας ≤ 0 (≥ 0 αντιστ.) Ένας ολικός NPC-χώρος (ολικός PC-χώρος αντιστ.) είναι ένας πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος ($\underline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος αντίστ.) Ο X θα λέγεται ολικά επίπεδος (με την έννοια του Alexandrov) αν είναι πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$ και $\underline{\mathrm{CAT}}(0)$ χώρος.

Υπάρχουν αρκετοί ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ και $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, οι οποίοι οφείλονται όλοι στον A.D. Alexandrov. Όπως συνηθίζεται στους συνθετικούς ορισμούς στους οποίους δεν έχουμε στα χέρια μας τα εργαλεία του διαφορικού λογισμού, τέτοιοι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί είναι αρκετά χρήσιμοι. Θα δούμε αμέσως τέσσερις από αυτούς για την περίπτωση των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων.

Πρόταση 5.1.1 *Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ και έστω X γεωδαισιακός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος.*

(β) *Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(p, q, r, pq, pr, qr)$ με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και κάθε $x \in qr$, έχουμε*

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x}),$$

όπου $\bar{p}$, $\bar{x}$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα p, x σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta}$ για το Δ στον M_κ^2.

(γ) *Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(p, q, r, pq, pr, qr)$ με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και κάθε $x \in pq$, $y \in pr$, με $x \neq p$ και $y \neq p$, οι γωνίες στις κορυφές που αντιστοιχούν στο p στα τρίγωνα σύγκρισης $\bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq M_\kappa^2$ και $\bar{\Delta}(p, x, y) \subseteq M_\kappa^2$ ικανοποιούν την*

$$\angle_p^{(\kappa)}(x, y) \leq \angle_p^{(\kappa)}(q, r).$$

(δ) *Η γωνία Alexandrov μεταξύ οποιωνδήποτε πλευρών κάθε γεωδαισιακού τριγώνου* Δ *στον* X *με περίμετρο* $< 2D_\kappa$ *και διακεκριμένες κορυφές είναι μικρότερη ή ίση από τη γωνία μεταξύ των αντίστοιχων πλευρών ενός τριγώνου σύγκρισης* $\bar{\Delta}$ *για το* Δ *στον*M_κ^2.

(ε) *Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο* $\Delta(p,q,r,pq,pr,qr)$ *στον* X *με* $p \neq q$, $p \neq r$ *και περίμετρο* $< 2D_\kappa$, *αν* $H(\hat{p},\hat{q},\hat{r})$ *είναι ο μεντεσές σύγκρισης για το* Δ *στον* M_κ^2, *(δηλαδή* $d(\hat{p},\hat{q}) = d(p,q)$, $d(\hat{p},\hat{r}) = d(p,r)$ *και* $\angle(\hat{p}\hat{q},\hat{p}\hat{r}) = \angle(pq,pr)$*), τότε*

$$d(\hat{q},\hat{r}) \leq d(q,r).$$

Απόδειξη Προφανώς (α)$\Longrightarrow$(β), και είναι άμεσο ότι (δ)$\Longleftrightarrow$(ε). Επίσης, αφού στον ορισμό της γωνίας Alexandrov μπορούμε να πάρουμε γωνίες σύγκρισης στον M_κ^2, $\kappa \in \mathbb{R}$, έπεται ότι (γ)$\Longrightarrow$(δ). Θα δείξουμε ότι (α)$\Longleftrightarrow$(γ), (β)$\Longrightarrow$(γ) και (δ)$\Longrightarrow$(β).

(α)$\Longleftrightarrow$(γ) Έστω $\Delta(pq,pr,qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X και έστω $x \in pq$, $y \in pr$ τ.ω. $x \neq p$, $y \neq p$. Θέτουμε $\Delta' := \Delta(px,py,xy)$ και θεωρούμε τρίγωνα σύγκρισης $\bar{\Delta}$ και $\bar{\Delta}'$ στον M_κ^2, για τα Δ και Δ' αντίστοιχα. Αν $\bar{x},\bar{y}$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα x,y στο $\bar{\Delta}$, τότε τα τρίγωνα $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ και $(\bar{p}',\bar{x}',\bar{y}')$ στον M_κ^2 έχουν δύο ίσες πλευρές, και άρα από το νόμο των συνημιτόνων στον M_κ^2 έπεται ότι η ανισότητα $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x}',\bar{y}') = d(x,y)$ ισχύει ανν $\bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}'$, όπου $\bar{\alpha},\bar{\alpha}'$ είναι οι γωνίες των τριγώνων $\bar{\Delta}$ και $\bar{\Delta}'$ στις κορυφές $\bar{p}$ και $\bar{p}'$ αντίστοιχα. Όμως $\bar{\alpha} = \angle(\bar{p}\bar{x},\bar{p}\bar{y}) = \angle(\bar{p}\bar{q},\bar{p}\bar{r}) = \angle_p^{(\kappa)}(q,r)$ και $\bar{\alpha}' = \angle_p^{(\kappa)}(x,y)$. Άρα (α)$\Longleftrightarrow$(γ).

(β)$\Longrightarrow$(γ) Διατηρούμε τους συμβολισμούς της προηγούμενης παραγράφου. Έστω $\bar{\Delta}'' = \Delta(\bar{p}'',\bar{x}'',\bar{r}'') \subseteq M_\kappa^2$ τρίγωνο σύγκρισης για την τριάδα (p,x,r) και έστω $\bar{\alpha}''$ η γωνία αυτού του τριγώνου στην κορυφή $\bar{p}''$. Από το (β) έπεται ότι $d(x,y) \leq d(\bar{x}'',\bar{y}'')$, όπου $\bar{y}'' \in \bar{p}''\bar{r}''$ είναι το σημείο σύγκρισης για το y στο $\bar{\Delta}''$. Όμως $d(\bar{x}',\bar{y}') = d(x,y)$, και έτσι εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $(\bar{p}',\bar{x}',\bar{y}')$ και $(\bar{p}'',\bar{x}'',\bar{y}'')$ στον M_κ^2, έπεται ότι

$$\bar{\alpha}' \leq \angle_{\bar{p}''}(\bar{x}'',\bar{y}'') = \angle_{\bar{p}''}(\bar{x}'',\bar{r}'') = \bar{\alpha}''.$$

Από το (β) πάλι $d(\bar{x}'',\bar{r}'') = d(x,r) \leq d(\bar{x},\bar{r})$, και έτσι εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $(\bar{p}'',\bar{x}'',\bar{r}'')$ και $(\bar{p},\bar{x},\bar{r})$ έπεται ότι

$$\bar{\alpha}'' \leq \angle_{\bar{p}}(\bar{x},\bar{r}) = \angle_{\bar{p}}(\bar{q},\bar{r}) = \bar{\alpha},$$

και άρα $\bar{\alpha}' \leq \bar{\alpha}$ όπως ζητούσαμε.

(δ)$\Longrightarrow$(β) Έστω $\Delta = \Delta(pq,pr,qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X και $x \in qr$, $x \neq q$, $x \neq r$. Επιλέγουμε γεωδαισιακό τμήμα xp που συνδέει τα p,x στον X και θέτουμε θ_q, θ_r τις γωνίες που σχηματίζει το xp με τα υποτμήματα xq και xr του qr, αντίστοιχα. Θέτουμε επίσης $\beta := \angle(qp,qr)$. Έστω $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p},\bar{q},\bar{r})$ τρίγωνο σύγκρισης για το Δ στον M_κ^2 και θέτουμε $\bar{\beta}$ τη γωνία αυτού του τριγώνου στην κορυφή $\bar{q}$.

Έστω $\bar{\Delta}' = \Delta(\widetilde{p},\widetilde{x},\widetilde{q})$, $\bar{\Delta}'' = \Delta(\widetilde{p},\widetilde{x},\widetilde{r})$ τα τρίγωνα σύγκρισης για τα $\Delta(pq,px,qx)$ και $\Delta(px,pr,xr)$ αντίστοιχα. Λόγω της μεταβατικότητας της ομάδας των ισομετριών του M_κ^2 μπορούμε να επιλέξουμε τα Δ' και Δ'' έτσι ώστε να έχουν την πλευρά $\widetilde{p}\widetilde{x}$ κοινή και τα σημεία $\widetilde{q},\widetilde{r}$ να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν τα $\widetilde{p},\widetilde{x}$. Τέλος θέτουμε $\widetilde{\theta}_q := \angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{p},\widetilde{q})$, $\widetilde{\theta}_r := \angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{p},\widetilde{r})$ και $\widetilde{\beta} = \angle_{\widetilde{q}}(\widetilde{p},\widetilde{x})$.

Αφού τα τμήματα xq και xr είναι υποτμήματα του qr, έχουμε ότι

$$\theta_q + \theta_r \geq \angle(xq, xr) = \pi,$$

και άρα από το (δ), $\widetilde{\theta}_q + \widetilde{\theta}_r \geq \pi$. Επιπλέον,

$$|\widetilde{p}\widetilde{q}| + |\widetilde{q}\widetilde{x}| + |\widetilde{x}\widetilde{r}| + |\widetilde{p}\widetilde{r}| = |pq| + |qr| + |pr| < 2D_\kappa,$$

και έτσι αφού $|\bar{p}\bar{q}| = |\widetilde{p}\widetilde{q}|$, $|\bar{p}\bar{r}| = |\widetilde{p}\widetilde{r}|$ και $|qr| = |\widetilde{q}\widetilde{x}| + |\widetilde{x}\widetilde{r}|$, έπεται από το λήμμα του Alexandrov ότι $\widetilde{\beta} \leq \bar{\beta}$. Αν τώρα $\bar{x} \in \bar{q}\bar{r}$ είναι το σημείο σύγκρισης για το x στο $\bar{\Delta}$, από τις ισότητες $|\bar{p}\bar{q}| = |\widetilde{p}\widetilde{q}|$, $|\widetilde{q}\widetilde{x}| = |\bar{q}\bar{x}|$, $\widetilde{\beta} \leq \bar{\beta}$ και το νόμο των συνημιτόνων έπεται ότι $|\bar{p}\bar{x}| \geq |\widetilde{p}\widetilde{x}| = |px|$, όπως θέλουμε. □

Παρατηρήσεις

2. Ο χαρακτηρισμός (β) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων της προηγούμενης πρότασης είναι ισοδύναμος με το εξής: Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(p,q,r)$ στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$ ισχύει ότι $d(p, m_{q,r}) \leq d(\bar{p}, \overline{m_{q,r}})$, όπου $m_{q,r} \in qr$ είναι το μέσο του qr και $\overline{m_{q,r}}$ το σημείο σύγκρισης για το $m_{q,r}$ σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta}$ για το Δ στον M^2_κ.

Απόδειξη. Έστω $\Delta := \Delta(pq, pr, qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $0 \leq k \leq 2^n$ θέτουμε x_n^k το μοναδικό σημείο του qr για το οποίο

$$d(q, x_n^k) = \frac{k}{2^n} d(q,r),$$

και θέτουμε $D = \{x_n^k \,|\, n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$. Προφανώς το D είναι πυκνό στο qr. Έστω $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq M^2_\kappa$ τρίγωνο σύγκρισης για το Δ. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in D$, έχουμε $d(p,x) \leq d(\bar{p}, \bar{x})$, όπου $\bar{x}$ είναι το σημείο σύγκρισης για το x στο $\bar{\Delta}$. Για το σκοπό αυτό γράφουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ όπου $D_n := \{x_n^k \,|\, k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$. Από την υπόθεση ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $x \in D_1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $x \in D_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και θα δείξουμε ότι ισχύει για κάθε $x \in D_{n+1}$. Έστω, λοιπόν, $x := x_{n+1}^k \in D_{n+1}$. Θέτουμε $y_k := x_{n+1}^{2k}$ αν $0 \leq k < 2^n$ και $y_k = x_{n+1}^{2k-2^{n+1}}$ αν $2^n < k \leq 2^{n+1}$. Προφανώς αν $k = 2^n$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $0 \leq k < 2^n$ επιλέγουμε τρίγωνο σύγκρισης $\widetilde{\Delta} := \Delta(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{y_k})$ στον M^2_κ, ενώ αν $2^n < k \leq 2^{n+1}$ επιλέγουμε τρίγωνο σύγκρισης $\widetilde{\Delta}' := \Delta(\widetilde{p}, \widetilde{y_k}, \widetilde{r})$ στον M^2_κ.

Αφού είτε $y_k = x_{n+1}^{2k} = x_n^k \in D_n$ είτε $y_k = x_{n+1}^{2k-2^{n+1}} = x_n^{k-2^n} \in D_n$, σε κάθε περίπτωση έχουμε από την επαγωγική υπόθεση ότι

$$|\widetilde{p}\widetilde{y_k}| = |py_k| \leq |\bar{p}\bar{y_k}|, \tag{5.1}$$

όπου $\bar{p}, \bar{y_k}$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα p, y_k στο $\bar{\Delta}$. Επίσης, από τον ορισμό των y_k, το σημείο x είναι είτε μέσο του $[q, y_k]$, είτε μέσο του $[y_k, r]$, οπότε $|px| \leq |\widetilde{p}\widetilde{x}'|$, όπου φυσικά τα $\widetilde{x}$ και $\widetilde{x}'$ είναι τα σημεία σύγκρισης στα τρίγωνα $\widetilde{\Delta}$ και $\widetilde{\Delta}'$ αντίστοιχα. Αν τώρα $0 \leq k < 2^n$, αφού $|\widetilde{p}\widetilde{q}| = |\bar{p}\bar{q}|$ και $|\widetilde{q}\widetilde{y_k}| = |\bar{q}\bar{y_k}|$, έπεται από την (5.1) και το νόμο συνημιτόνων ότι $\angle_{\widetilde{q}}(\widetilde{p}, \widetilde{x}) = \angle_{\widetilde{q}}(\widetilde{p}, \widetilde{y_k}) \leq \angle_{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{y_k}) = \angle_{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{x})$, το οποίο από το νόμο των συνημιτόνων πάλι, μας δίνει ότι $|\widetilde{p}\widetilde{x}| \leq |\bar{p}\bar{x}|$. Ομοίως $|\widetilde{p}\widetilde{x}'| \leq |\bar{p}\bar{x}|$ αν $2^n < k \leq 2^{n+1}$. Συνεπώς ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $x \in D$, και αφού το D είναι πυκνό στο qr έπεται ότι ισχύει για κάθε $x \in qr$.

3. Ο χαρακτηρισμός 5.1.1 (ε) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, μπορεί να διατυπωθεί πιο αναλυτικά χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων ως εξής: Έστω X ένας D_κ-γεωδαισιακός χώρος.

- Αν $\kappa = 0$, τότε ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ανν για οποιοδήποτε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(pq, pr, qr)$ στον X έχουμε ότι

$$|qr|^2 \geq |pq|^2 + |pr|^2 - 2|pq||pr| \cos\angle(pq, pr).$$

- Αν $\kappa < 0$, τότε ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ανν για οποιοδήποτε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(pq, pr, qr)$ στον X έχουμε

$$\begin{aligned} \cosh\left(|qr|\sqrt{-\kappa}\right) \quad \geq \quad & \cosh\left(|pq|\sqrt{-\kappa}\right)\cosh\left(|pr|\sqrt{-\kappa}\right) \\ & - \sinh\left(|pq|\sqrt{-\kappa}\right)\sinh\left(|pr|\sqrt{-\kappa}\right)\cos\angle(pq, pr). \end{aligned}$$

- Αν $\kappa > 0$, τότε ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ανν για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$, έχουμε

$$\begin{aligned} \cos\left(\sqrt{\kappa}|qr|\right) \quad \leq \quad & \cos\left(\sqrt{\kappa}|pq|\right)\cos\left(\sqrt{\kappa}|pr|\right) \\ & + \sin\left(\sqrt{\kappa}|pq|\right)\sin\left(\sqrt{\kappa}|pr|\right)\cos\angle(pq, pr). \end{aligned}$$

4. Ο χαρακτηρισμός 5.1.1 (δ) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων μαζί με το πόρισμα 4.5.2 δείχνουν ότι για κάθε $\lambda \leq \kappa$, ο M^n_λ είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος.

5. Από το χαρακτηρισμό (γ) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων έπεται ότι σε κάθε $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρο, οι γωνίες Alexandrov υπάρχουν με την αυστηρή έννοια. Πράγματι, από το (γ), το $\limsup$ στον ορισμό της γωνίας Alexandrov υπάρχει ως όριο σε $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους για γωνίες κ-σύγκρισης, και από την πρόταση 4.4.6, έπεται ότι το όριο αυτό υπάρχει και για ευκλείδιες γωνίες σύγκρισης.

6. Από την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα και την πρόταση 3.2.1 προκύπτει άμεσα ότι η μετρική ενός $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρου είναι κυρτή. Έτσι, αφού από την παρατήρηση 4ο M^n_κ είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος για κάθε $\kappa \leq 0$, έπεται ότι η μετρική των M^n_κ είναι κυρτή αν $\kappa \leq 0$.

Η φράση "ο μετρικός χώρος X έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$," οδηγεί με φυσικό τρόπο στο ακόλουθο ερώτημα: Αν ένας μετρικός χώρος έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$, έχει τότε και καμπυλότητα $\leq \lambda$ για κάθε $\lambda \geq \kappa$; Σύμφωνα με την επόμενη πρόταση η απάντηση είναι ναι.

Πρόταση 5.1.2 *Έστω X μετρικός χώρος.*

(α) *Αν ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος και $\kappa \leq \lambda$, τότε ο X είναι και $\overline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος.*

(β) *Αν ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος για κάθε $\lambda > \kappa$, τότε είναι επίσης $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος.*

Απόδειξη (α) Αφού ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος, είναι D_κ-γεωδαισιακός. Έτσι, αφού $D_\lambda \leq D_\kappa$, είναι επίσης και D_λ-γεωδαισιακός. Έστω $\Delta(pq, pr, qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X

με περίμετρο $< 2D_\lambda \leq 2D_\kappa$. Αφού ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος έχουμε ότι $\angle_p^{(\kappa)}(q,r) \leq \angle(pq,pr)$ και από το πόρισμα 4.5.2 έχουμε ότι $\angle_p^{(\lambda)}(q,r) \leq \angle_p^{(\kappa)}(q,r)$. Από το χαρακτηρισμό 5.1.1 (δ) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων έπεται ότι ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος.
(β) Για κάθε $x, y \in X$ με $|xy| < D_\kappa$, υπάρχει $\lambda > \kappa$ αρκετά κοντά στο κ τ.ω. $|xy| < D_\lambda$. Έτσι, αφού ο X είναι D_λ-γεωδαισιακός, για κάθε $\lambda > \kappa$, είναι και D_κ-γεωδαισιακός.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\kappa \geq 0$. Τότε σύμφωνα με το χαρακτηρισμό 5.1.1 (ε) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, το γεγονός ότι ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος για κάθε $\lambda > \kappa \geq 0$ είναι ισοδύναμο με το ότι

$$\cos(|qr|\sqrt{\lambda}) \leq \cos(|pq|\sqrt{\lambda})\cos(|pr|\sqrt{\lambda}) + \sin(|pq|\sqrt{\lambda})\sin(|pr|\sqrt{\lambda})\cos\angle(pq,pr) \quad (5.2)$$

για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(pq,pr,qr)$ στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$. Αν τώρα $\kappa > 0$, παίρνοντας όριο στην (5.2) καθώς $\lambda \searrow \kappa$, παίρνουμε την (5.2) με $\lambda = \kappa$, και άρα από το χαρακτηρισμό 5.1.1 (ε) ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος. Αν $\kappa = 0$, λύνοντας την 5.2 ως προς $|qr|$ και παίρνοντας όριο καθώς $\lambda \searrow 0$, βρίσκουμε ότι

$$|qr|^2 \geq |pq|^2 + |pr|^2 - 2|pq||pr|\cos\angle(pq,pr),$$

το οποίο δείχνει ότι ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Η περίπτωση $\kappa < 0$ είναι όμοια με την περίπτωση $\kappa > 0$. □

Ειδικότερα για τους $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρους έχουμε επιπλέον τους ακόλουθους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς. Η ανισότητες (β) και (γ) λέγονται NPC-ανισότητες. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί δόθηκαν για πρώτη φορά από τους Bruhat και Tits, στην εργασία τους για τα ευκλείδια κτίρια.

Πρόταση 5.1.3 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος.*

(β) *Ο X είναι γεωδαισιακός χώρος και για κάθε $p \in X$ και κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$,*

$$|p\gamma_t|^2 \leq t|p\gamma_1|^2 + (1-t)|p\gamma_0|^2 - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2 \quad (5.3)$$

(γ) *Ο X είναι γεωδαισιακός και για κάθε τριάδα σημείων $p, x, y \in X$, αν m είναι κάποιο μέσο των x, y, τότε*

$$|pm|^2 \leq \frac{1}{2}|px|^2 + \frac{1}{2}|py|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2. \quad (5.4)$$

Αν επιπλέον ο X είναι πλήρης, τότε τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με τα ακόλουθα.

(δ) *Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $m \in X$ τ.ω. για κάθε $p \in X$ να ισχύει η (5.4), και*

(ε) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x, y \in X$, υπάρχει $m \in X$ τ.ω. για κάθε $p \in X$,*

$$|pm|^2 \leq \frac{1}{2}|px|^2 + \frac{1}{2}|py|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2 + \varepsilon.$$

Απόδειξη Καταρχάς, χωρίς την υπόθεση της πληρότητας, οι χαρακτηρισμοί (β) και (γ) είναι και οι δύο ισοδύναμοι με την 1-κυρτότητα της συνάρτησης $|\cdot|_p^2 = d^2(p,\cdot)$. Προφανώς (γ)$\Longrightarrow$(δ)$\Longrightarrow$(ε). Θα δείξουμε ότι (α)$\Longleftrightarrow$(β), και υποθέτοντας ότι ο X είναι πλήρης θα αποδείξουμε ότι (δ)$\Longrightarrow$(γ) και (ε)$\Longrightarrow$(δ).
(α)$\Longleftrightarrow$(β) Παρατηρούμε ότι αν η γεωδαισιακή γ δεν περιέχεται μέσα στην συνεκτική συνιστώσσα του $p \in X$, τότε η (5.3) ισχύει τετριμμένα ως $+\infty = +\infty$. Σύμφωνα με το χαρακτηρισμό 5.1.1 (β), ο X είναι $\overline{\text{CAT}}(0)$-χώρος ανν για κάθε $p \in X$ και κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ στη συνεκτική συνιστώσα του p έχουμε ότι $|p\gamma_t|^2 \leq |\bar{p}\bar{\gamma}_t|^2$, όπου $\bar{\gamma}_t$ είναι το σημείο σύγκρισης για το γ_t σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\Delta(\bar{p},\bar{\gamma}_0,\bar{\gamma}_1)$ στον $\mathbb{E}^n$ για το $\Delta(p,\gamma_0,\gamma_1)$. Χρησιμοποιώντας όμως τη γεωμετρία του $\mathbb{E}^n$ μπορούμε να εκφράσουμε την $|\bar{p}\bar{\gamma}_t|^2$ συναρτήσει των ποσοτήτων $|p\gamma_0|$, $|p\gamma_1|$ και $|\gamma_0\gamma_1|$ ως ωξής:

$$\begin{aligned}
|\bar{p}\bar{\gamma}_t|^2 &= \langle \bar{p}-\bar{\gamma}_t, \bar{p}-\bar{\gamma}_t\rangle = \langle \bar{p}-\bar{\gamma}_0 - t(\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_0), \bar{p}-\bar{\gamma}_1-(1-t)(\bar{\gamma}_0-\bar{\gamma}_1)\rangle \\
&= \langle \bar{p}-\bar{\gamma}_0, \bar{p}-\bar{\gamma}_1\rangle + (1-t)\langle \bar{p}-\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_0\rangle \\
&\quad + t\langle \bar{p}-\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_0-\bar{\gamma}_1\rangle - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2 \\
&= (1-t)\langle \bar{p}-\bar{\gamma}_0, \bar{p}-\bar{\gamma}_0\rangle + t\langle \bar{p}-\bar{\gamma}_1, \bar{p}-\bar{\gamma}_1\rangle - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2 \\
&= t|p\gamma_1|^2 + (1-t)|p\gamma_0|^2 - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2.
\end{aligned}$$

Συνέπως (α)$\Longleftrightarrow$(β).
(δ)$\Longrightarrow$(γ) Έστω $x,y \in X$. Υπάρχει $m \in X$ τ.ω. η (5.4) να ισχύει για κάθε $p \in X$. Εφαρμόζοντας την (5.4) για $p = x$ και $p = y$ παίρνουμε ότι $|xm|^2 \vee |ym|^2 \leq \frac{1}{4}|xy|^2$, το οποίο δείχνει ότι το m είναι μέσο των x,y. Αφού τα $x,y \in X$ ήταν τυχόντα και ο X είναι πλήρης, έπεται ότι ο X είναι γεωδαισιακός χώρος. Επίσης αν m' είναι κάποιο άλλο μέσο των x,y τότε εφαρμόζοντας την (5.4) με $p = m'$ παίρνουμε ότι $m = m'$, το οποίο δείχνει το ζητούμενο.
(ε)$\Longrightarrow$(δ) Έστω $x,y \in X$. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_n \in X$ τ.ω. η ανισότητα

$$(A_n) \quad |pm_n|^2 \leq \frac{1}{2}|px|^2 + \frac{1}{2}|py|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2 + \frac{1}{n},$$

να ισχύει $p \in X$. Εφαρμόζοντας την (A_n) για $p = x$ και $p = y$ και προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2}|xm_n|^2 + \frac{1}{2}|ym_n|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2 \leq \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα, αν $k,n \in \mathbb{N}$, εφαρμόζοντας την (A_k) στον m_n παίρνουμε ότι

$$|m_nm_k|^2 \leq \frac{1}{2}|xm_n|^2 + \frac{1}{2}|ym_n|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2 + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{k},$$

το οποίο δείχνει ότι η (m_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $m \in X$ τ.ω. $m_n \longrightarrow m$, και προφανώς το m έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. $\square$

Θα δούμε τώρα τους ανάλογους της πρότασης 5.1.1 χαρακτηρισμούς των $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρων. Όπως θα δούμε, οι χαρακτηρισμοί (δ) και (ε) χρειάζονται μία μικρή τροποποίηση.

Πρόταση 5.1.4 *Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$ και έστω X γεωδαισιακός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος.*

(β) *Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(p, q, r, pq, pr, qr)$ με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και κάθε $x \in qr$, έχουμε ότι*

$$d(p, x) \geq d(\bar{p}, \bar{x}),$$

όπου $\bar{p}$, $\bar{x}$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα p, x σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta}$ στον M_κ^2.

(γ) *Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(p, q, r, pq, pr, qr)$ με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και κάθε $x \in pq$, $y \in pr$, με $x \neq p$ και $y \neq p$, οι γωνίες στις κορυφές που αντιστοιχούν στο p στα τρίγωνα σύγκρισης $\bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq M_\kappa^2$ και $\bar{\Delta}(p, x, y) \subseteq M_\kappa^2$ ικανοποιούν την*

$$\angle_p^{(\kappa)}(x, y) \geq \angle_p^{(\kappa)}(q, r).$$

(δ) *Η γωνία Alexandrov μεταξύ οποιωνδήποτε πλευρών κάθε γεωδαισιακού τριγώνου Δ στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και διακεκριμένες κορυφές είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη γωνία μεταξύ των αντίστοιχων πλευρών σε κάποιο τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta}$ στον M_κ^2, και επιπλέον για κάθε γεωδαισιακά τμήματα xy και pz στον X με $p \in xy$, $p \neq x$, $p \neq y$,*

$$\angle(px, pz) + \angle(pz, py) = \pi. \tag{5.5}$$

(ε) *Για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(p, q, r, pq, pr, qr)$ στον X με $p \neq q$, $p \neq r$ και περίμετρο $< 2D_\kappa$, αν $H(\hat{p}, \hat{q}, \hat{r})$ είναι ο μεντεσές σύγκρισης για το Δ στον M_κ^2, τότε*

$$d(\hat{q}, \hat{r}) \geq d(q, r),$$

και επιπλέον για κάθε γεωδαισιακά τμήματα xy και pz στον X με $p \in xy$, $p \neq x$, $p \neq y$, ισχύει η (5.5).

Απόδειξη Προφανώς (α)$\Longrightarrow$(β) και η ισοδυναμία (α)$\Longleftrightarrow$(γ) αποδεικνύεται όπως η αντίστοιχη ισοδυναμία για τους $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους.
(γ)$\Longrightarrow$(δ) Έστω $\Delta(pq, pr, qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X και έστω θ η γωνία Alexandrov μεταξύ των πλευρών pq και pr. Από την πρόταση 4.4.6,

$$\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < s, t < \varepsilon} \angle_p^{(\kappa)}\big((pq)_t, (pr)_s\big),$$

και από το (γ), το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $\angle_p^{(\kappa)}(q, r)$.

Έστω τώρα xy και pz δύο γεωδαισιακά τμήματα στον X με $p \in xy$. Από την τριγωνική ανισότητα για τις γωνίες έχουμε ότι

$$\angle(px, pz) + \angle(pz, py) \geq \angle(px, py) = \pi.$$

Θα αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα. Έστω x_0, y_0 και z_0 σημεία στα γεωδαισιακά τμήματα px, py και pz αντίστοιχα. Επιλέγουμε τρίγωνα σύγκρισης $(\bar{x_0}, \bar{p}, \bar{z_0})$, $(\bar{z_0}, \bar{p}, \bar{y_0})$

στον M_κ^2 έτσι ώστε να έχουν την πλευρά $\bar{p}\bar{z_0}$ κοινή και τα σημεία $\bar{x_0}$ και $\bar{y_0}$ να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν τα σημεία $\bar{p}, \bar{z_0} \in M_\kappa^2$. Έστω επίσης $(\hat{x_0}, \hat{y_0}, \hat{z_0})$ τρίγωνο σύγκρισης στον M_κ^2 για τα x_0, y_0, z_0. Από το (γ) έπεται ότι $\angle_{\bar{x_0}}(\bar{z_0}, \bar{p}) \geq \angle_{\hat{x_0}}(\hat{y_0}, \hat{z_0})$, και άρα από το λήμμα του Alexandrov έχουμε ότι

$$\angle_{\bar{p}}(\bar{x_0}, \bar{z_0}) + \angle_{\bar{p}}(\bar{y_0}, \bar{z_0}) \leq \pi. \tag{5.6}$$

Από το (γ) πάλι, οι γωνίες Alexandrov υπάρχουν με την αυστηρή έννοια, και άρα παίρνοντας το όριο στην (5.6) καθώς $x_0 \longrightarrow p$, $y_0 \longrightarrow p$ και $z_0 \longrightarrow p$, έπεται το ζητούμενο.

Λόγω της επιπλέον υπόθεσης του (δ) σε σχέση με τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό των $\overline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρων, η απόδειξη της συνεπαγωγής (δ)$\Longrightarrow$(β) της πρότασης 5.1.1, δουλεύει και για $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρους. Επίπλεον, η απόδειξη της συνεπαγωγής (β)$\Longrightarrow$(γ) είναι επίσης ίδια με αυτή της πρότασης 5.1.1 και η ισοδυναμία (δ)$\Longleftrightarrow$(ε) είναι προφανής. □

Παρατηρήσεις

7. Όλοι οι ισχυρισμοί των παρατηρήσεων 2-6 που ακολούθησαν την πρόταση 5.1.1 ισχύουν, με τις απαραίτητες τροποποιήσεις φυσικά, και για $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρους επίσης. Παραδείγματος χάριν, οι γωνίες Alexandrov υπάρχουν με την αυστηρή έννοια σε $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρους. Μάλιστα, *αν κάποιο σημείο p στο μετρικό χώρο X έχει περιοχή η οποία έχει φραγμένη καμπλυλότητα είτε από πάνω είτε από κάτω, τότε η γωνία Alexandrov μεταξύ δύο οποιονδήποτε γεωδαισιακών που ξεκινούν από το p, υπάρχει με την αυστηρή έννοια.*

8. Έστω X μετρικός χώρος και έστω A μία απεικόνιση η οποία αντιστοιχίζει έναν αριθμό $A(\gamma, \gamma') \in [0, \pi]$ σε κάθε ζευγάρι γεωδαισιακών γ, γ' στον X με κοινή αρχή. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η A είναι μια λογική έννοια γωνίας αν ισχύει ότι:

(i) $A(\gamma, \gamma') = A(\gamma', \gamma)$, για κάθε γεωδαισιακές γ, γ' με κοινή αρχή.

(ii) $A(\gamma, \gamma'') \leq A(\gamma, \gamma') + A(\gamma', \gamma'')$, για κάθε γεωδαισιακές γ, γ' και γ'' με κοινή αρχή.

(iii) Αν γ είναι ο περιορισμός της γ' σε κάποιο αρχικό τμήμα του πεδίου ορισμού της, τότε $A(\gamma, \gamma') = 0$.

(iv) Αν η $\gamma : [-a, a) \longrightarrow X$ είναι γεωδαισιακή και οι $\gamma_-, \gamma_+ : [0, a] \longrightarrow X$ έχουν τύπο $\gamma_-(t) = \gamma(-t)$ και $\gamma_+(t) = \gamma(t)$, τότε $A(\gamma_-, \gamma_+) = \pi$.

Όπως έχουμε δει, η γωνία Alexandrov ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες. Η ρημάννεια γωνία επίσης ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες. Ένα τετριμμένο παράδειγμα τέτοιας γωνίας προκύπτει αν ορίσουμε $A(\gamma, \gamma') = \pi$ αν οι γ και γ' δεν έχουν κοινό αρχικό τμήμα και $A(\gamma, \gamma') = 0$ αλλιώς.

Αν στις προτάσεις 5.1.1 και 5.1.4 αντικαταστήσουμε τη γωνία Alexandrov με κάποια συνάρτηση A με τις παραπάνω ιδιότητες, οι συνεπαγωγές (ε)$\Longleftrightarrow$(δ)$\Longrightarrow$(β) εξακολουθούν να ισχύουν. Η παρατήρηση αυτή θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι αν μία λεία πολλαπλότητα Riemann έχει καμπυλότητες τομής $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$, τότε έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$, αντίστοιχα ως μετρικός χώρος.

Αντικαθιστώντας στο (γ) της πρότασης 3.2.1 τον $\mathbb{E}^2$ με τον M^2_κ για τριάδες σημείων με περίμετρο $< 2D_\kappa$ προκύπτει ο ορισμός του Busemann για το πότε ένας μετρικός χώρος έχει (ολικά) καμπυλότητα $\leq \kappa$. Αντιστρέφοντας τις ανισότητες προκύπτει το πότε ένας χώρος έχει καμπυλότητα $\geq \kappa$. Από την πρόταση 3.2.4 ξέρουμε ότι ένας αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα έχει καμπλυλότητα ≤ 0 με την έννοια του Busemann. Από την άλλη, αφού οι γωνίες Alexandrov υπάρχουν με την αυστηρή έννοια σε χώρους φραγμένης καμπυλότητας με την έννοια του Alexandrov, έπεται από την πρόταση 1.4.1 ότι ένας χώρος με νόρμα έχει φραγμένη καμπυλότητα ανν η νόρμα του επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, οπότε και είναι επίπεδος χώρος με την έννοια του Alexandrov. Συνεπώς η έννοια των φραγμάτων καμπυλότητας του Busemann είναι γνήσια ασθενέστερη από αυτήν του Alexandrov. Ωστόσο για πολλαπλότητες Riemann όπως θα δούμε, συμπίπτουν.

Το ανάλογο της πρότασης 5.1.2 για $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους αποδεικνύεται δυσκολότερα. Συγκεκριμένα, αυτό που είναι δυσκολότερο να αποδειχθεί είναι ότι αν ένας μετρικός χώρος X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος για κάποιο $\kappa > 0$, τότε είναι επίσης και $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος για κάθε $\lambda \leq \kappa$. Καταρχάς το ότι ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος μας δίνει ότι είναι D_κ-γεωδαισιακός, ενώ για να είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος πρέπει να είναι D_λ-γεωδαισιακός, και αφού $D_\lambda \geq D_\kappa$, δεν είναι αμέσως φανερό ότι αυτό ισχύει. Ακόμη και αν περιοριστούμε σε γεωδαισιακούς χώρους το πρόβλημα παραμένει δυσκολότερο, και αυτό επειδή για να αποδείξουμε ότι ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος πρέπει να ελέγξουμε την $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-ανισότητα για όλα τα γεωδαισιακά τρίγωνα με περίμετρο $< 2D_\lambda \leq +\infty$, ενώ το ότι ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος μας δίνει την $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-ανισότητα για γεωδαισιακά τρίγωνα με περίμετρο $< 2D_\kappa \leq 2D_\lambda$. Όπως θα δούμε όμως στην ενότητα 5.3 όπου θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, αν $\kappa > 0$ και ο $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος X δεν είναι ένας από κάποιους ιδιάζοντες μονοδιάστατους χώρους, οι οποίοι είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώροι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε η διάμετρός του είναι φραγμένη από D_κ και όλα τα γεωδαισιακά τρίγωνα στον X έχουν περίμετρο $\leq 2D_\kappa$, το οποίο θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε το αντίστοιχο της πρότασης 5.1.2 για γεωδαισιακούς $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους.

Πρόταση 5.1.5 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος.*

(β) *Ο X είναι γεωδαισιακός χώρος και για κάθε $p \in X$ και κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$,*

$$|p\gamma_t|^2 \geq t|p\gamma_1|^2 + (1-t)|p\gamma_0|^2 - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2 \tag{5.7}$$

(γ) *Ο X είναι γεωδαισιακός χώρος και για κάθε τριάδα $p, x, y \in X$, αν m είναι κάποιο μέσο των x, y, τότε*

$$|pm|^2 \geq \frac{1}{2}|px|^2 + \frac{1}{2}|py|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2. \tag{5.8}$$

Όλοι οι χαρακτηρισμοί των μετρικών χώρων φραγμένης καμπυλότητας που έχουμε δει ως τώρα σχετίζονται με τη γεωμετρία των τριάδων. Θα δούμε τώρα δύο χαρακτηρισμούς, έναν για $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους και έναν για $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους, μέσω τετράδων σημείων.

Ορισμός 5.1.4 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω (x_1,y_1,x_2,y_2) μία τετράδα σημείων του X. Μία *υπο-εμβύθιση* της (x_1,y_1,x_2,y_2) στον M_κ^2, είναι μία τετράδα $(\bar{x_1},\bar{y_1},\bar{x_2},\bar{y_2})$ σημείων του M_κ^2 τ.ω. $|\bar{x_i}\bar{y_j}|=|x_iy_j|$ για κάθε $i,j\in\{1,2\}$ και

$$|x_1x_2|\le|\bar{x_1}\bar{x_2}|,\quad |y_1y_2|\le|\bar{y_1}\bar{y_2}|.$$

Θα λέμε ότι ο X ικανοποιεί την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη των τεσσάρων σημείων αν κάθε τετράδα σημείων (x_1,y_1,x_2,y_2) με περίμετρο $|x_1y_1x_2y_2|:=|x_1y_1|+|y_1x_2|+|x_2y_2|+|y_2x_1|<2D_\kappa$ έχει υπο-εμβύθιση στον M_κ^2.

Με άλλα λόγια, ένας μετρικός χώρος X ικανοποιεί την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη των τεσσάρων σημείων αν κάθε τετράδα στον X με περίπετρο $<2D_\kappa$ μπορεί να εμβυθιστεί στον M_κ^2 έτσι ώστε τα μήκη των πλευρών να διατηρούνται και τα μήκη των διαγωνίων να αυξάνουν.

Πρόταση 5.1.6 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος.*

(β) *Ο X ικανοποιεί την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη των τεσσάρων σημείων και κάθε ζευγάρι σημείων $x,y\in X$ με $d(x,y)<D_\kappa$ έχει προσεγγιστικά μέσα.*

Απόδειξη (α)$\Longrightarrow$(β) Αυτό που έχουμε να αποδείξουμε είναι η $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη των τεσσάρων σημείων. Έστω λοιπόν (x_1,y_1,x_2,y_2) μία τετράδα σημείων στον X με περίμετρο $<2D_\kappa$. Διαλέγουμε τρίγωνα σύγκρισης $(\widetilde{x_1},\widetilde{x_2},\widetilde{y_1})$ και $(\widetilde{x_1},\widetilde{x_2},\widetilde{y_2})$ στον M_κ^2 για τις τριάδες (x_1,x_2,y_1) και (x_1,x_2,y_2) αντίστοιχα, έτσι ώστε να έχουν την πλευρά $\widetilde{x_1}\widetilde{x_2}$ κοινή και τα σημεία $\widetilde{y_1}$ και $\widetilde{y_2}$ να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν τα $\widetilde{x_1},\widetilde{x_2}$. Θέτουμε $Q:=\mathrm{co}(\widetilde{x_1},\widetilde{x_2},\widetilde{y_1})\cup\mathrm{co}(\widetilde{x_1},\widetilde{x_2},\widetilde{y_2})$. Αν το Q είναι κυρτό, τότε αφού τα $\widetilde{y_1}$, $\widetilde{y_2}$ ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζουν $\widetilde{x_1},\widetilde{x_2}$, οι διαγώνιοι $\widetilde{x_1}\widetilde{x_2}$, $\widetilde{y_1}\widetilde{y_2}$ τέμνονται σε κάποιο σημείο $\widetilde{z}\in M_\kappa^2$. Έστω $z\in x_1x_2\subseteq X$ τ.ω. $|x_1z|=|\widetilde{x_1}\widetilde{z}|$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα και το χαρακτηρισμό 5.1.1 (β) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, έχουμε ότι

$$|y_1y_2|\le|y_1z|+|zy_2|\le|\widetilde{y_1}\widetilde{z}|+|\widetilde{z}\widetilde{y_2}|=|\widetilde{y_1}\widetilde{y_2}|.$$

Όμως $|x_1x_2|=|\widetilde{x_1}\widetilde{x_2}|$, και έτσι αν το Q είναι κυρτό, τότε η $(\widetilde{x_1},\widetilde{y_1},\widetilde{x_2},\widetilde{y_2})$ είναι υπο-εμβύθιση της τετράδας (x_1,y_1,x_2,y_2) στον M_κ^2.

Αν τώρα το Q δεν είναι κυρτό, τότε κάποιο από τα $\widetilde{x_i}$, ας πούμε το $\widetilde{x_2}$, ανήκει στο εσωτερικό της κυρτής θήκης των τριών άλλων σημείων. Έτσι $\angle_{\widetilde{x_2}}(\widetilde{x_1},\widetilde{y_1})+\angle_{\widetilde{x_2}}(\widetilde{x_1},\widetilde{y_2})>\pi$. Συνεπώς, αν $(\bar{x_1},\bar{y_1},\bar{y_2})$ ένα τρίγωνο στον M_κ^n τ.ω. $|\bar{x_1}\bar{y_1}|=|\widetilde{x_1}\widetilde{y_1}|$,$|\bar{x_1}\bar{y_2}|=|\widetilde{x_1}\widetilde{y_2}|$, $|\bar{y_1}\bar{y_2}|=|\widetilde{y_1}\widetilde{x_2}|+|\widetilde{x_2}\widetilde{y_2}|$ και $\bar{x_2}$ είναι το σημείο του $\bar{y_1}\bar{y_2}$ με $|\bar{y_1}\bar{x_2}|=|\widetilde{y_1}\widetilde{x_2}|$, τότε $|\bar{x_i}\bar{y_j}|=|x_iy_j|$ για κάθε $i,j\in\{1,2\}$, και

$$|\bar{y_1}\bar{y_2}|=|\bar{y_1}\bar{x_2}|+|\bar{x_1}\bar{y_2}|=|y_1x_2|+|x_2y_2|\ge|y_1y_2|.$$

Επίσης, από το λήμμα του Alexandrov,

$$|\bar{x_1}\bar{x_2}|>|\widetilde{x_1}\widetilde{x_2}|=|x_1x_2|,$$

και άρα η $(\bar{x_1},\bar{x_2},\bar{y_1},\bar{y_2})$ είναι υπο-εμβύθιση της (x_1,y_1,x_2,y_2) στον M_κ^2.

(β)$\Longrightarrow$(α) Θα δείξουμε πρώτα ότι ο X είναι D_κ-γεωδαισιακός. Αφού ο X είναι πλήρης, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ με $|xy| < D_\kappa$ υπάρχει μέσο m των x, y. Έστω, λοιπόν, $x, y \in X$ με $|xy| < D_\kappa$. Εξ' υποθέσεως, υπάρχει ακολουθία (m_i) τ.ω. το m_i να είναι $1/i$-μέσο των x, y. Αφού ο X είναι πλήρης, αν δείξουμε ότι η (m_i) είναι Cauchy θα υπάρχει $m \in X$ τ.ω. $m_i \longrightarrow m$, το οποίο προφανώς θα είναι μέσο των x, y.

Έστω $\varepsilon > 0$. Σταθεροποιούμε $\lambda \in (|xy|, D_\kappa)$. Από το λήμμα 4.4.3, υπάρχει $\delta = \delta(\kappa, \lambda, \varepsilon) > 0$ τ.ω. για κάθε $x, y \in M_\kappa^2$ με $|xy| \leq \lambda$, κάθε δ-μέσο των x, y να είναι ε-κοντά στο μέσο των x, y. Εξ' υποθέσεως, για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$, υπάρχει υπο-εμβύθιση $(\bar{x}, \bar{m_i}, \bar{y}, \bar{m_j})$ της (x, m_i, y, m_j) στον M_κ^2, και από τον ορισμό των υπο-εμβυθίσεων, $|m_i m_j| \leq |\bar{m_i}\bar{m_j}|$. Επίσης,

$$|\bar{x}\bar{y}| \leq |\bar{x}\bar{m_i}| + |\bar{m_i}\bar{y}| = |xm_i| + |m_i y| \leq |xy| + \frac{2}{i},$$

και άρα $|\bar{x}\bar{y}| < \lambda$ όταν το i είναι αρκετά μεγάλο. Έτσι, αν τα i, j είναι επιπλέον αρκετά μεγάλα έτσι ώστε $\frac{1}{i} \vee \frac{1}{j} < \delta$ και το $\bar{m}$ είναι το μέσο των $\bar{x}, \bar{y}$, τότε

$$|m_i m_j| \leq |\bar{m_i}\bar{m_j}| \leq |\bar{m_i}\bar{m}| + |\bar{m}\bar{m_j}| < 2\varepsilon,$$

αφού για κάθε $i \in \mathbb{N}$, το $\bar{m_i}$ είναι $\frac{1}{i}$-μέσο των $\bar{x}, \bar{y}$. Συνεπώς η (m_i) είναι ακολουθία Cauchy.

Απομένει να δείξουμε ότι κάθε τρίγωνο στον X ικανοποιεί την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα. Έστω $\Delta(px, py, xy)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και έστω $m \in xy$. Από την υπόθεση, υπάρχει υποεμβύθιση $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{m}, \bar{y})$ της (p, x, m, y) στον M_κ^2. Από τον ορισμό των υποεμβυθίσεων έχουμε ότι

$$(a)\ |\bar{p}\bar{x}| = |px|,\ |\bar{p}\bar{y}| = |py|, \quad (b)\ |\bar{x}\bar{m}| = |xm|,\ |\bar{m}\bar{y}| = |my|,$$

$$(c)\ |pm| \leq |\bar{p}\bar{m}|, \ \ |xy| \leq |\bar{x}\bar{y}|.$$

Παρατηρούμε ότι $|xy| \leq |\bar{x}\bar{y}| \leq |\bar{x}\bar{m}| + |\bar{m}\bar{y}| = |xm| + |my| = |xy|$, το οποίο μαζί με τις ισότητες (a) δείχνει ότι η $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ είναι τριάδα σύγκρισης για το Δ. Όμως από τις ισότητες (b), το $\bar{m}$ είναι το σημείο σύγκρισης για το m στο $\bar{x}\bar{y}$, και έτσι από το (c) έπεται ότι το Δ ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.1 (β) των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων. $\square$

Ορισμός 5.1.5 Το *μέγεθος* μίας τετράδας (p, x_1, x_2, x_3) σημείων ενός μετρικού χώρου X είναι το μέγιστο των περιμέτρων των τριάδων (p, x_1, x_2), (p, x_1, x_3) και (p, x_2, x_3).

Πρόταση 5.1.7 *Ένας D_κ-γεωδαισιακός χώρος είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ανν*

$$\angle_p^{(\kappa)}(x_1, x_2) + \angle_p^{(\kappa)}(x_2, x_3) + \angle_p^{(\kappa)}(x_1, x_3) \leq 2\pi, \tag{5.9}$$

για κάθε τετράδα (p, x_1, x_2, x_3) στον X με μέγεθος $< 2D_\kappa$.

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι η (5.9) ισχύει για κάθε τετράδα στον X με μέγεθος $< 2D_\kappa$. Θα δείξουμε ότι ο X ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.4 (β) των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων. Έστω $\Delta(pq, pr, qr)$ γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $< 2D_\kappa$ και έστω $x \in qr$. Επιλέγουμε τρίγωνα σύγκρισης $\Delta(\widetilde{x}, \widetilde{q}, \widetilde{p})$ και $\Delta(\widetilde{x}, \widetilde{r}, \widetilde{p})$ στον M_κ^n έτσι ώστε να έχουν την πλευρά $\widetilde{x}\widetilde{p}$ κοινή και τα σημεία $\widetilde{q}, \widetilde{r}$ να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας που ορίζει η κοινή πλευρά. Από την (5.9) έχουμε ότι,

$$\angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{q}, \widetilde{p}) + \angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{r}, \widetilde{p}) + \angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{q}, \widetilde{r}) \leq 2\pi.$$

Όμως $\angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{q}, \widetilde{r}) = \pi$, και άρα $\angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{q}, \widetilde{p}) + \angle_{\widetilde{x}}(\widetilde{r}, \widetilde{p}) \leq \pi$. Επιχειρηματολογώντας όπως στην απόδειξη του λήμματος του Alexandrov, βλέπουμε εύκολα ότι

$$|px| = |\widetilde{p}\widetilde{x}| \geq |\bar{p}\bar{x}|,$$

όπου $\bar{\Delta} := \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ είναι κάποιο τρίγωνο σύγκρισης στον M_κ^n για την τριάδα (p, g, r) και $\bar{x}$ είναι το σημείο σύγκρισης για το $x \in qr$ στο $\bar{\Delta}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χωρος. Έστω (p, x, y, z) μία τετράδα σημείων του X με μέγεθος $< 2D_\kappa$. Επιλέγουμε γεωδαισιακές px, py και pz, και για κάθε $0 \leq t \leq 1$ θέτουμε $p_t := (px)_t$. Έπειτα επιλέγουμε γεωδαισιακά τμήματα $p_t x$, $p_t y$ και $p_t z$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$ και θέτουμε $p_t p$ και $p_t x$ τα υποτμήματα του px από το p στα p_t και x αντίστοιχα. Τότε,

$$\begin{aligned}
\angle_{p_t}^{(\kappa)}(x, y) + \angle_{p_t}^{(\kappa)}(y, z) + \angle_{p_t}^{(\kappa)}(x, z) \;&\leq\; \angle(p_t x, p_t y) + \angle(p_t y, p_t z) + \angle(p_t x, p_t z) \\
&\leq\; \big(\angle(p_t x, p_t y) + \angle(p_t y, p_t p)\big) + \big(\angle(p_t p, p_t z) + \angle(p_t z, p_t x)\big) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα και η μόνη ισότητα στον παραπάνω υπολογισμό έπονται από το χαρακτηρισμό 5.1.4 (δ) των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων και η δεύτερη ανισότητα έπεται από την τριγωνική ανισότητα για γωνίες. Αφού οι γωνίες σύγκρισης είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών τους, παίρνοντας όριο καθώς $t \longrightarrow 0$ στην παραπάνω ανισότητα καταλήγουμε στο ζητούμενο. $\square$

Στις δύο επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των μετρικών χώρων φραγμένης καμπυλότητας. Όπως θα δούμε οι ιδιότητες των χώρων άνω φραγμένης καμπυλότητας είναι διαφορετικής υφής από αυτές των χώρων με κάτω φραγμένη καμπυλότητα. Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μία έκφραση της γωνίας Alexandrov που ισχύει σε όλους τους χώρους φραγμένης καμπυλότητας. Η απόδειξη της είναι άμεση.

Πρόταση 5.1.8 *Έστω X χώρος μήκους με καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$. Τότε οι γωνίες Alexandrov υπάρχουν με την αυστηρή έννοια στον X και για κάθε ζευγάρι γεωδαισιακών $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow X$, $\sigma : [0, b] \longrightarrow X$, με αρχή το $\gamma(0) = \sigma(0) = p$, ισχύει ότι*

$$\angle(\gamma, \sigma) = \lim_{t \to 0} 2 \arcsin \frac{1}{2t} d(\gamma_t, \sigma_t).$$

5.2 Βασικές Ιδιότητες των Χώρων Άνω Φραγμένης Καμπυλότητας

Οι πρώτες τέσσερις ιδιότητες των $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων της ακόλουθης πρότασης έχουν αποδειχθεί για κυρτούς μετρικούς χώρους με $D_\kappa = +\infty$.

Πρόταση 5.2.1 *Έστω X $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος. Τότε,*

(α) *Για κάθε $x, y \in X$ με $d(x,y) < D_\kappa$ υπάρχει μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα με άκρα τα x, y, και το γεωδαισιακό αυτό τμήμα εξαρτάται συνεχώς από τα άκρα του.*

(β) *Κάθε τοπική γεωδαισιακή στον X με μήκος $< D_\kappa$ είναι γεωδαισιακή.*

(γ) *Κάθε μπάλα στον X με ακτίνα $< \frac{D_\kappa}{2}$ είναι κυρτή.*

(δ) *Όλες οι μπάλες στον X ακτίνας $< D_\kappa$ είναι συρρικνώσιμες.*

(ε) *Για κάθε $\lambda < D_\kappa$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\kappa, \lambda, \varepsilon) > 0$ τ.ω. για κάθε γεωδαισιακό τμήμα $xy \subseteq X$ με $|xy| < \delta$ να ισχύει ότι*

$$|xm| \vee |ym| \leq \frac{1}{2}|xy| + \delta \implies |mm_{x,y}| < \varepsilon,$$

όπου $m_{x,y}$ είναι το μέσο των x, y.

Απόδειξη (α) Έστω $\gamma, \sigma : [0,1] \longrightarrow X$ δύο γεωδαισιακές από το x στο y και έστω $t \in [0,1]$. Το γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta\big(\sigma([0,1]), \gamma([0,t]), \gamma([t,1])\big)$ έχει περίμετρο $2|xy| < 2D_\kappa$. Έστω $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\gamma_t})$ τρίγωνο σύγκρισης για το Δ στον M^2_κ. Προφανώς το Δ είναι εκφυλισμένο, δηλαδή $\bar{\gamma_t} \in \bar{x}\bar{y}$ αφού $|xy| = |s\gamma_t| + |\gamma_t y|$ και το σημείο σύγκρισης $\bar{\sigma_t}$ για το σ_t στο $\bar{\Delta}$ είναι το $\bar{\gamma_t}$. Έτσι, από την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα έχουμε ότι $|\gamma_t \sigma_t| \leq |\bar{\gamma_t}\bar{\sigma_t}| = 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το xy εξαρτάται συνεχώς από τα άκρα του. Έστω λοιπόν $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες τ.ω. $x_n \longrightarrow x$ και $y_n \longrightarrow y$. Έστω $\ell \in (|xy|, D_\kappa)$. Από την πρόταση 4.5.4 υπάρχει σταθερά $C = C(\kappa, \ell)$ τ.ω. για κάθε γεωδαισιακές $\gamma, \sigma : [0,1] \longrightarrow M^2_\kappa$ με $L(\gamma) \vee L(\sigma) < \ell$ και $\gamma_0 = \sigma_0$ η ανισότητα $|\gamma_t \sigma_t| \leq Ct|x_1 y_1|$ να ισχύει για κάθε $t \in [0,1]$. Αγνοώντας όσους αρχικούς όρους των ακολουθιών (x_n) και (y_n) χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|x_n y_n| \vee |xy_n| < \ell$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$ να υπάρχουν τρίγωνα σύγκρισης $\bar{\Delta}_n = \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y_n})$ και $\widetilde{\Delta}_n = \Delta(\widetilde{x}, \widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ για τα $\Delta(x, y, y_n)$ και $\Delta(x, x_n, y_n)$ αντίστοιχα. Τότε,

$$\begin{aligned}
|(xy)_t (x_n y_n)_t| &\leq |(xy)_t (xy_n)_t| + |(xy_n)_t (x_n y_n)_t| \\
&\leq |(\bar{x}\bar{y})_t (\bar{x}\bar{y_n})_t| + |(\widetilde{x}\widetilde{y_n})_t (\widetilde{x_n}\widetilde{y_n})_t| \\
&\leq C\big(|yy_n| + |xx_n|\big),
\end{aligned}$$

για κάθε $0 \leq t \leq 1$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς οι γεωδαισιακές $x_n y_n$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην xy.

(β) Έστω $\gamma : I \longrightarrow X$ τοπική γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας και μήκους $\ell < D_\kappa$. Όπως στην απόδειξη του αντίστοιχου αποτελέσματος για κυρτούς μετρικούς χώρους θεωρούμε τυχόν υποδιάστημα $[a,b]$ του I και θα αποδείξουμε ότι η $\gamma_{[a,b]}$ είναι γεωδαισιακή. Θέτουμε λοιπόν

$$S := \big\{ r \in [a,b] \;\big|\; \text{η } \gamma|_{[a,r]} \text{ είναι γεωδαισαική} \big\}.$$

Αφού η γ είναι τοπική γεωδαισιακή, το S περιέχει μία ανοικτή περιοχή του a και είναι κλειστό. Για να αποδείξουμε ότι το S είναι ανοικτό, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $r \in S$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $r + \varepsilon \in S$. Έστω λοιπόν $r \in S$. Αφού η γ είναι τοπική γεωδαισιακή, υπάρχει $0 < \varepsilon < (b-r) \wedge (r-a)$ τ.ω. η $\gamma_{[r-\varepsilon, r+\varepsilon]}$ να είναι γεωδαισιακή. Η τριάδα $(\gamma_r, \gamma_a, \gamma_{r+\varepsilon})$ έχει περίμετρο

$$\begin{aligned} |\gamma_a\gamma_r\gamma_{r+\varepsilon}| &\leq 2\big(|\gamma_a\gamma_r| + |\gamma_r\gamma_{r+\varepsilon}|\big) \\ &= 2(r-a+\varepsilon) < 2(b-a) \leq 2\ell \leq 2D_\kappa, \end{aligned}$$

και άρα υπάρχει τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta} := \Delta(\bar{\gamma_r}, \bar{\gamma_a}, \bar{\gamma_{r+\varepsilon}})$ γι' αυτή την τριάδα στον M_κ^2. Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι το $\bar{\Delta}$ είναι εκφυλισμένο, δηλαδή ότι $\bar{\gamma_a}\bar{\gamma_r} \cup \bar{\gamma_r}\bar{\gamma_{r+\varepsilon}} = \bar{\gamma_a}\bar{\gamma_{r+\varepsilon}}$. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε αντίφαση ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε αν $\bar{x} \in \bar{\gamma_a}\bar{\gamma_r}$ και $\bar{y} \in \bar{\gamma_r}\bar{\gamma_{r+\varepsilon}}$ είναι τα σημεία σύγκρισης για τα $x \in \gamma([r-\varepsilon, r]) \subseteq \gamma([a,r])$ και $y \in \gamma([r, r+\varepsilon])$, έχουμε ότι $|\bar{x}\bar{y}| < |\bar{x}\bar{\gamma_r}| + |\bar{\gamma_r}\bar{y}|$. Εφαρμόζοντας τώρα την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ ανισότητα στα σημεία x, y, παίρνουμε ότι

$$|xy| \leq |\bar{x}\bar{y}| < |\bar{x}\bar{\gamma_r}t| + |\bar{\gamma_r}\bar{y}| = |x\gamma_r| + |\gamma_r y| = |xy|,$$

το οποίο είναι άτοπο.
(γ) Έστω $p \in X$, $r < D_\kappa/2$ και $x, y \in D(p,r)$. Από το (α), υπάρχει μοναδικό γεωδαισακό τμήμα που συνδέει τα x, y. Πρέπει να δείξουμε ότι $xy \subseteq D(p,r)$. Έστω $z \in xy$. Επιλέγουμε τρίγωνο σύγκρισης $\bar{\Delta} := \Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ στον M_κ^2. Έστω $\bar{z} \in \bar{x}\bar{y}$ το σημείο σύγκρισης για το z στο $\bar{\Delta}$. Όπως ξέρουμε, οι μπάλες με ακτίνα $< D_\kappa/2$ είναι κυρτές στον M_κ^n και άρα $\bar{x}\bar{y} \subseteq D(\bar{p}, r)$. Έτσι, από την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα, έχουμε ότι $|pz| \leq |\bar{p}\bar{z}| < r$.
(δ) Έστω $p \in X$ και $r < D_\kappa$. Από το (α), για κάθε $x \in D(p,r)$ υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή xp από το x στο p και η απεικόνιση $F : [0,1] \times X \longrightarrow X$ με τύπο $F(t,x) = (xp)_t$ είναι ομοτοπία από την $id_{D(p,r)}$ στη σταθερή απεικόνιση $c_p : D(p,r) \longrightarrow \{p\}$. Άρα η $D(p, D_\kappa)$ είναι συρρικνώσιμη.
(ε) Στο λήμμα 4.4.3 το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στην περίπτωση όπου $X = M_\kappa^n$. Η περίπτωση που ο X είναι ένας οποιοσδήποτε $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος έπεται από αυτή την ειδική περίπτωση και την $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-ανισότητα για το τρίγωνο $\Delta(x, y, m)$. □

Πόρισμα 5.2.1 *Κάθε $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος με $\kappa \leq 0$ είναι συρρικνώσιμος και άρα απλά συνεκτικός.*

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα επικεντρωθούμε στους $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρους. Η ακόλουθη πρόταση οφείλεται στον Reshetnyak και χρησιμοποιήθηκε εκτενώς από τους Korevaar και Schoen, [12], στη μελέτη τους πάνω στις αρμονικές συναρτήσεις με τιμές σε μετρικούς χώρους.

Πρόταση 5.2.2 (Σύγκριση παραλληλογράμμου) *Έστω X $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Τότε για κάθε $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$, έχουμε ότι*

$$|x_1x_2|^2 + |y_1y_2|^2 \leq |x_1y_1|^2 + |x_2y_2|^2 + 2|x_1y_2||y_1x_2|.$$

Απόδειξη Ο X είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και άρα υπάρχει υπο-εμβύθιση $(\bar{x_1}, \bar{y_1}, \bar{x_2}\bar{y_2})$ στον $\mathbb{E}^2$ για την τετράδα (x_1, y_1, x_2, y_2). Θέτουμε

$$A = \bar{y_1} - \bar{x_1},\ B = \bar{x_2} - \bar{y_1},$$

$$C = \bar{y_2} - \bar{x_2},\ D = \bar{x_1} - \bar{y_2}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}|x_1x_2|^2+|y_1y_2|^2 &\leq |\bar{x_1}\bar{x_2}|^2+|\bar{y_1}\bar{y_2}|^2=\|A+B\|^2+\|B+C\|^2\\ &= \|A\|^2+\|C\|^2+2\|B\|^2+2\langle A,B\rangle+2\langle B,C\rangle\\ &= \|A\|^2+\|C\|^2+2\langle B,A+B+C\rangle\\ &= \|A\|^2+\|C\|^2-2\langle B,D\rangle\\ &\leq |x_1y_1|^2+|x_2y_2|^2+2|x_1y_2||y_1x_2|.\end{aligned}$$

Πρόταση 5.2.3 *Έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και C κυρτό και κλειστό υποσύνολο του X. Τότε*

(α) *Υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\pi_C : X \longrightarrow C$, η οποία λέγεται ορθογώνια προβολή στο C, τ.ω.*
$$d(\pi_C(x),x)=d(x,C):=\inf_{z\in C} d(z,x).$$

(β) *Αν το y ανήκει στο γεωδαισιακό τμήμα $[x,\pi_C(x)]$, τότε $\pi_C(y)=\pi_C(x)$.*

(γ) *Για κάθε $x\in X$ και $z\in C$, ισχύει ότι $d^2(x,z)\geq d^2\big(x,\pi_C(x)\big)+d^2\big(\pi_C(x),z\big)$.*

(δ) *Για κάθε $x\notin C$ και κάθε $z\in C$ με $z\neq \pi_C(x)$, ισχύει ότι $\angle_{\pi_C(x)}(x,z)\geq \frac{\pi}{2}$.*

(ε) *Η απεικόνιση π_C είναι συστολή και deformation retraction του X στο C, (δηλαδή υπάρχει ομοτοπία από την id_X στην π_C).*

Απόδειξη (α) Για κάθε $x\in X$, η απεικόνιση $d_x^2 : C\longrightarrow [0,\infty)$ είναι 1-κυρτή και ορίζεται στον πλήρη γεωδαισιακό χώρο C. Έχει, λοιπόν, μοναδικό σημείο ελαχίστου $\pi_C(x)$ στο C. Η $X\ni x\mapsto \pi_C(x)\in C$ είναι η ζητούμενη απεικόνιση.
(β) Πρέπει να αποδείξουμε ότι $d(\pi_C(x),y)=d(y,C)$. Αφού $y\in[x,\pi_C(x)]$, έχουμε ότι

$$d(x,C)=d(x,y)+d(y,C),$$

για κάθε $x,y\in X$, και άρα

$$d(\pi_C(x),y)=d(\pi_C(x),x)-d(x,y)=d(x,C)-d(x,y)=d(y,C)$$

όπως ζητούσαμε.
(γ) Έστω $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$ γεωδαισιακή που συνδέει τα $\pi_C(x),z$. Από την κυρτότητα του C έχουμε ότι $\mathrm{Im}\gamma\subseteq C$ και άρα για κάθε $0\leq t\leq 1$,

$$d^2(x,\pi_C(x))\leq d^2(x,\gamma_t)\leq (1-t)d^2(\pi_C(x),x)+td^2(z,x)-t(1-t)d^2(\pi_C(x),z).$$

Συνεπώς για κάθε $0<t\leq 1$,

$$d^2(\pi_C(x),x)+(1-t)d^2(\pi_C(x),z)\leq d^2(x,z).$$

(δ) Έστω $(x_t),(z_t)$, $0\leq t\leq 1$ τα γεωδαισιακά τμήματα που συνδέουν τα σημεία $x_0=\pi_C(x),x_1=x$ και $z_0=\pi_C(x),z_1=z$ αντίστοιχα. Τότε από την πυθαγόρεια ανισότητα του (γ), έχουμε ότι

$$\cos\angle_{\pi_C(x)}(x,z)=\lim_{t\to 0}\frac{d^2(x_t,\pi_C(x))+d^2(\pi_C(x),z_t)-d^2(x_t,z_t)}{2d(x_t,\pi_C(x))d(\pi_C(x),z_t)}\leq 0.$$

Συνεπώς $\angle_{\pi_C(x)}(x,z)\geq \arccos(0)=\frac{\pi}{2}$.

(ε) Θα δείξουμε πρώτα ότι η π_C είναι συστολή. Έστω, λοιπόν, $x, y \in X$. Αν $\pi_C(x) = \pi_C(y)$, τότε το ζητούμενο είναι προφανές. Αλλιώς, προσθέτοντας τις πυθαγόρειες ανισότητες για τα τρίγωνα $(\pi_C(x), \pi_C(y), y)$ και $(x, \pi_C(x), \pi_C(y))$ έχουμε ότι

$$2d^2(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d^2(\pi_C(x), y) + d^2(x, \pi_C(y)) - d^2(x, \pi_C(x)) - d^2(y, \pi_C(y)) \quad (5.10)$$

και από σύγκριση παραλληλογράμμου, η δεξιά πλευρά της (5.10) είναι μικρότερη ή ίση από

$$2d(x, y)d(\pi_C(x), \pi_C(y)).$$

Συνεπώς $d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y)$ όπως θέλαμε. Έστω τώρα $H : [0, 1] \times X \longrightarrow X$ η απεικόνιση με τύπο $H(t, x) = [x, \pi_C(x)](t)$. Προφανώς $H_0 = id_X$ και $H_1 = \pi_C$. Αφού οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, η συνέχεια της π_C συνεπάγεται τη συνέχεια της H. Συνεπώς η H είναι ομοτοπία από την id_X στην π_C. Επιπλέον, από την κυρτότητα της d, η $H_t : X \longrightarrow X$ είναι συστολή για κάθε $0 \leq t \leq 1$. □

5.3 Βασικές Ιδιότητες των Χώρων Κάτω Φραγμένης Καμπυλότητας

Ορισμός 5.3.1 Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Θα λέμε ότι οι γεωδαισιακές στον X δε διακλαδίζονται, αν όποτε δύο γεωδαισιακά τμήματα xy και xz στον X έχουν καποιο κοινό αρχικό τμήμα, τότε είναι και τα δύο υποτμήματα κάποιου γεωδαισιακού τμήματος.

Πρόταση 5.3.1 *Έστω (X, d) γεωδαισακός χώρος. Οι γεωδαισιακές στον X δεν διακλαδίζονται ανν για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύει η συνεπαγωγή:*

$$\mathrm{midp}(x, y) \cap \mathrm{midp}(x, z) \neq \emptyset \implies y = z.$$

Απόδειξη ($\Longrightarrow$) Έστω $x, y, z \in X$ και έστω $m \in X$ κάποιο μέσο και των x, y και των x, z. Αφού ο X είναι γεωδαισιακός, υπάρχουν γεωδαισιακά τμήματα xm, my και mz. Τότε οι $xm \cup my$ και $xm \cup mz$ είναι γεωδασιακές και έχουν κοινό αρχικό τμήμα, το xm. Αφού οι γεωδαισιακές στον X δεν διακλαδίζονται, έπεται ότι $y = z$.
($\Longleftarrow$) Καταρχάς θα δείξουμε ότι αν δύο γεωδαισιακά τμήματα xy και xz με $|xy| \leq |xz|$ έχουν κάποιο κοινό αρχικό υποτμήμα xq, τότε για κάθε $q' \in xy$ με $|xq'| \leq 2|xq|$ το υποτμήμα xq' του xy περιέχεται στο xz. Πράγματι, έστω $u \in xq'$. Θέτουμε $w \in xz$ το μοναδικό σημείο του xz με $|xw| = |xu|$. Έστω m το μέσο των x, u που ανήκει στο xq'. Προφανώς $m \in xq$ και άρα το m είναι επίσης μέσο των x, w. Συνεπώς $u = w \in xz$. Δεδομένων τώρα δύο γεωδαισιακών τμημάτων xy και xz στον X με κοινό αρχικό υποτμήμα, εφαρμόζοντας την παραπάνω παρατήρηση πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε τελικά ότι $xy \subseteq xz$. □

Πρόταση 5.3.2 *Έστω X μετρικός χώρος καμπυλότητας $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(α) *Οι γεωδασιακές στον X δε διακλαδίζονται.*

(β) *Αν η γωνία Alexandrov μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων που εκκινούν από το ίδιο σημείο είναι 0, τότε το ένα είναι υποτμήμα του άλλου.*

(γ) *Αν δύο γεωδαισιακά τμήματα έχουν δύο κοινά σημεία, τότε τα σημεία αυτά είναι τα άκρα τους.*

(δ) *Για κάθε γεωδαισιακές* $\gamma, \gamma', \gamma'' : [0,1] \longrightarrow X$ *με* $\gamma_0 = \gamma'_0 = \gamma''_0$, *έχουμε ότι*

$$\angle(\gamma, \gamma') + \angle(\gamma', \gamma'') + \angle(\gamma'', \gamma) \leq 2\pi.$$

Απόδειξη (α) Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε αντίφαση ότι υπάρχουν γεωδαισιακά τμήματα xy και xz στον X που διακλαδίζονται. Έστω γ, σ οι παραμετρίσεις των xy και xz, αντίστοιχα, με το μήκος τους. Αφού τα xy και xz διακλαδίζονται, ο αριθμός

$$t_0 := \sup\left\{t \geq 0 \,\middle|\, \gamma|_{[0,t]} \equiv \sigma|_{[0,t]}\right\} > 0,$$

είναι καλά ορισμένος. Αφού ο X έχει καμπυλότητα $\geq \kappa$, υπάρχει $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-περιοχή V του $p = \gamma_{t_0}$. Έστω xp, py και pz τα υποτμήματα των xy και xz. Επιλέγουμε $x_1 \in V \cap xp$, $x_2 \in V \cap py$ και $x_3 \in pz$ τ.ω. τα p, x_1, x_2, x_3 να είναι όλα διαφορετικά. Τότε

$$\begin{aligned} \angle_p^{(\kappa)}(x_1, x_2) + \angle_p^{(\kappa)}(x_1, x_3) + \angle_p^{(\kappa)}(x_2, x_3) &= \pi + \pi + \angle_p^{(\kappa)}(x_2, x_3) \\ &> 2\pi, \end{aligned}$$

το οποίο αντιφάσκει με το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρων.
(β) Από το (α), αρκεί να δείξουμε ότι αν η γωνία Alexandrov μεταξύ δύο γεωδαισιακών $\gamma, \gamma' : [0, \ell] \longrightarrow X$ μοναδιαίας ταχύτητας είναι 0, τότε συμπίπτουν σε μία περιοχή του 0. Έστω λοιπόν $\gamma, \gamma' : [0, \ell] \longrightarrow X$ γεωδαισιακές με αρχή το $p = \gamma(0) = \gamma'(0)$ και γωνία $\angle(\gamma, \gamma') = 0$. Αφού ο X έχει καμπυλότητα $\geq \kappa$, υπάρχει $\varepsilon \in (0, D_\kappa/2)$ τ.ω. η μπάλα $D(p, \varepsilon)$ να είναι $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρος. Για κάθε $t < \varepsilon/2$, κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο με κορυφές p, γ_t, γ'_t περιέχεται στην μπάλα $D(p, \varepsilon)$ και έχει περίμετρο $< 2D_\kappa$. Έτσι, από το χαρακτηρισμό 5.1.4 (δ) των $\underline{\text{CAT}}(\kappa)$-χώρων, έχουμε ότι για κάθε $0 < t < \varepsilon/2$,

$$\angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t, \gamma'_t) \leq \angle(\gamma, \gamma') = 0.$$

Από το νόμο των συνημιτόνων, συνεπάγεται ότι $\gamma|_{[0,\frac{\varepsilon}{2})} \equiv \gamma'|_{[0,\frac{\varepsilon}{2})}$. Παραδείγματος χάριν, αν $\kappa < 0$ και $0 < t < \varepsilon/2$, τότε

$$1 = \cos\angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t, \gamma'_t) = \frac{\cosh^2(t\sqrt{-\kappa}) - \cosh(|\gamma_t\gamma'_t|\sqrt{-\kappa})}{\sinh^2(t\sqrt{-\kappa})},$$

από όπου έπεται ότι $|\gamma_t\gamma'_t| = 0$.
(γ) Θα δείξουμε πρώτα ότι αν δύο γεωδαισιακά τμήματα pq και pq' με τουλάχιστον ένα κοινό σημείο, ας πούμε το p, έχουν κάποιο άλλο κοινό σημείο $x \in pq \cap pq'$, τότε είτε το ένα περιέχεται στο άλλο, είτε $x = q = q'$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι είτε $x \neq q$ είτε $x \neq q'$, και να δείξουμε ότι $pq \subseteq pq'$ ή $pq' \subseteq pq$. Έστω λοιπόν $x \in pq \cap pq'$, $x \neq p$ τ.ω. $x \neq q$ ή $x \neq q'$. Παρατηρούμε ότι αν $x = q$, τότε το $pq \cup qq'$ είναι γεωδαισιακό τμήμα, όπου qq' είναι το υποτμήμα του pq', και έχει κοινό αρχικό τμήμα με το $q'p$. Έπεται από το (α) ότι $pq \subseteq pq \cup qq' = pq'$. Ομοίως αν $x = q'$ τότε $pq' \subseteq pq$. Υποθέτουμε τέλος ότι $x \neq q$ και $x \neq q'$. Έστω px το υποτμήμα του pq που συνδέει τα p, x. Τα $px \cup xq$ και $px \cup xq'$ είναι γεωδαισιακά τμήματα με κοινό αρχικό τμήμα το px, όπου φυσικά τα xq και xq' είναι υποτμήματα των pq και pq'. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να

υποθέσουμε ότι $|xy| \leq |xq'|$. Από το (α) έχουμε ότι $xq \subseteq xq'$. Αν τώρα $(px)'$ είναι το υποτμήμα του pq που συνδέει τα p, x, τότε τα pq και $(px)' \cup xq$ είναι γεωδαισιακά τμήματα με κοινό αρχικό τμήμα, το οποίο από το (α) δείχνει ότι $px = (px)'$.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα pq και pq' είναι δύο γεωδαισιακά τμήματα με δύο κοινά σημεία, τα x, y. Εφαρμόζοντας την παραπάνω παρατήρηση στα υποτμήματα xq και xq' των pq και $p'q'$ αντίστοιχα, έπεται ότι $y = q = q'$, και ξαναεφαρμόζοντας αυτή την παρατήρηση στα γεωδαισιακά τμήματα qp και qp', έπεται ότι $x = p = p'$.
(δ) Έπεται άμεσα από το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων και το γεγονός ότι στον ορισμό της γωνίας Alexandrov μπορούμε να πάρουμε γωνίες σύγκρισης σε οποιονδήποτε από τους χώρους μοντέλα M^n_κ. $\square$

Λήμμα 5.3.1 *Έστω X μετρικός χώρος καμπυλότητας $\geq \kappa$ και έστω $x_1y_1 \subseteq X$ γεωδαισιακό τμήμα. Για κάθε $z \notin x_1y_1$ θέτουμε*

$$I_z := \big\{p \in x_1y_1 \,|\, d(p,z) = d(x_1y_1, z)\big\}.$$

Έστω $z_1 \in X$ και $p_0 \in I^o_{z_1} := I_{z_1} \setminus \{x_1, y_1\}$. Θέτουμε $x, y : [0,1] \longrightarrow X$ τις γεωδαισιακές που παραμετρίζουν τα υποτμήματα p_0x_1 και p_0y_1 των x_1y_1 αντίστοιχα. Τότε

$$\angle(x,z) = \angle(y,z) = \frac{\pi}{2},$$

για κάθε γεωδαισιακή $z \in C(p_0, z_1)$.

Απόδειξη Έστω $z \in C(p_0, z_1)$ μια γεωδαισιακή. Καταρχάς, αφού το p_0 είναι εσωτερικό σημείο του x_1y_1 και ο X έχει καμπυλότητα $\geq \kappa$, έχουμε ότι

$$\angle(x,z) + \angle(z,y) = \pi,$$

και άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $\angle(x,z), \angle(y,z)$ είναι φραγμένες, είτε από πάνω είτε από κάτω, από $\pi/2$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $p_0 \in I_{z_t}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Πράγματι, αν για κάποιο $t \in [0,1]$ είχαμε ότι $p_0 \notin I_{z_t}$, τότε θα υπήρχε $p'_0 \in I_{z_t}$ τ.ω. $d(p'_0, z_t) = d(x_1y_1, z_t) < d(p_0, z_t)$, και άρα θα είχαμε ότι

$$|p'_0z_1| \leq |p'_0z_t| + |z_tz_1| < |p_0z_t| + |z_tz_1| = |p_0z_1|,$$

το οποίο αντιφάσκει με τον ορισμό του p_0.

Για κάθε $s \in [0,1]$ θέτουμε $x^{(s)} : [0,1] \longrightarrow X$ τη γεωδαισιακή που παραμετρίζει το υποτμήμα p_0x_s του p_0x_1. Σύμφωνα με τις βασικές ιδιότητες των γωνιών Alexandrov, έχουμε ότι $\angle(x,z) = \angle(x^{(s)}, z)$ για κάθε $s \in [0,1]$. Αφού ο X έχει φραγμένη καμπυλότητα, οι γωνίες Alexandrov στον X υπάρχουν με την αυστηρή έννοια και άρα $\angle(x,z) = \angle(x^{(s)}, z) = \lim_{t\to 0} \overline{\angle}_{p_0}(x^{(s)}_t, z_t)$ για κάθε $s \in [0,1]$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $p_0 \in I_{z_t}$ για κάθε $t \in [0,1]$ βλέπουμε ότι για κάθε $s, t \in [0,1]$,

$$\cos \overline{\angle}_{p_0}(x^{(s)}_t, z_t) = \frac{|p_0x^{(s)}_t|^2 + |p_0z_t|^2 - |x^{(s)}_tz_t|^2}{2|p_0x^{(s)}_t||p_0z_t|} \leq \frac{s}{2}\frac{|p_0x_1|}{|p_0z_1|}.$$

Έπεται ότι $\cos\angle(x,z) \leq 0$ και άρα $\angle(x,z) \geq \pi/2$. Ομοιώς, $\angle(y,z) \geq \pi/2$. $\square$

Πρόταση 5.3.3 *Έστω X γεωδαισιακός* $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$*-χώρος για κάποιο $\kappa > 0$. Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

(α) $X = \mathbb{R}$

(β) $X = [0, \infty)$ ή $X = (0, \infty)$.

(γ) $X = [0, \ell]$ ή $X = [0, \ell)$ ή $X = (0, \ell)$, $\ell > D_\kappa$.

(δ) $X = \ell \cdot \mathbb{S}^1$, $\ell > D_\kappa / \pi$.

(ε) $\mathrm{diam} X \leq D_\kappa$.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι κανένα από τα (α) έως (ε) δεν ισχύει κια θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω λοιπόν $x, y \in X$ τ.ω. $|xy| > D_\kappa$. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|xy| = D_\kappa + \varepsilon/\sqrt{\kappa}$, για κάποιο $\varepsilon \in (0, \pi/4)$. Έστω xy γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα x, y και έστω m το μέσο του. Θέτουμε $U := D(m, \varepsilon/3\sqrt{\kappa})$ και θεωρούμε δύο περιπτώσεις.
(i) $U \setminus xy = \emptyset$: Αφού οι γεωδαισιακές στον X δε διακλαδίζονται, υπάρχουν μοναδικές γεωδαισιακές $\gamma_x : I \longrightarrow X$, $\gamma_y : J \longrightarrow X$ μοναδιαίας ταχύτητας με αρχικά τμήματα mx και my αντίστοιχα, όπου τα διαστήματα I, J είναι της μορφής $[0, \ell)$, $[0, \ell]$, $\ell > 0$ ή $[0, \infty)$. Αφού $U \setminus xy = \emptyset$, για κάθε $p \in X$, η γεωδαισιακή που συνδέει το m με το p πρέπει υποχρεωτικά να έχει κοινό αρχικό τμήμα είτε με το mx είτε με το my. Αφού, όμως, οι γεωδαισιακές στον X δεν διακλαδίζονται, αυτό συνεπάγεται ότι $p \in mp \subseteq \mathrm{Im}\gamma_x \cup \mathrm{Im}\gamma_y$ και άρα $X = \mathrm{Im}\gamma_x \cup \mathrm{Im}\gamma_y$. Όπως μπορεί εύκολα να ελέγξει ο αναγνώστης, αυτό έχει ως συνέπεια ότι ο X είναι κάποιος από τους μονοδιάστατους ιδιάζοντες χώρους των (α) έως (δ), ανάλογα με τη μορφή των διαστημάτων I, J. Αφού, όμως, έχουμε υποθέσει ότι κανένα από τα (α) εώς (δ) δεν ισχύει, αυτό είναι άτοπο.
(ii) $U \setminus xy \neq \emptyset$: Έστω $z \in U \setminus xy$. Τότε

$$I_z := \big\{p \in xy \,\big|\, d(p, z) = d(xy, z)\big\} \subseteq D\big(m, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{\kappa}}\big),$$

αφού αν $p \in I_z$ τότε $|pm| \leq |pz| + |zm| \leq 2|zm| < \varepsilon/3\sqrt{\kappa}$. Επίσης, για κάθε $p \in I_z$ έχουμε ότι

$$|px| \wedge |py| = \frac{D_\kappa}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}} - \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\kappa}} > \frac{D_\kappa}{2}.$$

Έστω $p \in I_z$ και έστω pz γεωδαισιακό τμήμα από το p στο z. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι

$$\angle(px, pz) = \angle(py, pz) = \frac{\pi}{2},$$

όπου τα τμήματα px, py είναι υποτμήματα του xy. Η τριάδα (p, y, z) έχει περίμετρο

$$\begin{aligned} |pyz| \leq 2(|pz| + |py|) \quad &\leq \quad 2\Big(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\kappa}} + \frac{D_\kappa}{2} + \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\kappa}}\Big) \\ &< \quad \frac{\pi}{12\sqrt{\kappa}} + D_\kappa + \frac{2\pi}{12\sqrt{\kappa}} = \big(1 + \frac{1}{4}\big)D_\kappa < 2D_\kappa, \end{aligned}$$

και άρα υπάρχει τρίγωνο σύγκρισης $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{z})$ για την (p, y, z) στον M^2_κ. Αφού ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος, έπεται ότι

$$\angle^{(\kappa)}_p(z, y) \leq \angle(pz, py) = \frac{\pi}{2}.$$

Έτσι, αφού $|\bar{p}\bar{y}| = |py| > D_\kappa/2$, έπεται ότι $|\bar{z}\bar{y}| \leq |\bar{p}\bar{y}|$. Πράγματι, αν τοποθετήσουμε το $\bar{y}$ στο νότιο πόλο του M_κ^2, τότε από την ανισότητα $\angle_p^{(\kappa)}(z,y) \leq \pi/2$ έπεται ότι το μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα γ που διέρχεται από το $\bar{z}$ εκκινώντας απότο $\bar{p}$ βρίσκεται ολόκληρο πάνω από το μέγιστο κύκλο δ που διέρχεται από το $\bar{p}$ κάθετα στο μεσημβρινό $\bar{y}\bar{p}$. Όμως το $\bar{p}$ έχει τη μέγιστη απόσταση από το $\bar{y}$ από όλα τα σημεία του μέγιστου κύκλου δ και άρα $|\bar{p}\bar{y}| > |\bar{z}\bar{y}|$. Συνεπώς $|py| > |zy|$ και ομοίως δείχνουμε ότι $|px| > |zx|$. Όμως, τότε,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,p) + d(p,y),$$

το οποίο αντιφάσκει με το ότι $p \in xy$. □

Στο άρθρο [6], στο οποίο βασίζονται τα περισσότερα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου, για $\kappa > 0$ απαιτείται επιπλέον, στον ορισμό των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, η συνθήκη $\mathrm{diam}X \leq D_\kappa$. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι μονοδιάστατοι χώροι των (α) έως (δ) είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώροι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, για να αποδείξουμε το αντίστοιχο της πρότασης 5.1.2 για γεωδαισιακούς $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους, $\kappa > 0$, αρκεί να το αποδείξουμε για χώρους με διάμετρο $\leq D_\kappa$. Η απόδειξη βασίζεται στην επόμενη πρόταση. Πριν την διατυπώσουμε θα κάνουμε μία σύμβαση σχετικά με τα τρίγωνα σύγκρισης. Όπως ξέρουμε, για $\kappa > 0$, αν (p,x,y) είναι μία τριάδα σημείων του X με $|pxy| = 2D_\kappa$ και $|xy| = D_\kappa$, τότε αυτή δεν έχει μοναδικό τρίγωνο σύγκρισης στον M_κ^2. Σ' αυτή την περίπτωση κάνουμε τη σύμβαση ότι $\angle_p^{(\kappa)}(x,y) = \pi$, $\angle_x^{(\kappa)}(p,y) = 0$ και $\angle_y^{(\kappa)}(p,x) = 0$. Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι στην περίπτωση όπου $|px| \vee |py| \vee |xy| < D_\kappa$ έχουμε ότι $\angle_p^{(\kappa)}(x,y) = \angle_x^{(\kappa)}(p,y) = \angle_y^{(\kappa)}(p,x) = \pi$.

Πρόταση 5.3.4 *Έστω X $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος για κάποιο $\kappa > 0$ με διάμετρο $\leq D_\kappa$. Τότε κάθε τριάδα στον X έχει περίμετρο $\leq 2D_\kappa$ και η $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη της πρότασης 5.1.7 ικανοποιείται επίσης από τετράδες μεγέθους $2D_\kappa$.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε πρώτα το δεύτερο ισχυρισμό. Έστω (p,x,y,z) μία τετράδα σημείων στον X μεγέθους $2D_\kappa$. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι

$$\angle_p^{(\kappa)}(x,y) + \angle_p^{(\kappa)}(y,z) + \angle_p^{(\kappa)}(z,x) > 2\pi. \tag{5.11}$$

Τότε υποχρεωτικά $\max\{|px|,|py|,|pz|\} < D_\kappa$. Πράγματι, αν παραδείγματος χάριν $|px| = D_\kappa$, τότε $|pxy| = 2D_\kappa$ και $|py| + |yx| = D_\kappa$ και άρα $\angle_p^{(\kappa)}(x,y) = 0$, το οποίο αντιφάσκει με την (5.11). Θα δείξουμε ότι μετά από το πολύ τρία βήματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε από την (p,x,y,z) μία τετράδα μεγέθους $< 2D_\kappa$ η οποία δεν ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, το οποίο είναι άτοπο. Ξεκινάμε από τη χειρότερη περίπτωση:
(I) $|pxy| = |pyz| = |pzx| = 2D_\kappa :$ θα κατασκευάσουμε μία τετράδα (p',x',y',z') η οποία δεν ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, με το πολύ δύο τριάδες με περίμετρο $= 2D_\kappa$. Έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ γεωδαισιακή από το p στο x. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) $\sup\big\{t \in [0,1] \,\big|\, |p\gamma_t y| < 2D_\kappa\big\} = \sup\big\{t \in [0,1] \,\big|\, |p\gamma_t z| < 2D_\kappa\big\} :$ Καταρχάς παρατηρούμε ότι τα παραπάνω supremum είναι πραγματικοί αριθμοί, αφού

$$|p\gamma_t y| \vee |p\gamma_t z| \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 2\big(|py| \vee |pz|\big) < 2D_\kappa.$$

Αν $t_0 \in [0,1]$ είναι η τιμή των παραπάνω supremum, τότε $|p\gamma_{t_0} y| = |p\gamma_{t_0} z| = 2D_\kappa$ και άρα

$$\angle_p^{(\kappa)}(\gamma_{t_0}, y) = \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_{t_0}, z) = \angle_p^{(\kappa)}(y,z) = \pi.$$

Οι συναρτήσεις $[0,1] \ni t \mapsto \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t, y)$ και $[0,1] \ni t \mapsto \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t, z)$ είναι συνεχείς, και άρα αν το $t \in [0, t_0]$ είναι αρκετά κοντά στο t_0, τότε η τετράδα (p, γ_t, y, z) έχει μέγεθος $= 2D_\kappa$, δεν ικανοποιεί την $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη 5.1.7, και οι τριάδες της (p, γ_t, y) και (p, γ_t, z) έχουν μέγεθος $< 2D_\kappa$.
(ii) $\sup\{t \in [0,1] \,\big|\, |p\gamma_t y| < 2D_\kappa\} < \sup\{t \in [0,1] \,\big|\, |p\gamma_t z| < 2D_\kappa\}$: Έστω t_0 το μικρότερο από τα δύο αυτά supremum. Τότε $|p\gamma_{t_0} y| = 2D_\kappa$ και $|p\gamma_{t_0} z| < 2D_\kappa$. Άρα

$$\angle_p^{(\kappa)}(\gamma_{t_0}, y) = \angle_p^{(\kappa)}(y, z) = \pi, \quad \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_{t_0}, z) = 0,$$

το οποίο δείχνει ότι η τετράδα (p, γ_{t_0}, y, z) έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Έτσι σε κάθε περίπτωση μπορούμε να κατασκευάσουμε από την (p, z, y, z) μία τετράδα στον X, η οποία δεν ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων και έχει τουλάχιστον μία τριάδα με περίμετρο $< 2D_\kappa$.
(II) $|pyz| = |pzx| = 2D_\kappa$, $|pxy| < 2D_\kappa$: Όπως προηγουμένως, μπορούμε να βρούμε $t \in [0,1]$ τ.ω.

$$|p\gamma_t z| < 2D_\kappa, \quad \angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t, z) > \pi - \angle_p^{(\kappa)}(x, y).$$

Αφού $|pxy| < 2D_\kappa$, από το χαρακτηρισμό 5.1.4 (γ) των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, έχουμε ότι $\angle_p^{(\kappa)}(\gamma_t, y) \geq \angle_p^{(\kappa)}(x, y)$. Συνεπώς η τετράδα (p, γ_t, y, z) δεν ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων, και το μέγεθος της $2D_\kappa$ πιάνεται μόνο από μία από τις τριάδες της.
(III) $|pzx| = 2D_\kappa$, $|pxy| \vee |pyz| < 2D_\kappa$: Εύκολα βρίσκουμε $t \in [0,1]$ τ.ω. η τετράδα (p, γ_t, y, z) να έχει μέγεθος $< 2D_\kappa$ και να μην ικανοποιεί το χαρακτηρισμό 5.1.7 των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων.

Θα αποδείξουμε τώρα τον πρώτο ισχυρισμό: Υποθέτουμε ότι υπάρχει τριάδα (p, q, r) στον X με περίμετρο $> 2D_\kappa$. Η περίμετρος της (p, q, r) εξαρτάται συνεχώς από τις κορυφές της και έτσι αφού $\mathrm{diam} X \leq 2D_\kappa$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\max\{|pq|, |pr|, |qr|\} < D_\kappa$. Διαλέγουμε σημείο x σε κάποιο γεωδαισιακό τμήμα qr τ.ω.

$$2D_\kappa < |pxr| < |pqr|, \quad |pqx| < 2D_\kappa,$$

και έπειτα διαλέγουμε σημείο y σε κάποιο γεωδαισιακό τμήμα px τ.ω. $|yxr| = 2D_\kappa$. Τότε $|xq| < |xy|$. Πράγματι, αν ίσχυε ότι $|xq| \geq |xy|$, τότε θα είχαμε ότι

$$2D_\kappa = |yxr| = |xy| + |xr| + |yr| \leq |qr| + |ry| < 2D_\kappa,$$

το οποίο είναι άτοπο. Από τον ορισμό των x, y, η τετράδα (x, q, y, r) έχει μέγεθος $\leq 2D_\kappa$ και έτσι από το προηγούμενο βήμα της απόδειξης έχουμε ότι

$$\angle_p^{(\kappa)}(q, y) + \angle_p^{(\kappa)}(y, r) + \angle_p^{(\kappa)}(q, r) \leq 2\pi.$$

Προφανώς $\angle_x^{(\kappa)}(q, r) = \pi$. Επιπλέον, αφού $|xyr| = 2D_\kappa$ και $|xr| \vee |xy| < D_\kappa$, έχουμε ότι $\angle_x^{(\kappa)}(y, r) = \pi$, και άρα $\angle_x^{(\kappa)}(q, y) = 0$, το οποίο δείχνει ότι $|qx| + |xy| = |qy|$. Το x λοιπόν ανήκει σε κάποιο γεωδαισιακό τμήμα qy, το οποίο από την πρόταση 5.3.2 (γ) συνεπάγεται ότι είτε $x = y = r$, το οποίο είναι άτοπο, είτε $qr \subseteq qy$, είτε $qy \subseteq qr$. Αν $qr \subseteq qy$, τότε $|xr| + |ry| = |xy|$, το οποίο είναι άτοπο, αφού αλλιώς θα είχαμε ότι

$$2D_\kappa = |xyr| = |xy| + |yr| + |xr| = 2|xy| < 2D_\kappa.$$

Τέλος, αν $qy \subseteq qr$, τότε $y \in qr$, το οποίο είναι επίσης άτοπο. $\square$

Πρόταση 5.3.5 *Έστω X γεωδαισιακός χώρος.*

(α) *Αν ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος και $\lambda \leq \kappa$, τότε ο X είναι και $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος.*

(β) *Αν ο X είναι $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$-χώρος για κάθε $\kappa < \lambda$, τότε είναι επίσης και $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος.*

Απόδειξη Εκτός από την απόδειξη του (α) για $\kappa > 0$, η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του αντίστοιχου αποτελέσματος για $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρους. Εξετάζουμε λοιπόν μόνο αυτή την περίπτωση. Όπως έχουμε δει, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{diam}X \leq D_\kappa$, και σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο στον X με περίμετρο $2D_\kappa$ ικανοποιεί την $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$ συνθήκη 5.1.4 (δ). Έστω, λοιπόν, $\Delta = \Delta(px, py, xy)$ γεωδαισιακό τρίγωνο με περίμετρο $2D_\kappa$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) $|px| + |py| = |xy| = D_\kappa$: Σ' αυτή την περίπτωση $p \in xy$ και άρα $\angle(px, py) = \pi$ και $\angle(xp, xy) = \angle(yp, yx) = 0$. Όμως, προφανώς για κάθε $\lambda < \kappa$, έχουμε ότι $\angle_p^{(\lambda)}(x, y) = \pi$, $\angle_x^{(\lambda)}(p, y) = \angle_y^{(\lambda)}(p, x) = 0$, και άρα το Δ ικανοποιεί την $\underline{\mathrm{CAT}}(\lambda)$ συνθήκη 5.1.4 (δ) για κάθε $\lambda < \kappa$.
(ii) $|px| \vee |py| \vee |xy| < D_\kappa$: Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\angle_p^{(\lambda)}(x, y) \leq \angle(px, py).$$

Έστω $(x_t)_{t\in[0,1]}$, $(y_t)_{t\in[0,1]}$, οι παραμετρίσεις των τμημάτων px και py με αρχή το p. Για κάθε $t < 1$,

$$|px_t y_t| < |pxy| = 2D_\kappa,$$

και άρα από το πόρισμα 4.5.2 και το χαρακτηρισμό 5.1.4 (γ) των $\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρων έχουμε ότι

$$\angle_p^{(\lambda)}(x_t, y_t) \leq \angle_p^{(\kappa)}(x_t, y_t) \leq \angle(px_t, py_t) = \angle(px, py),$$

για κάθε $t \in (0, 1)$. Παίρνοντας το όριο καθώς $t \longrightarrow 1$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

5.4 Παραδείγματα Μετρικών Χώρων Φραγμένης Καμπυλότητας

Ένας συνοπτικός τρόπος για να εκφράζουμε αποτελέσματα σχετικά με την καμπυλότητα των μετρικών χώρων μας δίνεται μέσω των "συναρτησοειδών" $\overline{\mathrm{curv}}$ και $\underline{\mathrm{curv}}$, τα οποία ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 5.4.1 Έστω X χώρος μήκους. Θέτουμε

$$\overline{\mathrm{curv}}(X) = \inf\left\{\kappa \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{ο } X \text{ είναι } \overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)\text{-χώρος}\right\},$$

με τη συνήθη σύμβαση ότι $\inf \emptyset = +\infty$, και ομοίως με τη σύμβαση ότι $\sup \emptyset = -\infty$, ορίζουμε

$$\underline{\mathrm{curv}}(X) = \sup\left\{\kappa \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{ο } X \text{ είναι } \underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)\text{-χώρος}\right\}.$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $\underline{\mathrm{curv}}(X) \leq \overline{\mathrm{curv}}(X)$ για κάθε χώρο μήκους X. Σύμφωνα με το ακόλουθο παράδειγμα, η έννοια καμπυλότητας του Alexandrov συμπεριφέρεται έτσι όπως θα περίμενε κανείς σχετικά με την κλιμάκωση της μετρικής.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Έστω X χώρος μήκους και έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$\overline{\text{curv}}(X, \lambda d) = \frac{1}{\lambda^2}\overline{\text{curv}}(X, d), \quad \underline{\text{curv}}(X, \lambda d) = \frac{1}{\lambda^2}\underline{\text{curv}}(X, d).$$

2. <u>Χώροι Hilbert</u>

Το κύριο αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι να δώσουμε διάφορους χαρακτηρισμούς για το πότε μία μετρική επάγεται από νόρμα ή από εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 5.4.1 *Ένας χώρος με νόρμα X έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$ ανν η νόρμα του επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.*

Προφανώς μία αναγκαία συνθήκη για να επάγεται ένας μετρικός χώρος X από κάποιο χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι οι γεωδαισιακές του X να μπορούν να επεκταθούν σε όλο το $\mathbb{R}$.

Ορισμός 5.4.2 Ένας γεωδαισικός χώρος X θα λέγεται γεωδαισιακά πλήρης αν κάθε γεωδαισιακή $\gamma_{x,y} : [0,1] \longrightarrow X$ που συνδέει δύο σημεία $x, y \in X$, μπορεί να επεκταθεί σε τοπική γεωδαισιακή $\widetilde{\gamma_{x,y}} : \mathbb{R} \longrightarrow X$.

Παρατηρούμε ότι από την πρόταση 3.2.2, σε ένα μη-διακλαδίζομενο και γεωδαισιακά πλήρη κυρτό χώρο, κάθε γεωδαισιακή $\gamma_{x,y} : [0,1] \longrightarrow X$ που συνδέει τα $x, y \in X$, μπορεί να επεκταθεί σε μοναδική γεωδαισιακή $\widetilde{\gamma_{x,y}} : \mathbb{R} \longrightarrow X$. Σε όλη αυτή την υπο-ενότητα ο X θα είναι ένας μη-διακλαδιζόμενος και γεωδαισιακά πλήρης κυρτός χώρος. Σημειώνουμε ότι αν ο X ικανοποιεί τοπικά (πιθανώς και διαφορετικά από σημείο σε σημείο) φράγματα στην καμπυλότητα από κάτω, τότε ο X είναι μη-διακλαδιζόμενος. Διαλέγουμε $o \in X$ και για κάθε $x \in X$ θα συμβολίζουμε με $\tilde{x} : \mathbb{R} \longrightarrow X$ τη μοναδική γεωδαισιακή με $\tilde{x}(0) = o$, $\tilde{x}(1) = x$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις γεωδαισιακές, μπορούμε να ορίσουμε βαθμωτό γινόμενο $\cdot : \mathbb{R} \times (X, o) \longrightarrow (X, o)$ με τύπο

$$\lambda \cdot x = \tilde{x}(\lambda).$$

Προφανώς, το $\cdot$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

$$(i)\ 0 \cdot x = o,\ (ii)\ 1 \cdot x = x,\ (iii)\ \lambda \cdot o = o,\ (iv)\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x,$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$. Σε όσα ακολουθούν θα θεωρούμε τον X ως χώρο με βασικό σημείο (X, o) εφοσιασμένο με το γινόμενο $\cdot$.

Θα εξετάσουμε το πότε το γινόμενο $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ είναι συνεχές. Παρατηρούμε ότι από την κυρτότητα της d έχουμε ότι

$$\mu d(\lambda x, \lambda y) \leq \lambda d(\mu x, \mu y), \tag{5.12}$$

για κάθε $0 \leq \lambda \leq \mu < \infty$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο περιορισμός του $\cdot$ στο $[0,1] \times X$ είναι συνεχής. Πράγματι, αν $\mathbb{R} \ni \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \in [0,1]$ και $X \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$, τότε

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda_n x_n) &\leq d(\lambda x, \lambda x_n) + d(\lambda x_n, \lambda_n x_n) \\ &\leq \lambda d(x, x_n) + |\lambda - \lambda_n| d(o, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Λήμμα 5.4.1 *Έστω X μη-διακλαδιζόμενος, γεωδαισιακά πλήρης κυρτός χώρος και έστω $o \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Το γινόμενο του (X, o) είναι συνεχής απεικόνιση.*

(β) *Οι απεικονίσεις $\alpha, \beta : X \longrightarrow X$ με τύπο $\alpha(x) = -x$ και $\beta(x) = 2x$ είναι συνεχείς.*

(γ) *Οι γεωδαισιακές ευθείες $\tilde{x}$, $x \in X$, με αρχή το o, εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους, με την έννοια ότι αν $x_n \longrightarrow x$ στον X, τότε $\tilde{x_n} \longrightarrow \tilde{x}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.*

(δ) *Οι "ομοιοθεσίες" $X \ni x \overset{H_\lambda}{\longmapsto} \lambda x \in X$ είναι συνεχείς για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Προφανώς το (α) συνεπάγεται το (δ). Αφού η d είναι κυρτή, οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, και άρα το (δ) συνεπάγεται το (γ). Επίσης, είναι προφανές ότι το (γ) συνεπάγεται το (β) και άρα απομένει να δείξουμε ότι:
(β)$\Longrightarrow$(α) Θα αποδείξουμε πρώτα ότι αν η β είναι συνεχής, τότε το γινόμενο του (X, o) είναι συνεχές στο $[0, \infty) \times X$. Αν η β είναι συνεχής, τότε οι συναρτήσεις $X \ni x \mapsto 2^m x \in X$ είναι συνεχείς για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έστω τώρα $\mathbb{R} \ni \lambda_n \longrightarrow \lambda \in [0, \infty)$ και $X \ni x_n \longrightarrow x \in X$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες. Αν ο $m \in \mathbb{N}$ είναι τ.ω. $\lambda \leq 2^m$, τότε

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda_n x_n) &\leq d(\lambda x, \lambda x_n) + d(\lambda x_n, \lambda_n x_n) \\ &\leq \frac{\lambda}{2^m} d(2^m x, 2^m x_n) + |\lambda - \lambda_n| d(o, x_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Προφανώς, τώρα, η συνέχεια της α συνεπάγεται τη συνέχεια του γινομένου του (X, o). $\square$

Έπεται ότι μία συνθήκη στον X που εξασφαλίζει τη συνέχεια του γινομένου του (X, o), για κάθε $o \in X$, είναι η έξής:

Ορισμός 5.4.3 Έστω X μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος τ.ω. κάθε γεωδαισιακή $\gamma_{x,y} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ να μπορεί να επεκταθεί σε μοναδική γεωδαισιακή ευθεία $\widetilde{\gamma_{x,y}} : \mathbb{R} \longrightarrow X$. Θα λέμε ότι οι γεωδαισιακές ευθείες στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους, αν όποτε $X \ni x_n \longrightarrow x \in X$ και $X \ni y_n \longrightarrow y \in X$, έπεται ότι $\widetilde{\gamma_{x_n, y_n}} \longrightarrow \widetilde{\gamma_{x,y}}$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της πραγματικής ευθείας.

Παρατηρήσεις

1. Αν οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, τότε οι γεωδαισιακές ευθείες εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους ανν όποτε $X \ni x_n \longrightarrow x \in X$ και $X \ni y_n \longrightarrow y \in X$, έπεται ότι $\widetilde{\gamma_{x_n, y_n}} \longrightarrow \widetilde{\gamma_{x,y}}$, κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση που ο X είναι γνήσιος, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι γεωδαισιακές ευθείες στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους.

Πρόταση 5.4.2 *Έστω X μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος τ.ω. κάθε γεωδαισιακή $\gamma_{x,y} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ να μπορεί να επεκταθεί σε μοναδική γεωδαισιακή ευθεία $\widetilde{\gamma_{x,y}} : \mathbb{R} \longrightarrow X$. Αν ο X είναι γνήσιος, τότε οι γεωδαισιακές ευθείες στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους.*

Απόδειξη Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στον X οι οποίες συγκλίνουν στα $x, y \in X$ αντίστοιχα. Αφού ο X είναι γνήσιος και μονοσήμαντα γεωδαισιακός, οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους. Έτσι, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, για να αποδείξουμε ότι $\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}} \longrightarrow \widetilde{\gamma_{x,y}}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}} \longrightarrow \widetilde{\gamma_{x,y}}$ κατά σημείο. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει $t \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, ας πούμε $t \geq 1$, τ.ω. η $\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}(t)$ να μην συγκλίνει στο $\widetilde{\gamma_{x,y}}(t)$. Ας υποθέσουμε ότι καταφέρνουμε να αποδείξουμε ότι η $z_n := \widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}(t)$ είναι φραγμένη. Τότε, επειδή ο X είναι γνήσιος, θα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $z_{n_k} \longrightarrow z \neq \widetilde{\gamma_{x,y}}(t)$. Παρατηρούμε ότι είτε $z = \widetilde{\gamma_{x,y}}(-t)$, είτε $z \notin \mathrm{Im}\widetilde{\gamma_{x,y}}$. Πράγματι, από τον ορισμό του z_n έχουμε ότι

$$d(x_n, z_n) = td(x_n, y_n),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $d(x,z) = td(x,y)$. Συνεπώς, αν $z \in \mathrm{Im}\widetilde{\gamma_{x,y}}$, τότε είτε $z = \widetilde{\gamma_{x,y}}(t)$, το οποίο αποκλείεται, είτε $z = \widetilde{\gamma_{x,y}}(-t)$. Όπως θα δούμε, και στις δύο περιπτώσεις, $z = \widetilde{\gamma_{x,y}}(-t)$ και $z \notin \mathrm{Im}\widetilde{\gamma_{x,y}}$, καταλήγουμε σε άτοπο. Υποθέτουμε πρώτα ότι $z = \widetilde{\gamma_{x,y}}(-t)$. Αφού $x_n \longrightarrow x$ και $z_{n_k} \longrightarrow z$ έχουμε ότι $\gamma_{x_{n_k},z_{n_k}} \longrightarrow \gamma_{x,z}$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Αφού $z = \gamma_{x,y}(-t)$, έπεται ότι $y \notin \mathrm{Im}\gamma_{x,z}$. Όμως η $\gamma_{x_{n_k},z_{n_k}}$ είναι η αναπαραμέτριση της $\widetilde{\gamma_{x_{n_k},y_{n_k}}}|_{[0,t]}$ στο $[0,1]$, και άρα $\gamma_{x_{n_k},z_{n_k}}(1/t) = y$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, από όπου έπεται ότι $y = \gamma_{x,z}(1/t)$, το οποίο είναι άτοπο. Αν τώρα $z \notin \mathrm{Im}\widetilde{\gamma_{x,y}}$, τότε οι γεωδαισιακές $\widetilde{\gamma_{x,y}}$ και $\widetilde{\gamma_{x,z}}$ δεν ταυτίζονται, το οποίο αντιφάσκει με τη μοναδικότητα των γεωδαισιακών ευθειών, αφού $[x,y] \subseteq \mathrm{Im}\widetilde{\gamma_{x,y}} \cap \mathrm{Im}\widetilde{\gamma_{x,z}}$.

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι η $\{\gamma_{x_n,y_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Οι $(x_n), (y_n)$ είναι φραγμένες και άρα υπάρχει $R \geq 0$ τ.ω. $x_n, y_n \in B(x,R)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$d\big(x, \widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}(t)\big) \leq d(x,x_n) + d\big(x_n, \widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}(t)\big) \leq R + td(x_n,y_n) \leq R + 2Rt,$$

και άρα η $\{\gamma_{x_n,y_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Η περίπτωση $t < 0$ είναι όμοια. $\square$

Πόρισμα 5.4.1 *Έστω X γεωδαισιακά πλήρης και κυρτός μετρικός χώρος τ.ω.* $\underline{curv}(X) \geq \kappa$, $\kappa < 0$. *Τότε οι γεωδαισιακές ευθείες στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους.*

Απόδειξη Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στον X τ.ω. $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ και $d(y_n, y) \longrightarrow 0$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$d(\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}, \widetilde{\gamma_{x,y}}) \leq d(\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}, \widetilde{\gamma_{x_n,y}}) + d(\widetilde{\gamma_{x_n,y}}, \widetilde{\gamma_{x,y}}),$$

και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}, \widetilde{\gamma_{x_n,y}}) \longrightarrow 0$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επιπλέον, αφού ο X είναι κυρτός, οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(\widetilde{\gamma_{x_n,y_n}}(t), \widetilde{\gamma_{x_n,y}}(t)) \longrightarrow 0$ για κάθε $t > 1$. Από την προηγούμενη παράγραφο, οι γεωδαισιακές ευθείες εξαρτώνται συνεχώς από τα σημεία τους στον M^2_κ. Επιλέγουμε βασικό σημείο $o \in M^2_\kappa$. Από τη μεταβατικότητα της δράσης της ομάδας των ισομετριών του M^2_κ, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει τρίγωνο σύγκρι-σης $(o, \bar{y}^n, \overline{y_n})$ στον M^2_κ για την τριάδα (x_n, y, y_n), τ.ω. το $\bar{y}^n$ να ανήκει στην ίδια γεωδαισιακή ευθεία δ που εκκινεί από το o, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι

$$d((ty)_{x_n}, (ty_n)_{x_n}) \leq \bar{d}(t\bar{y}^n, t\overline{y_n}) \longrightarrow 0,$$

όπου $(ty)_{x_n} := \gamma_{x_n,y}(t)$, $(ty_n)_{x_n} := \gamma_{x_n,y_n}(t)$ και $\bar{d}$ είναι η μετρική του M^2_κ.

Θα δείξουμε πρώτα τη ζητούμενη ανισότητα. Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τρίγωνο σύγκρι-σης $(\, o, \overline{(ty)_{x_n}}, \overline{(ty_n)_{x_n}}\,)$ στον M_κ^2 για την $(x_n, (ty)_{x_n}, (ty_n)_{x_n})$ τ.ω. το $\overline{(ty)_{x_n}}$ να ανήκει στην δ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\bar{d}(\, \overline{(ty)_{x_n}}, \overline{(ty_n)_{x_n}}\,) \leq \bar{d}(t\bar{y}^n, t\bar{y_n}).$$

Όπως ξέρουμε, η συνάρτηση $[0,1] \ni s \mapsto \angle_{x_n}^{(\kappa)}\big((sty)_{x_n}, (sty_n)_{x_n}\big) \in [0,\pi]$ είναι φθίνουσα και άρα

$$\angle_o(\, \overline{(ty)_{x_n}}, \overline{(ty_n)_{x_n}}\,) = \angle_{x_n}^{(\kappa)}((ty)_{x_n}, (ty_n)_{x_n}) \leq \angle_{x_n}^{(\kappa)}(y, y_n) = \angle_o(t\bar{y}^n, t\bar{y_n}).$$

Από την ανισότητα αυτή και το νόμο των συνημιτόνων στον M_κ^2, έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

Θα δείξουμε τώρα ότι $r_n := \bar{d}(t\bar{y}^n, t\bar{y_n}) \longrightarrow 0$, δείχνοντας ότι κάθε υπακολουθία $(r_{n_m})_m$ της $(r_n)_n$ έχει περαιτέρω συγκλίνουσα υπακολουθία $(r_{n_{m_k}})_k$ τ.ω. $r_{n_{m_k}} \longrightarrow 0$. Έστω λοιπόν $(r_{n_m})_m$ υπακολουθία της $(r_n)_n$. Θέτουμε $\|v\| := \bar{d}(o,v)$ για κάθε $v \in M_\kappa^2$ και $a_m := \|\bar{y}^{n_m}\|$, $b_m := \|\bar{y_{n_m}}\|$, $c_m := \bar{d}(\bar{y}^{n_m}, \bar{y_{n_m}})$, $\theta_m := \angle_o(\bar{y}^{n_m}, \bar{y_{n_m}})$, $m \in \mathbb{N}$. Αρκεί να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία της $r_{n_{m_k}} \longrightarrow 0$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:
(i) Οι γωνίες (θ_m) είναι φραγμένες από κάτω από κάποιο αριθμό $\theta_0 > 0$. Υπάρχουν, τότε, υπακολουθίες (a_{m_k}), (b_{m_k}) των (a_m), (b_m) αντίστοιχα, τ.ω. $a_{m_k}, b_{m_k} \longrightarrow 0$. Πράγματι, αν αυτό δεν είναι αλήθεια, υπάρχει τότε $m_0 \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω. $a_m, b_m \geq \varepsilon$ για κάθε $m \geq m_0$. Όμως τότε

$$\cosh c_m \geq \cosh^2 \varepsilon - \sinh^2 \varepsilon \cos\theta_0 > 1,$$

για κάθε $m \geq m_0$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι $c_m \longrightarrow 0$. Υπάρχουν, λοιπόν, υπακολουθίες (a_{m_k}), (b_{m_k}) των (a_m), (b_m) αντίστοιχα τ.ω. $a_{m_k}, b_{m_k} \longrightarrow 0$. Αυτό προφανώς συνεπάγεται ότι η αντίστοιχη υπακολουθία $(r_{n_{m_k}})$ της (r_{n_m}) συγκλίνει στο 0.
(ii) Υπαρχει υπακολουθία (θ_{m_k}) της (θ_m) τ.ω. $\theta_{m_k} \longrightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση, η αντίστοιχη υπακολουθία $(r_{n_{m_k}})$ της $(r_n)_n$ συγκλίνει στο 0 καθώς $k \longrightarrow \infty$. Καταρχάς παρατηρούμε ότι $a_m, b_m \longrightarrow d(x,y)$ και άρα υπάρχει $R \geq 0$ τ.ω. $a_m, b_m \leq R$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \cosh r_{n_{m_k}} &= \cosh(ta_{m_k})\cosh(tb_{m_k}) - \sinh(ta_{m_k})\sinh(tb_{m_k})\cos\theta_{m_k} \\ &\leq \cosh^2(tR) - \sinh^2(tR)\cos\theta_{m_k} \longrightarrow 1, \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $r_{n_{m_k}} \longrightarrow 0$. □

Πρόταση 5.4.3 *Έστω X μη-διακλαδιζόμενος, κυρτός και γεωδαισιακά πλήρης χώρος τ.ω. η απεικόνιση των μέσων του $m : X \times X \longrightarrow X$ να είναι αφφινική. Τότε ο (X, o) γίνεται διανυσματικός χώρος με μηδενικό διάνυσμα το σημείο o, αν εφοδιαστεί με την πρόσθεση $+ : X \times X \longrightarrow X$ με τύπο*

$$x + y = m(2x, 2y),$$

για κάθε $o \in X$. Θα συμβολίζουμε το διανυσματικό αυτό χώρο με X_o.

Επιπλεόν, αν X, Y είναι δύο μη-διακλαδιζόμενοι, κυρτοί και γεωδαισιακά πλήρεις χώροι με αφφινικές απεικονίσεις μέσων, τότε μία συνεχής απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow Y$ είναι αφφινική ανν η $\phi : X_o \longrightarrow Y_{\phi(o)}$ είναι γραμμική, για κάποιο, και άρα και για κάθε $o \in X$.

Ακόμη, η απεικόνιση $\|\cdot\|_o : X \longrightarrow [0, \infty)$ με τύπο $\|x\|_o = d(o, x)$, είναι νόρμα στον X_o, τ.ω.

$$\|x - y\|_o \leq d(x, y), \tag{5.13}$$

για κάθε $x, y \in X$, για κάθε $o \in X$. Έστω ρ_o η μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_o$. Τότε $d = \sup_{o \in X} \rho_o$, και η d επάγεται από νόρμα ανν $d = \rho_o$ για κάποιο (και άρα και για κάθε) $o \in X$, η ισοδύναμα ανν $\rho_o = \rho_{o'}$ για κάθε $o, o' \in X$.

Απόδειξη Ξεκινάμε δείχνοντας ότι ο (X, o) γίνεται αβελιανή ομάδα αν εφοδιαστεί με την πρόσθεση $+$. Προφανώς η $+$ είναι συμμετρική, το o δρα ως ουδέτερο στοιχείο και το αντίθετο $-x \in X$ του $x \in X$ είναι το $-x := (-1)x$. Θα δείξουμε ότι η $+$ είναι προσεταιριστική. Καταρχάς παρατηρούμε ότι

$$m(\lambda x, \lambda y) = \lambda m(x, y), \tag{5.14}$$

για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αφού η m είναι αφφινική και οι καμπύλες $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda x \in X$, $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda y \in X$ είναι γεωδαισιακές, έπεται ότι η $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto m(\lambda x, \lambda y)$ είναι γεωδαισιακή. Όμως, προφανώς αυτή η γεωδαισιακή συμπίπτει με τη γεωδαισιακή $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda m(x, y)$ για $\lambda = 0, 1$ και άρα, από τη μοναδικότητα των γεωδαισιακών, οι δύο αυτές γεωδαισιακές συμπίπτουν σε όλο το $\mathbb{R}$. Τώρα, αν $x, y, z \in X$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= m\big(2x, m(2y, 2z)\big) = 4m\big(\frac{1}{2}x, m(y, z)\big) = 4m\big(m(o, x), m(y, z)\big) \\ &= 4m\big(m(x, y), m(o, z)\big) = m\big(2m(2x, 2y), 2z\big) = (x + y) + z. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε ότι ο X_o είναι διανυσματκός χώρος, απομένει να δείξουμε τις επιμεριστικές ιδιότητες. Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in X$. Τότε

$$\lambda x + \mu x = 2m\big(\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\mu)\big) = 2\tilde{x}\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) = (\lambda + \mu)x.$$

Για την απόδειξη του άλλου επιμεριστικού νόμου, αρκεί να αποδειχθεί ότι $\widetilde{x + y} \equiv \tilde{x} + \tilde{y}$, όπου $\tilde{x} + \tilde{y} : \mathbb{R} \longrightarrow X$ είναι η καμπύλη με τύπο $(\tilde{x} + \tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) + \tilde{y}(\lambda)$. Παρατηρούμε ότι $\widetilde{x + y}(0) = o = (\tilde{x} + \tilde{y})(0)$ και $\widetilde{x + y}(1) = x + y = (\tilde{x} + \tilde{y})(1)$. Συνεπώς αν δείξουμε ότι η $\tilde{x} + \tilde{y}$ είναι γεωδαισιακή ευθεία, θα έχουμε ότι $\widetilde{x + y} \equiv \tilde{x} + \tilde{y}$ στο $\mathbb{R}$, όπως θέλουμε. Παρατηρούμε ότι από την (5.14), η $\tilde{x} + \tilde{y}$ δίνεται από τον τύπο

$$(\tilde{x} + \tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) + \tilde{y}(\lambda) = 2\lambda m(x, y),$$

από όπου φαίνεται ότι είναι γεωδαισιακή.

Έστω, τώρα, $\phi : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση μεταξύ μη-διακλαδιζόμενων, κυρτών και γεωδαισιακά πλήρων χώρων με αφφινικές απεικονίσεις μέσων. Υποθέτουμε πρώτα ότι η ϕ είναι αφφινική και σταθεροποιούμε $o \in X$. Αφού η $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda x \in X$ είναι γεωδαισιακή για κάθε $0 \leq \lambda \leq 1$, $x \in X$, έπεται ότι η $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \phi(\lambda x) \in Y$ είναι γεωδαισαική.

Από τη μοναδικότητα των γεωδαισιακών, αυτή η γεωδαισιακή συμπίπτει με τη γεωδαισιακή $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda\phi(x) \in Y_{\phi(o)}$. Επίσης, η ϕ μετατίθεται με την απεικόνιση των μέσων και άρα

$$\phi(x+y) = \phi\big(2m(x,y)\big) = 2\phi\big(m(x,y)\big) = 2m\big(\phi(x), \phi(y)\big) = \phi(x) + \phi(y),$$

για κάθε $x, y \in X$. Αυτό δείχνει ότι η $\phi : X_o \longrightarrow Y_{\phi(o)}$ είναι γραμμική για κάθε $o \in X$. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι η $\phi : X_o \longrightarrow Y_{\phi(o)}$ είναι γραμμική για κάποιο $o \in X$. Αφού η ϕ είναι συνεχής, για να δείξουμε ότι είναι αφφινική αρκεί να δείξουμε ότι μετατίθεται με τις απεικονίσεις των μέσων. Έστω $x, y \in X_o$. Τότε

$$\phi\big(m(x,y)\big) = \frac{1}{2}\phi(x+y) = \frac{1}{2}\big(\phi(x) + \phi(y)\big) = m\big(\phi(x), \phi(y)\big).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η $\|\cdot\|_o$ είναι νόρμα στον X_o. Προφανώς, $x = o$ ανν $\|x\|_o = 0$ και $\|\lambda x\|_o = |\lambda| \|x\|_o$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$\|x-y\|_o = d(o, x-y) = 2d\big(o, m(x,-y)\big) \overset{(*)}{\leq} d(x,y) \leq \|x\|_o + \|y\|_o,$$

όπου η ανισότητα $(*)$ έπεται από την κυρτότητα της d και το ότι τα σημεία $o, m(x,-y)$ είναι τα μέσα των γεωδαισιακών που συνδέουν το $-y$, με το y και το x, αντίστοιχα.

Το γεγονός ότι $d = \sup_{o\in X} \rho_o$ έπεται από την παρατήρηση ότι για κάθε $x, y \in X$, αν $o := m(x,y)$, τότε $\rho_o(x,y) = d(x,y)$. Αν αποδείξουμε ότι όταν η d επάγεται από νόρμα, τότε $d = \rho_o$ για κάθε $o \in X$, οι υπόλοιποι ισχυρισμοί καθίστανται προφανείς. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η d επάγεται από τον χώρο με νόρμα $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$. Έστω $o \in X$. Θεωρώντας στον X τη μοναδική δομή χώρου με νόρμα που καθιστά την απεικόνιση $T : (X, +, \cdot, \|\cdot\|) \longrightarrow X$ με τύπο $T(x) = x + o$ γραμμική ισομετρία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα του $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ είναι το o. Για να αποφύγουμε τυχόν σύγχυση, για το υπόλοιπο αυτής της απόδειξης θα γράφουμε για τις πράξεις στον X_o, $x +^o y$ και $t_o x$, για κάθε $x, y \in X$, $t \in \mathbb{R}$. Προφανώς, $\|x\| = d(o,x) = \|x\|_o$ για κάθε $x \in X$, και άρα για να αποδείξουμε ότι $d = \rho_o$, αρκεί να δείξουμε ότι $x + y = x +^o y$ και $tx = t_o x$, για κάθε $x, y \in X$, $t \in \mathbb{R}$. Η ισότητα $tx = t_o x$ είναι προφανής, και αφού η d είναι η μετρική που επάγεται από τη $\|\cdot\|$, έχουμε ότι $m(x,y) = (1/2)(x+y)$. Συνεπώς,

$$x +^o y = 2_o m(x,y) = 2_o((1/2)(x+y)) = x + y,$$

όπως ζητούσαμε. □

Πρόταση 5.4.4 *Έστω X μη-διακλαδιζόμενος, κυρτός και γεωδαισιακά πλήρης χώρος. Αν η απεικόνιση των μέσων του X είναι αφφινική, τότε ο (X, d) επάγεται από χώρο με νόρμα.*

Απόδειξη Σταθεροποιούμε $o \in X$ και για κάθε $z \in X$ θεωρούμε στον X_o τη νόρμα $\|\cdot\|_o^z$ που καθιστά τη γραμμική απεικόνιση $T_z : X_o \longrightarrow X_z$ με τύπο $T_z(x) = x +^o z$ ισομετρία. Δηλαδή $\|x\|_o^z = \|T_z(x)\|_z$. Έστω ρ_o^z η μετρική που επάγεται στον X από την $\|\cdot\|_o^z$. Ισχυριζόμαστε ότι $\rho_o^z = \rho_z$ για κάθε $z \in X$, το οποίο σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση μας δίνει ότι

$$d = \sup_{z\in X} \rho_z = \sup_{z\in X} \rho_o^z,$$

και αφού η $\sup_{z\in X}\rho_o^z$ επάγεται από τη νόρμα $\sup_{z\in X}\|\cdot\|_o^z$ στον X_o, ολοκληρώνει την απόδειξη. Έστω λοιπόν $x, y\in X$. Τότε

$$\begin{aligned}\rho_o^z(x,y) &= \|x -^o y\|_o^z = \|(x -^o z) -^o (y -^o z)\|_o^z = \|T_z\big((x -^o z) -^o (y -^o z)\big)\|_z \\ &= \|T_z(x -^o z) -^z T_z(y -^o z)\|_z = \|x -^z y\|_z = \rho_z(x,y),\end{aligned}$$

όπως ζητούσαμε. □

Πρόταση 5.4.5 *Έστω X επίπεδος μετρικός χώρος με την έννοια του* Busemann, *δηλαδή με αφφινική μετρική. Τότε η απεικόνιση των μέσων m του X είναι αφφινική.*

Απόδειξη Σύμφωνα με την πρόταση 3.3.6 (γ), πρέπει να δείξουμε ότι $m(m(x,y),m(z,w))$ $= m(m(x,z),m(y,w))$ για κάθε $x,y,z,w\in X$. Θέτουμε $m_0 := m(m(x,z),m(y,w))$. Αφού η μετρική του X είναι αφφινική, ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός και άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$d(m(x,y),m_0) = d(m_0,m(z,w)) = \frac{1}{2}d(m(x,y),m(z,w)).$$

Αυτό, όμως, είναι προφανές, αφού από την αφφινικότητα της d έχουμε ότι

$$d(m(x,y),m_0) = \frac{1}{2}\Big[d\big(x,m(x,z)\big) + d\big(y,m(y,w)\big)\Big] = \frac{1}{4}\big[d(x,z)+d(y,w)\big],$$

και ομοίως έπεται ότι $d(m_0,m(z,w)) = \frac{1}{2}d(m(x,y),m(z,w)) = \frac{1}{4}\big[d(x,z)+d(y,w)\big]$. □

Πόρισμα 5.4.2 *Έστω X γεωδαισιακά πλήρης γεωδαισιακός χώρος.*

(α) *Αν ο X είναι επίπεδος με την έννοια του Busemann, τότε επάγεται από κάποιο αυστηρά κυρτό χώρο με νόρμα.*

(α) *Αν ο X είναι επίπεδος με την έννοια του Alexandrov, τότε η μετρική του επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.*

Απόδειξη Έπεται άμεσα από τα προηγούμενα αποτελέσματα αυτής της ενότητας. □

3. Πολλαπλότητες Riemann

Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann διάστασης $m\geq 2$. Όπως ξέρουμε, η καμπυλότητα τομής της M στο $p\in M$ ως προς το διδιάστατο γραμμικό υπόχωρο $S\leq T_pM$, είναι ο αριθμός

$$K_p(S) = \frac{\langle R(v,w)w,v\rangle}{|v|^2|w|^2 - \langle v,w\rangle^2},$$

όπου $\{v,w\}$ είναι κάποια βάση του S και $R: TM\oplus TM :\longrightarrow \mathrm{End}(TM)$ είναι ο τανυστής καμπυλότητας της g.

Έστω $\kappa\in\mathbb{R}$. Λέμε ότι η M έχει καμπυλότητα τομής $\leq\kappa$ ή $\geq\kappa$, αν $K_p(S)\leq\kappa$ ή $K_p(S)\geq\kappa$ αντίστοιχα, για κάθε $p\in M$ και κάθε διδιάστατο υπόχωρο του $S\leq T_pM$. Όπως ξέρουμε, η M μπορεί να θεωρηθεί ως μετρικός χώρος με τη μετρική $d=d_g$ που επάγεται από τη g. Ο βασικός στόχος αυτής της ενότητας είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα του Alexandrov.

Θεώρημα 5.4.1 (Alexandrov, 1951) *Έστω M πολλαπλότητα* Riemann. *Η M έχει καμπυλότητα τομής $\leq \kappa$ ($\geq \kappa$, αντιστ.) ανν η M έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ($\geq \kappa$, αντίστ.) ως μετρικός χώρος.*

Πριν δούμε την απόδειξη του θεωρήματος θα υπενθυμίσουμε κάποια πράγματα για πεδία Jacobi. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και έστω $\gamma : I \to M$ μία λεία καμπύλη. Θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(\gamma)$ το σύνολο όλων των (λείων) διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της γ, δηλαδή το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων για τα οποία $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ για κάθε $t \in I$. Για κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_m\}$ του $T_{\gamma(t)}M$ για κάποιο $t \in I$, τα παράλληλα διανυσμάτικα πεδία E_i, $i = 1, \ldots, m$ με $E_i(t) = e_i$ αποτελούν ορθοκανονική βάση (δηλαδή $\langle E_i, E_j \rangle \equiv 0$, $|E_i| = 1$, για κάθε $i, j = 1, \ldots, m$) του $C^\infty(I)$-module $\mathfrak{X}(\gamma)$. Ως προς αυτή τη βάση, κάθε $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $X = \sum_{i=1}^m f_i E_i$, όπου f_i, $i = 1, \ldots, m$ είναι οι λείες συναρτήσεις $f_i := \langle X, E_i \rangle : I \to \mathbb{R}$.

Μία λεία παραμετρισμένη επιφάνεια στην M είναι μία λεία απεικόνιση $\Gamma : I_1 \times I_2 \to M$, όπου τα $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ είναι διαστήματα. Ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μίας παραμετρισμένης επιφάνειας $\Gamma : I_1 \times I_2 \to M$ είναι μία λεία απεικόνιση $X : I_1 \times I_2 \to TM$ τ.ω. $X(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}M$ για κάθε $(s,t) \in I_1 \times I_2$. Το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της Γ συμβολίζεται με $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της Γ είναι τα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ με τύπο

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) := \dot{\Gamma}_s(t) = \Gamma_{*(s,t)}(\frac{\partial}{\partial t}\mid_{(s,t)}),$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) = \dot{\Gamma}^t(s) = \Gamma_{*(s,t)}(\frac{\partial}{\partial s}\mid_{(s,t)}),$$

όπου Γ_s, Γ^t είναι οι καμπύλες που ορίζονται από τις $\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t) = \Gamma^t(s)$ και $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \in \mathfrak{X}([0,1] \times [0,1])$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία που ορίζονται από τον ταυτοτικό χάρτη του $[0,1] \times [0,1]$. Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι οι τελεστές συναλλοίωτης μερικής παραγώγισης $\frac{\nabla}{dt}, \frac{\nabla}{ds} : \mathfrak{X}(\Gamma) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$ κατά μήκος της Γ ορίζονται από τις

$$\frac{\nabla \xi}{dt}(s,t) = D_\nabla \xi_s(t), \quad \frac{\nabla \xi}{ds}(s,t) = D_\nabla \xi^t(s),$$

όπου τα διανυσματικά πεδία $\xi_s \in \mathfrak{X}(\Gamma_s)$, $\xi^t \in \mathfrak{X}(\Gamma^t)$ ορίζονται από τις $\xi_s(t) = \xi(s,t) = \xi^t(s)$ και D_∇ είναι ο τελεστής συναλλοίωτης παραγώγισης κατά μήκος καμπύλων στην M ο οποίος επάγεται από τη συνοχή Levi-Civita. Για κάθε λεία απεικόνιση $\Gamma : A \to M$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ έχουμε ότι

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

και για κάθε $V \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ έχουμε ότι

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla V}{dt} - \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla V}{ds} = R\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right)V.$$

Έστω $\gamma : [0, \ell] \to M$ γεωδαισιακή. Μία λεία μεταβολή της γ είναι μία παραμετρισμένη επιφάνεια $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \ell] \longrightarrow M$ τ.ω. $\Gamma(0, \cdot) \equiv \gamma$. Η Γ λέγεται γεωδαισιακή μεταβολή αν οι καμπύλες Γ_s είναι γεωδαισιακές για κάθε $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Το πεδίο μεταβολής $V_\Gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ μίας λείας μεταβολής $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \ell] \longrightarrow M$ ορίζεται από την

$$V_\Gamma(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}\mid_{(0,t)}.$$

Το πεδίο μεταβολής V_Γ μίας γεωδαισιακής μεταβολής Γ ικανοποιεί την εξίσωση του Jacobi,

$$D^2_\nabla V_\Gamma + R(V_\Gamma, \dot\gamma)\dot\gamma = 0.$$

Ένα διανυσματικό πεδίο $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ λέγεται πεδίο Jacobi αν ικανοποιεί την εξίσωση του Jacobi.

Επιλέγοντας μία ορθοκανονική βάση $\{E_1, \dots, E_m\}$ του $C^\infty([0,\ell])$-module $\mathfrak{X}(\gamma)$, παίρνουμε ένα ισομορφισμό $\mathfrak{X}(\gamma) \cong C^\infty([0,\ell]; \mathbb{R}^m)$. Μέσω αυτού του ισομορφισμού, ο τελεστής D^2_∇ είναι απλά η παραγώγιση δεύτερης τάξης καμπύλων στον $\mathbb{R}^m$ και η $C^\infty([0,\ell])$-γραμμική απεικόνιση $R_{\dot\gamma} := R(\cdot\,, \dot\gamma)\dot\gamma : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ δίνεται από τον πίνακα $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$, όπου $a_{ij} = \langle R(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma, E_j\rangle \in C^\infty([0,\ell])$, για κάθε $i, j = 1, \dots m$. Έτσι, η εξίσωση του Jacobi είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $X'' = AX,\ \ X \in C^\infty([0,\ell]; \mathbb{R}^m)$. Έπεται ότι η εξίσωση του Jacobi ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών, δηλαδή για κάθε $v, w \in T_{\gamma(0)}M$ υπάρχει μοναδικό πεδίο Jacobi $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ τ.ω. $J(0) = v, D_\nabla J(0) = w$, και ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathfrak{J}(\gamma)$ όλων των πεδίων Jacobi κατά μήκος της γ, έχει διάσταση $2m$. Παρατηρούμε ότι από τη μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης του Jacobi, κάθε πεδίο Jacobi J με $J(0) = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$(\dagger) \quad J(t) = t\exp_{p*t\dot\gamma(0)}(D_\nabla J(0)),$$

μέσω της φυσικής ταύτισης $T_{t\dot\gamma(0)}T_pM \cong T_pM$. Παρατηρήστε ότι το πεδίο Jacobi στην $(\dagger)$ είναι το πεδίο μεταβολής της γεωδαισιακής μεταβολής $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,\ell] \longrightarrow M$ με τύπο

$$\Gamma(s,t) = \exp_{\gamma(0)}\big(\ t\big(\dot\gamma(0) + sD_\nabla J(0)\big)\ \big),$$

για κάποιο αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$.

Ένα πεδίο Jacobi λέγεται κανονικό αν είναι κάθετο στη γ, δηλαδή αν $\langle J, \dot\gamma\rangle \equiv 0$ στο $[0,\ell]$. Για κάθε πεδίο Jacobi $J \in \mathfrak{J}(\gamma)$, έχουμε ότι $\langle J, \dot\gamma\rangle'' = 0$ και άρα

$$(\dagger\dagger) \quad \langle J(t), \dot\gamma(t)\rangle = \langle J(0), \dot\gamma(0)\rangle + t\,\langle D_\nabla J(0), \dot\gamma(0)\rangle$$

για κάθε $t \in [0,\ell]$. Έτσι, ένα πεδίο Jacobi $J \in \mathfrak{J}(\gamma)$ είναι κανονικό ανν $\langle J(0), \dot\gamma(0)\rangle = \langle D_\nabla J(0), \dot\gamma(0)\rangle = 0$. Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των κανονικών πεδίων Jacobi κατά μήκος της γ με $\mathfrak{J}_0(\gamma)$. Παρατηρούμε ότι από την $(\dagger)$, έπεται ότι ένα σύνολο $\{J_1, \dots, J_k\},\ k \in \mathbb{N}$ πεδίων Jacobi είναι $\mathbb{R}$-γραμμικά ανεξάρτητο ανν τα διανύσματα $\{D_\nabla J_1(0), \dots, D_\nabla J_k(0)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα ο υπόχωρος $N(\gamma)$ του $\mathfrak{J}(\gamma)$ που αποτελείται από όλα τα πεδία Jacobi με $J(0) = 0$, έχει διάσταση m. Ο υπόχωρος $N_0(\gamma)$ όλων των κανονικών πεδίων Jacobi με $J(0) = 0$ έχει διάσταση $m - 1$, αφού $N(\gamma) = \operatorname{span}\{J\} \oplus N_0(\gamma)$, όπου $J \in N(\gamma)$ είναι το πεδίο Jacobi με τύπο $J(t) = t\dot\gamma(t),\ t \in [0,\ell]$.

Λήμμα 5.4.2 *Έστω $\gamma : [0,\ell] \to M$ μία καμπύλη χωρίς συζυγή σημεία. Τότε κάθε βάση του $\mathbb{R}$-γραμμικού χώρου $N_0(\gamma)$ είναι βάση του $C^\infty([0,\ell])$-module $\mathfrak{X}_0(\gamma)$*

Απόδειξη. Για απλότητα στο συμβολισμό θα γράφουμε X' για τη συναλλοίωτη παράγωγο $D_\nabla X$ ενός διανυσματικού πεδίου $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ κατά μήκος μίας καμπύλης γ.

Έστω $\{J_1, \ldots, J_{m-1}\}$ βάση του γραμμικού χώρου N_0, όπου $m = \dim M$. Αφού δεν υπάρχουν συζυγή σημεία κατά μήκος της γ, έπεται ότι τα διανύσματα $J_1(t), \ldots, J_{m-1}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε $t \in (0, \ell]$. Πράγματι, αν αυτό δεν ίσχυε, θα υπήρχαν $t_0 \in (0, \ell]$ και $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1} \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\sum_{i=1}^{m-1} \mu_i J_i(t_0) = 0$. Όμως τότε, το $J_0 := \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i J_i$ θα ήταν πεδίο Jacobi που θα ικανοποιούσε την $J_0(t_0) = 0$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι δεν υπάρχουν συζυγή σημεία κατά μήκος της γ. Μάλιστα, για κάθε $t \in (0, \ell\,]$, τα διανύσματα $J_i(t)$, $i = 1, \ldots, m-1$ αποτελούν βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του $\dot\gamma(t)$ στον $T_{\gamma(t)}M$. Έτσι κάθε $X \in \mathfrak{X}_0(\gamma|_{(0,\ell]})$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$X = \sum_{i=1}^{m-1} f_i^{(X)} J_i,$$

για κάποιες συναρτήσεις $f_i \in C^\infty((0, \ell])$. Συνεπώς το σύνολο $\{J_1, \ldots, J_{m-1}\}$ αποτελεί βάση του $C^\infty((0,\ell])$-module $\mathfrak{X}_0(\gamma|_{(0,\ell\,]})$. Θα δείξουμε ότι οι $f_i^{(X)}$ μπορούν να επεκταθούν λεία στο $[0, \ell]$. Ξεκινάμε παρατηρώντας ότι κάθε λεία συνάρτηση $f : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(t) = t\phi(t)$ για κάποια λεία συνάρτηση $\phi : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ με $\phi(0) = f'(0)$. Εφαρμόζοντας το αυτό στις συντεταγμένες συναρτήσεις των J_i, $i = 1, \ldots, k$ ως προς μία οποιαδήποτε ελεύθερη βάση του $C^\infty([0, \ell])$-module $\mathfrak{X}(\gamma)$, βρίσκουμε ότι υπάρχουν διανυσματικά πεδία $Y_i \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $i = 1, \ldots, k$ τ.ω. $J_i(t) = tY_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$. Προφανώς, τα διανύσματα $Y_i(t) \in T_\gamma(t)$,$i = 1, \ldots, m-1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάθε $t \in (0, \ell]$ και αφού τα πεδία Jacobi $J_1, \ldots, J_{m-1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τα δια-νύσματα $J_i'(0) = Y_i(0)$ είναι, επίσης, γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς τα διανυσματικά πεδία $Y_i \in \mathfrak{X}_0(\gamma)$,$i = 1, \ldots, m-1$ αποτελούν βάση του $C^\infty([0, \ell])$-module $\mathfrak{X}_0(\gamma)$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε κάθε $X \in \mathfrak{X}_0(\gamma)$ στη μορφή

$$X = \sum_{i=1}^{m-1} g_i Y_i,$$

για κάποιες $g_i \in C^\infty([0, \ell])$. Γράφοντας τις g_i στη μορφή $g_i(t) = t\psi_i(t)$ για κάποιες λείες συναρτήσεις ψ_i, $i = 1, \ldots, m-1$, έχουμε ότι

$$X = \sum_{i=1}^{m-1} \psi_i J_i,$$

και άρα οι ψ_i είναι οι ζηούμενες λείες επεκτάσεις των $f_i^{(X)}$, $i = 1, \ldots, m-1$. Συνεπώς το σύνολο $\{J_1, \ldots, J_{m-1}\}$ αποτελεί βάση του $C^\infty([0, \ell])$-module $\mathfrak{X}_0(\gamma)$.

Απόδειξη του θεωρήματος 5.4.1. ($\Longrightarrow$) Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $p \in M$ έχει περιοχή $W \subseteq M$ η οποία είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ($\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος, αντίστ.). Έστω $p \in M$. Από το θεώρημα του Whitehead, υπάρχουν $0 < \varepsilon < D_\kappa$ και δ_0 τ.ω. για κάθε $0 < \delta \leq \delta_0$, η ανοικτή μπάλα $D(p, \delta)$ να είναι ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p. Το ακόλουθο λήμμα μας δίνει μία ικανή συνθήκη για ν είναι μία ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p με $\varepsilon < D_\kappa$, $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ($\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος, αντίστ.).

Λήμμα 5.4.3 *Έστω $p \in M$, $o \in M_\kappa^n$ και έστω $W \subseteq M$ μία ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p, για κάποιο $0 < \varepsilon < D_\kappa$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in W$ υπάρχει αμφιδιαφόριση $e_x : D(o, \varepsilon) \longrightarrow D(x, \varepsilon)$ με $e_x(o) = x$ τ.ω.*

(α) Η παράγωγος $e_{x*o} : T_o M^n_\kappa \to T_x M$ *είναι ισομετρία για κάθε* $x \in W$

(β) Ο περιορισμός της e_x *σε κάθε γεωδαισιακή με αρχή το* o *είναι ισομετρία για κάθε* $x \in W$*, και*

(γ) Για κάθε $\omega \in D(o,\varepsilon)$ *και κάθε* $\upsilon \in T_w M^n_\kappa$*,*

$$|e_{x*\omega}(\upsilon)| \geq |\upsilon| \qquad (|e_{x*\omega}(\upsilon)| \leq |\upsilon|, \text{ resp.})$$

Τότε η W *είναι* $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$*-χώρος (*$\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$*-χώρος, αντίστ.).*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την παρατήρηση 5.1.8, για να δείξουμε ότι η W είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος ($\underline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος, αντίστ.), αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta = \Delta(x,y,z,xy,xz,yz) \subseteq W$ και κάθε τριάδα $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ σημείων του M^n_κ τ.ω.

$$(\bigstar^1) \qquad |\hat{x}\hat{y}| = |xy|, \ |\hat{x}\hat{z}| = |xz| \ \text{ και } \ \angle_{\hat{x}}(\hat{y},\hat{z}) = \angle_R(xy,xz)$$

όπου $\angle_R(xy,xz)$ είναι η ρημάννεια γωνία των γεωδαισιακών τμημάτων xy, xz, ισχύει ότι:

$$(\bigstar^2) \qquad |\hat{y}\hat{z}| \leq |yz| \qquad (|\hat{y}\hat{z}| \geq |yz|, \text{ αντιστ.})$$

Έστω λοιπόν $\Delta = \Delta(x,y,z,xy,xz,yz) \subseteq W$ γεωδαισιακό τρίγωνο. Αφού $W \subseteq D(x,\varepsilon)$, ορίζονται τα $\hat{x} := o = e_x^{-1}(x)$, $\hat{y} := e_x^{-1}(y)$ και $\hat{z} := e_x^{-1}(z)$. Τα σημεία x, y συνδέονται με μοναδική γεωδαισιακή, η οποία από το (β) είναι η ισομετρική εικόνα μέσω της e_x της μοναδικής γεωδαισιακής $\hat{x}\hat{y}$ που συνδέει τα $\hat{x} = o, \hat{y}$. Το ίδιο ισχύει και για τα x, z. Επιπλέον, αφού η $e_{x*o} : T_o M^n_\kappa \to T_x M$ είναι ισομετρία, έπεται ότι $\angle_{\hat{x}}(\hat{y},\hat{z}) = \angle_R(xy,xz)$, και άρα το γεωδαισιακό τρίγωνο $\hat{\Delta} = \Delta(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{x}\hat{y},\hat{x}\hat{z},\hat{y}\hat{z})$ στον M^n_κ ικανοποιεί τις $(\bigstar^1)$. Αφού modulo ισομετρία το $\hat{\Delta}$ είναι το μοναδικό γεωδαισιακό τρίγωνο στον M^n_κ που ικανοποιεί την $(\bigstar^1)$, αρκεί να δείξουμε ότι τα $\hat{y} = e_x^{-1}(y)$ και $\hat{z} = e_x^{-1}(z)$ ικανοποιούν την $(\bigstar^2)$. Συνεπώς, αν δείξουμε ότι για κάθε $x \in W$, η $e_x^{-1} : W \to D(o,\varepsilon)$ είναι συστολή (διαστολή, αντίστ.), θα έχουμε τελειώσει. Έστω, λοιπόν, $x, y, z \in W$. Αφού η W είναι ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|yz| &= \inf\left\{ \int_0^1 |\dot{c}(t)| dt \;\middle|\; c \in T_{C^1}(y,z),\ \mathrm{Im}c \subseteq W \right\} \\
&\geq \inf\left\{ \int_0^1 \|(e_x^{-1} \circ c)^{\cdot}(t)\| dt \;\middle|\; c \in T_{C^1}(y,z),\ \mathrm{Im}c \subseteq D(x,\varepsilon) \right\} \\
&= \inf\left\{ \int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\| dt \;\middle|\; \sigma \in T_{C^1}(y,z),\ \mathrm{Im}\sigma \subseteq D(o,\varepsilon) \right\} \\
&= |\hat{y}\hat{z}|,
\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Θα δείξουμε ότι αν η M έχει καμπυλότητα τομής $\leq \kappa$ ($\geq \kappa$, αντιστ.), τότε για κάθε $p \in M$ υπάρχει ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p που ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος. Έστω $p \in M$ και $W \subseteq M$ μία ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p, για κάποιο $0 < \varepsilon < \varepsilon_p \wedge D_\kappa$. Αφού $\varepsilon < D_\kappa$, η $\exp_o : D(0_o,\varepsilon) \to D(o,\varepsilon)$ είναι αμφιδιαφόριση. Για κάθε $x \in M$, ταυτίζουμε τον $T_x M$ με τον $T_o M^n_\kappa$ μέσω μίας γραμμικής ισομετρίας $I_x : T_o M^n_\kappa \to T_x M$ και θέτουμε

$$(\clubsuit) \quad e_x := \exp_x \circ I_x \circ \exp_o^{-1} : D(o,\varepsilon) \longrightarrow D(x,\varepsilon)$$

Προφανώς, για κάθε $x \in W$, η e_x είναι αμφιδιαφόριση με $e_x(o) = x$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις (α) και (β) του λήμματος. Για να αποδείξουμε ότι οι απεικονίσεις e_x, $x \in W$ ικανοποιούν την υπόθεση (γ) θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σύγκρισης του Rauch.

Θεώρημα 5.4.2 (Rauch, 1951) *Έστω M, N πολλαπλότητες Riemann διαστάσεων $m = \dim M \leq n = \dim N$ και έστω $\gamma : [0,\ell] \to M$ και $\sigma : [0,\ell] \to N$ δύο γεωδαισιακές ίδιας ταχύτητας, $|\dot\gamma(0)| = |\dot\sigma(0)|$. Αν δεν υπάρχουν συζυγή σημεία του $\sigma(0)$ στο $[0,\ell]$ κατά μήκος της σ και οι καμπυλότητες τομής των M και N ικανοποιούν την*

$$K_{\gamma(t)}(v, \dot\gamma(t)) \leq K_{\sigma(t)}(w, \dot\sigma(t)), \quad \forall\, v \in T_{\gamma(t)}M,\ w \in T_{\sigma(t)}N,$$

τότε για κάθε πεδία Jacobi V, W κατά μήκος των γ, σ αντίστοιχα, τ.ω. $V(0) = W(0) = 0$, $|V'(0)| = |W'(0)|$ και $\langle V'(0), \dot\gamma(0)\rangle = \langle W'(0), \dot\sigma(0)\rangle$, έχουμε ότι

$$|V(t)| \leq |W(t)| \quad \text{για κάθε } t \in [0,\ell].$$

Απόδειξη. Δείχνουμε καταρχάς ότι μπορούμε να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι τα πεδία Jacobi V, W είναι κανονικά. Γράφουμε γι' αυτό το V ως άθροισμα $V = V_\gamma + V_0$ δύο συνιστωσών, μία εφαπτόμενη στη γ και την άλλη κάθετη στη γ, όπου

$$V_\gamma = \left\langle V, \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} \right\rangle \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}, \quad V_0 = V - V_\gamma.$$

Ομοίως γράφουμε $W = W_\sigma + W_0$. Προφανώς τα V_γ, W_σ είναι πεδία Jacobi και τα V_0, W_0 είναι κανονικά πεδία Jacobi. Αφού οι γ, σ έχουν την ίδια ταχύτητα, $V(0) = W(0) = 0$ και $\langle V'(0), \dot\gamma(0)\rangle = \langle W'(0), \dot\sigma(0)\rangle$, από την (††), έπεται ότι $|V_\gamma| = |W_\sigma|$. Έτσι, αφού $|V| = |V_\gamma| + |V_0|$ και $|W| = |W_\sigma| + |W_0|$, για να αποδείξουμε ότι $|V| \leq |W|$, αρκεί να αποδείξουμε ότι την ίδια ανισότητα ικανοποιούν οι ορθογώνιες συνιστώσες $V_0 \perp \gamma$, $W_0 \perp \sigma$ των V, W στη γ αντίστοιχα. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι τα V, W είναι κανονικά.

Παρατηρούμε έπειτα ότι χρειάζεται να εξετάσουμε μονάχα την περίπτωση όπου $|V'(0)| = |W'(0)| \neq 0$, γιατί αλλιώς, λόγω του ότι $V(0) = W(0) = 0$, από τη μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης του Jacobi, έχουμε ότι $V \equiv W$ στο $[0,l]$. Αφού δεν υπάρχουν συζυγή σημεία ως προς το $\sigma(0)$ κατά μήκος της σ, έχουμε ότι $W(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0,\ell]$. Θέτουμε $\phi := |V|^2$, $\psi := |W|^2$. Οι συναρτήσεις $\phi, \psi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ είναι λείες στο $[0,\ell]$ και οι παράγωγοι τους μέχρι τη δεύτερη τάξη δίνονται από τις

$$\phi' = 2\langle V, V'\rangle, \quad \phi'' = 2\left(\langle V, V''\rangle + |V'|^2\right)$$

και τους αντίστοιχους τύπους για την ψ. Έτσι από τον κανόνα του De l' Hospital,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi''(t)}{\psi''(t)} = \frac{|V'(0)|^2}{|W'(0)|^2} = 1$$

Η απεικόνιση ϕ/ψ ορίζεται και είναι λεία στο $(0,\ell]$. Επεκτείνεται σε συνεχή απεικόνιση $[0,\ell]$ αν της δώσουμε την τιμή 1 στο $t=0$. Αν αποδείξουμε ότι είναι αύξουσα στο $[0,\ell]$, θα έχουμε τελειώσει. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι

$$(*) \qquad \phi'(t)\psi(t)-\phi(t)\psi'(t)\geq 0$$

για κάθε $t\in[0,\ell]$. Αν όμως $\phi(t)=0$ για κάποιο $t\in(0,\ell]$, τότε επίσης $\phi'(t)=0$ και η $(*)$ ισχύει για το t. Ομοίως αν $\psi(t)=0$ και άρα μπορούμε να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $\phi(t)\neq 0, \psi(t)\neq 0$ και να γράψουμε την $(*)$ στη μορφή

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\geq\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}.$$

Θέτοντας τώρα $\overline{V},\overline{W}\in\mathfrak{X}(\gamma)$ τα κανονικά πεδία Jacobi κατά μήκος της γ που ορίζονται από τους τύπους

$$\overline{V}(s)=\frac{1}{|V(t)|}V(s)\ \ ,\ \ \overline{W}(s)=\frac{1}{|W(t)|}W(s),$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} &= 2\frac{\langle V'(t),V(t)\rangle}{|V(t)|^2}=2\langle\overline{V}'(t),\overline{V}(t)\rangle=\langle\overline{V},\overline{V}\rangle'(t)=\\ &= \int_0^t\langle\overline{V},\overline{V}\rangle''(s)ds=\int_0^t 2\left(|\overline{V}|^2+\langle\overline{V}'',\overline{V}\rangle\right)ds=\\ &= 2\int_0^t\Big(|\overline{V}|^2-\langle R(\overline{V},\dot\gamma)\dot\gamma,\overline{V}\rangle\Big)ds,\end{aligned}$$

και ομοίως

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=2\int_0^t\left(|\overline{W}|^2-\langle R(\overline{W},\dot\gamma)\dot\gamma,\overline{W}\rangle\right)ds$$

Η απεικόνιση $I_0^t:\mathfrak{X}(\gamma)\times\mathfrak{X}(\gamma)\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπο

$$I_0^t(X,Y)=\int_0^t\left(\langle X',Y'\rangle-\langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle\right)ds$$

είναι μία συμμετρική διγραμμική μορφή στον γραμμικό χώρο $\mathfrak{X}(\gamma)$ για κάθε $t\in[0,\ell]$ και λέγεται μορφή δείκτη της $\gamma|_{[0,t]}$. Θέτουμε $I_0^t(X):=I_0^t(X,Y)$ για κάθε $X\in\mathfrak{X}(\gamma)$. Έτσι, μ' αυτό το συμβολισμό, αρκεί να αποδείξουμε ότι $I_0^t(\overline{V})\geq I_0^t(\overline{W})$. Για να το αποδείξουμε αυτό χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα για τη μορφή δείκτη.

Λήμμα 5.4.4 *Έστω $\gamma:[0,\ell]\to M$ γεωδαισιακή χωρίς συζυγή σημεία. Έστω $X,J\in\mathfrak{X}(\gamma)$ διανυσματικά πεδία κατά μήκος της γ κάθετα στην γ τ.ω. $X(0)=J(0)$ και $X(\ell)=J(\ell)$. Αν το J είναι πεδίο Jacobi, τότε $I_0^\ell(J)\leq I_0^\ell(X)$, με ισότητα ανν $X=J$.*

Απόδειξη. Έστω $\{J_1,\dots,J_{m-1}\}$ βάση του γραμμικού χώρου N_0 που αποτελείται από όλα τα πεδία Jacobi J με $J(0)=0$. Όπως έχουμε δει, το σύνολο $\{J_1,\dots,J_{m-1}\}$ αποτελεί βάση του $C^\infty([0,\ell])$-module $\mathfrak{X}_0(\gamma)$. Δείχνουμε, καταρχάς, ότι αν $X=\sum_{i=1}^{m-1}f_iJ_i\in\mathfrak{X}_0(\gamma)$, τότε

$$(\star)\ \langle X',X'\rangle-\langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma,X\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{j=1}^{m-1}f_j'J_j\right\rangle+\left\langle\sum_{i=1}^{m-1}f_iJ_i,\sum_{i=1}^{m-1}f_iJ_i'\right\rangle'.$$

Για απλότητα στο συμβολισμό θέτουμε

$$X_1 = \sum_{i=1}^{m-1} f_i' J_i, \quad X_2 = \sum_{i=1}^{m-1} f_i J_i'.$$

Έτσι $X' = X_1 + X_2$ και η $(\star)$ γίνεται

$$|X'|^2 - \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle = |X_1|^2 + \langle X, X_2\rangle'.$$

Επειδή,

$$\begin{aligned}
|X'|^2 - \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle &= |X_1|^2 + |X_2|^2 + 2\langle X_1, X_2\rangle - \sum_{i=1}^{m-1} f_i \langle R(J_i,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle = \\
&= |X_1|^2 + |X_2|^2 + 2\langle X_1, X_2\rangle + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \langle J_i'', X\rangle,
\end{aligned}$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(1) \quad \langle X, X_2\rangle' = |X_2|^2 + 2\langle X_1, X_2\rangle + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \langle J_i'', X\rangle.$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$(2) \ \langle X, X_2\rangle' = |X_2|^2 + \langle X_1, X_2\rangle + \sum_{i=1}^{m-1} f_i' \langle J_i', X\rangle + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \langle J_i'', X\rangle.$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) και παρατηρώντας ότι $\langle X_1, X_2\rangle = \sum_{i,j=1}^{m-1} f_i' f_j \langle J_i, J_j'\rangle$, αναγόμαστε στο να αποδείξουμε ότι $\langle J_i', J_j\rangle = \langle J_i, J_j'\rangle$. Αφού όμως τα J_i είναι πεδία Jacobi, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(\langle J_i', J_j\rangle - \langle J_i, J_j'\rangle)' &= \langle J_i'', J_j\rangle - \langle J_i, J_j''\rangle = \\
&= -\langle R(J_i,\dot\gamma)\dot\gamma, J_j\rangle + \langle R(J_j,\dot\gamma)\dot\gamma, J_i\rangle = 0
\end{aligned}$$

και άρα

$$\langle J_i', J_j\rangle - \langle J_i, J_j'\rangle \equiv \langle J_i(0)', J_j(0)\rangle - \langle J_i(0), J_j'(0)\rangle = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την $(\star)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
I_0^\ell(X) &= \int_0^\ell \left(|X'|^2 - \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle\right) dt = \\
&= \int_0^\ell \left(|X_1|^2 + \langle X, X_2\rangle'\right) dt = \int_0^\ell |X_1|^2 dt + \langle X, X_2\rangle \Big|_{t=0}^{\ell} = \\
&= \int_0^\ell |X_1|^2 dt + \langle X(\ell), X_2(\ell)\rangle
\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το $I_0^\ell(J)$, χρησιμοποιούμε το ότι το σύνολο $\{J_1, \dots, J_{m-1}\}$ είναι βάση του γραμμικού χώρου $\mathfrak{J}_0(\gamma)$ και γράφουμε το $J \in \mathfrak{J}_0(\gamma)$ στη μορφή $J = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i J_i$

για κάποιους μονοσήμαντα προσδιορισμένους $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m-1$. Επίσης, αφού $X(\ell) = J(\ell)$, έχουμε ότι $f_i^{(X)}(\ell) = \lambda_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, m-1$. Έτσι,

$$\begin{aligned} I_0^\ell(J) &= \int_0^\ell \left(|J'|^2 - \langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma, J\rangle\right) dt = \\ &= \int_0^\ell \left(|J'|^2 + \langle J, J''\rangle\right) dt = \int_0^\ell \langle J, J'\rangle' dt = \\ &= \langle J, J'\rangle \Big|_{t=0}^{\ell} = \langle J(\ell), J'(\ell)\rangle = \langle X(\ell), \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i J_i'(\ell)\rangle = \\ &= \langle X(\ell), \sum_{i=1}^{m-1} f_i(\ell) J_i'(\ell)\rangle = \langle X(\ell), X_2(\ell)\rangle \end{aligned}$$

και άρα

$$(*)\ \ I_0^\ell(X) = \int_0^\ell |X_1|^2 dt + \langle X(\ell), X_2(\ell)\rangle \geq \langle X(\ell), X_2(\ell)\rangle = I_0^\ell(J),$$

το οποίο αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του λήμματος.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι από την $(*)$ έχουμε ότι $I_0^\ell(X) \geq I_0^\ell(J)$ ανν $\int_0^\ell |X_1|^2 dt = 0$, δηλαδή ανν $X_1 \equiv 0$ στο $[0, \ell]$. Αφού όμως τα J_i είναι βάση του $C^\infty([0,\ell])$-module $\mathfrak{X}_0(\gamma)$, έχουμε ότι $X_1 \equiv 0$ ανν $f_i' \equiv 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m-1$, δηλαδή ανν οι f_i είναι όλες σταθερές. Αφού όμως $f_i(\ell) = \lambda_i$, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $X \equiv J$. □

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη του θεωρήματος του Rauch. Ως τώρα έχουμε αναχθεί στο να αποδείξουμε ότι $I_0^t(\overline{V}) \geq I_0^t(\overline{W})$, όπου τα διανυσματικά πεδία $\overline{V}, \overline{W}$ δίνονται από τους τύπους

$$\overline{V}(s) = \frac{1}{|V(t)|} V(s)\ \ ,\ \ \overline{W}(s) = \frac{1}{|W(t)|} W(s).$$

Έστω $\{E_1, \ldots, E_n\}, \{F_1, \ldots, F_n\}$ ορθοκανονικές βάσεις των $C^\infty([0,\ell])$-modules $\mathfrak{X}(\gamma), \mathfrak{X}(\sigma)$ αντίστοιχα, τ.ω.

$$E_1 = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|},\ E_2(t) = \overline{V}(t), \quad F_1 = \frac{\dot\sigma}{|\dot\sigma|},\ F_2(t) = \overline{W}(t).$$

Μέσω αυτών των συντεταγμένων, ορίζουμε ένα $C^\infty([0,\ell])$-μονομορφισμό $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\sigma)$ με τύπο

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^m f_i E_i\right)(s) = \sum_{i=1}^m f_i(s) F_i(s).$$

Προφανώς η $\mathcal{L}$ διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα με τιμές στο $C^\infty([0,\ell])$ που επάγονται στα $\mathfrak{X}(\gamma)$ και $\mathfrak{X}(\sigma)$ από τις ρημάννειες μετρικές και μετατίθεται με τη συναλλοίωτη παραγώγιση, δηλαδή για κάθε $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$, έχουμε ότι

$$(\mathcal{L}X)' = \mathcal{L}(X').$$

Τα διανυσματικά πεδία $\mathcal{L}(\overline{V}), \overline{W} \in \mathfrak{X}(\sigma)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του λήμματος της μορφής δείκτη, αφού το $\overline{W}$ είναι κάθετο στη σ από υπόθεση,

$$\langle \mathcal{L}\overline{V}, \dot{\sigma} \rangle = \langle \mathcal{L}\overline{V}, \mathcal{L}(\dot{\gamma}) \rangle = \langle \overline{V}, \dot{\gamma} \rangle \equiv 0$$

και επίσης $\mathcal{L}\overline{V}(0) = 0 = \overline{W}(0)$, $\mathcal{L}\overline{V}(t) = \overline{W}(t)$. Έτσι αφού το $\overline{W}$ είναι πεδίο Jacobi, από το λήμμα της μορφής δείκτη έχουμε ότι

$$I_0^t(\overline{W}) \leq I_0^t(\mathcal{L}\overline{V}).$$

Όμως

$$\begin{aligned} I_0^t(\mathcal{L}\overline{V}) &= \int_0^t \big(\, |\mathcal{L}(\,\overline{V}')|^2 - |\mathcal{L}\overline{V}|^2 |\dot{\sigma}|^2 K_\sigma(\dot{\sigma}, \mathcal{L}\overline{V}) \, \big) \, ds \leq \\ &\leq \int_0^t \big(\, |\overline{V}'|^2 - |\overline{V}|^2 |\dot{\gamma}|^2 K_\gamma(\dot{\gamma}, \overline{V}) \, \big) \, ds = I_0^t(\overline{V}). \end{aligned}$$

Οι δύο αυτές ανισότητες αποδεικνύουν το θεώρημα του Rauch. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα του Rauch και το ότι η καμπυλότητα τομής της M είναι $\leq \kappa$ ($\geq \kappa$, αντίστ.), θα δείξουμε ότι οι απεικονίσεις e_x, $x \in W$ που ορίζονται στην (♣), ικανοποιούν τη συνθήκη (γ) του λήμματος 5.4.3. Έστω, λοιπόν, $\omega \in D(o, \varepsilon) \subseteq M_\kappa^n$ και $\upsilon \in T_\omega M_\kappa^n$. Πρέπει να δείξουμε ότι $|e_{x*\omega}(\upsilon)| \geq |\upsilon|$, ($|e_{x*\omega}(\upsilon)| \leq |\upsilon|$, αντίστ.). Αν ορίσουμε πεδία Jacobi V, W κατά μήκος των γεωδαισιακών γ_ω, $\gamma_{e_x(\omega)}$ (παραμετρισμένες στο $[0,1]$) που συνδέουν το o με το ω και το x με το $e_x(\omega)$ αντίστοιχα, τ.ω. να ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rauch και τ.ω. $J(1) = \upsilon$ και $W(1) = e_{x*\omega}(\upsilon)$, τότε το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα του Rauch.

Έστω $\gamma : (-\delta, \delta) \to D(o, \varepsilon)$ μία οποιαδήποτε καμπύλη με $\gamma(0) = \omega$ και $\dot{\gamma}(0) = \upsilon$. Μέσω της γ, ορίζουμε μία γεωδαισιακή μεταβολή $\Gamma : (-\delta, \delta) \times [0,1] \longrightarrow D(o, \varepsilon)$ της γ_ω θέτοντας $\overline{\gamma} := \exp_o^{-1} \circ \gamma$ και ορίζοντας

$$\Gamma(s,t) = \exp_o(t\bar{\gamma}(s)).$$

Έστω $A_t : T_o M_\kappa^n \to T_{t\overline{\gamma}(0)} T_o M_\kappa^n$ η φυσική ταύτιση για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Τότε το πεδίο Jacobi $V \in \mathfrak{J}(\gamma_\omega)$ που ορίζεται από τη Γ δίνεται από τον τύπο

$$V(t) = \dot{\Gamma^t}(0) = t \exp_{o*t\overline{\gamma}(0)} \circ A_t \circ A_1^{-1}(\dot{\overline{\gamma}}(0)),$$

και, άρα, προφανώς $V(0) = 0$, $V'(0) = A_1^{-1}(\dot{\overline{\gamma}}(0))$ και

$$V(1) = \exp_{o*\overline{\gamma}(0)}(\dot{\overline{\gamma}}(0)) = (\exp_o \dot{\circ}\, \overline{\gamma})(0) = \dot{\gamma}(0) = \upsilon.$$

Έπειτα επιλέγουμε $\sigma : (-\delta, \delta) \to D(x, \varepsilon)$ τ.ω. $\sigma(0) = e_x(\omega)$, $\dot{\sigma}(0) = e_{x*\omega}(\upsilon)$ και χρησιμοποιώντας τη σ ορίζουμε όπως παραπάνω μία γεωδαισιακή μεταβολή $\Sigma : (-\delta, \delta) \times [0,1] \longrightarrow D(x, \varepsilon)$ της $\gamma_{e_x(\omega)}$ θέτοντας $\overline{\sigma} := \exp_x^{-1} \circ \sigma$ και ορίζοντας

$$\Sigma(s,t) = \exp_x(t\bar{\sigma}(s)).$$

Αν $W \in \mathfrak{J}(\gamma_{e_x(\omega)})$ είναι το πεδίο Jacobi που ορίζεται από τη Σ, τότε $W(0) = 0$, $W'(0) = B_1^{-1}(\dot{\overline{\sigma}}(0))$ και $W(1) = e_{x*\omega}(\upsilon)$, όπου $B_t : T_x M \to T_{t\overline{\sigma}(0)} T_x M$ είναι η φυσική ταύτιση για κάθε $0 \le t \le 1$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι τα πεδία Jacobi V, W ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rauch. Η υπόθεση $|V'(0)| = |W'(0)|$ ικανοποιείται αφού

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\sigma}}(0) &= (\exp_x^{-1})_{*\sigma(0)}\big(\dot\sigma(0)\big) = (\exp_x^{-1})_{e_x(\omega)}\Big(e_{x*\omega}\big(\dot\gamma(0)\big)\Big) = \\ &= (\exp_x^{-1}\circ e_x)\big(\dot\gamma(0)\big) = (I_x\circ \exp_o^{-1})_{*\omega}\big(\dot\gamma(0)\big) = I_{x*\overline{\gamma}(0)}\big(\dot{\overline{\gamma}}(0)\big).\end{aligned}$$

Απομένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι ικανοποιείται και η $\langle V'(0), \dot{\gamma_\omega}(0)\rangle = \langle W'(0), \dot{\gamma_{e_x(\omega)}}(0)\rangle$. Αυτό όμως ισχύει, αφού λόγω του ότι οι απεικονίσεις $e_x, x\in W$ ικανοποιούν την υπόθεση (β) του λήμματος 5.4.3, έχουμε ότι $\gamma_{e_x(\omega)} = e_x\circ\gamma_\omega$ και άρα

$$\begin{aligned}\big\langle W'(0), \dot{\gamma_{e_x(\omega)}}(0)\big\rangle &= \Big\langle B_1^{-1}\left(\dot{\overline{\sigma}}(0)\right), (e_x \dot\circ \gamma_\omega)(0)\Big\rangle = \\ &= \Big\langle B_1^{-1}\circ I_{x*\overline{\gamma}(0)}\left(\dot{\overline{\gamma}}(0)\right), e_{x*o}\left(\dot{\gamma_\omega}(0)\right)\Big\rangle = \\ &= \Big\langle A_1^{-1}\left(\dot{\overline{\gamma}}(0)\right), \dot{\gamma_\omega}(0)\Big\rangle = \big\langle V'(0), \dot{\gamma_\omega}(0)\big\rangle,\end{aligned}$$

αφού $e_{x*o} = B_0\circ I_{x*0}\circ A_0^{-1} = B_1\circ I_{x*\overline{\gamma}(0)}\circ A_1^{-1}$. Συνεπώς η μία κατεύθυνση του θεωρήματος του Alexandrov αποδείχθηκε.

($\Longleftarrow$) Για την απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης του θεωρήματος του Alexandrov χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα, το οποίο συσχετίζει το ρυθμό αύξησης της απόστασης δύο γεωδαισιακών $\gamma_i : [0,1]\to M$, $i = 1,2$, με αρχή το $p\in M$, με το ρυθμό αύξησης των αντίστοιχων γεωδαισιακών $\overline{\gamma_i} = \exp_p^{-1}\circ\gamma_i : [0,\varepsilon]\to T_pM$, $i = 1,2$, για κάποιο $\varepsilon > 0$ και την καμπυλότητα τομής της M στο p ως προς το διδιάστατο υπόχωρο $S \le T_pM$ που παράγεται από τα $\dot{\gamma_0}(0)$, $\dot{\gamma_1}(0)$. Η ακριβής διατύπωση του λήμματος έχει ως εξής.

Λήμμα 5.4.5 *Έστω $p\in M$ και έστω W μία ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p. Αν οι $\gamma_0,\gamma_1 : [0,1]\to W$ είναι γεωδαισιακές τ.ω. $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$, τότε*

$$d(\gamma_0,\gamma_1)^2 = |\overline{\gamma_0} - \overline{\gamma_1}|^2 - \frac{1}{3}\left\langle R\big(\overline{\gamma_0},\overline{\gamma_1}\big)\overline{\gamma_1},\overline{\gamma_0}\right\rangle + O(s^5).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\upsilon_i := \dot{\gamma_i}(0) = \exp_p^{-1}\big(\gamma_i(1)\big)$, $i = 1,2$. Τότε $\overline{\gamma_i}(t) = t\upsilon_i$ για κάθε $t\in[0,1]$, και άρα αν θέσουμε $L := d(\gamma_0,\gamma_1)$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται

$$L(s)^2 = s^2|\upsilon_0 - \upsilon_1|^2 - \frac{s^4}{3}\left\langle R\big(\upsilon_0,\upsilon_1\big)\upsilon_1,\upsilon_0\right\rangle + O(s^5). \quad (1)$$

Για να αποδείξουμε την (1), θεωρούμε την παραμετρισμένη επιφάνεια $\Gamma : [0,1]\times[0,1]\to M$ με τύπο

$$\Gamma(s,t) = \exp_{\gamma_0(s)}\Big(t\exp^{-1}_{\gamma_0(s)}\circ\gamma_1(s)\Big).$$

Θέτουμε $T := \frac{\partial\Gamma}{\partial t}$, $J := \frac{\partial\Gamma}{\partial s}$. Για κάθε $0\le s\le 1$, το $T_s\in\mathfrak{X}(\Gamma_s)$ είναι η ταχύτητα της γεωδαισιακής Γ_s που συνδέει τα $\gamma_0(s),\gamma_1(s)$ και το $J_s\in\mathfrak{X}(\Gamma_s)$ είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της Γ_s με $J_s(0) = \dot{\gamma_0}(s), J_s(1) = \dot{\gamma_1}(s)$. Παρατηρούμε ότι $L(s) = |\dot\Gamma_s(t)| = |T(s,t)|$ για κάθε $0\le s,t\le 1$ και άρα η L^2 είναι λεία και σταθερή ως προς το t. Το ανάπτυγμα Taylor τέταρτης τάξης της $f := L^2$ με κέντρο το 0, δίνεται από την

$$f(s) = f'(0)s + \frac{f''(0)}{2}s^2 + \frac{f'''(0)}{6}s^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}s^4 + O(s^5). \quad (2)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι τιμές των παραγώγων της f στο 0 μέχρι και την τέταρτη τάξη, είναι τ.ω. αν αντικατασταθούν στη (2), να προκύπτει η (1). Οι ισότητες $\frac{\nabla T}{ds} = \frac{\nabla J}{dt}$ και $\frac{\nabla T}{dt} \equiv 0$ θα χρησιμοποιηθούν συχνά στους υπολογισμούς. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
f'(s) &= 2\left\langle \tfrac{\nabla T}{ds}, T\right\rangle \Big|_{(s,t)} \\
f''(s) &= 2\left(\left\langle \tfrac{\nabla^2 T}{ds^2}, T\right\rangle + \left|\tfrac{\nabla T}{ds}\right|^2\right)\Big|_{(s,t)} \\
f'''(s) &= 2\left(\left\langle \tfrac{\nabla^3 T}{ds^3}, T\right\rangle + 3\left\langle \tfrac{\nabla^2 T}{ds^2}, \tfrac{\nabla T}{ds}\right\rangle\right)\Big|_{(s,t)} \\
f^{(4)}(s) &= 2\left(\left\langle \tfrac{\nabla^4 T}{ds^4}, T\right\rangle + 4\left\langle \tfrac{\nabla^3 T}{ds^3}, \tfrac{\nabla T}{ds}\right\rangle + 3\left|\tfrac{\nabla^2 T}{ds^2}\right|^2\right)\Big|_{(s,t)}
\end{aligned}$$

Προφανώς, αφού $\Gamma_0 \equiv p$, έχουμε ότι $T(0,t) = 0$ για κάθε $0 \le t \le 1$ και άρα $f'(0) = 0$ και

$$f''(0) = 2\left|\frac{\nabla T}{ds}(0,t)\right|^2 = 2\left|\frac{\nabla J}{dt}(0,t)\right|^2 = 2|J_0'(t)|^2.$$

Αφού όμως το J_0 είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της σταθερής καμπύλης $\Gamma_0 \equiv p$, έπεται ότι η $J_0 : [0,1] \to T_pM \cong \mathbb{R}^m$ είναι αφφινική καμπύλη, και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $J_0(0) = \upsilon_0$ και $J_0(1) = \upsilon_1$, βλέπουμε ότι $J_0(t) = \upsilon_0 + t(\upsilon_1 - \upsilon_0)$ για κάθε $0 \le t \le 1$. Συνεπώς $f''(0) = 2|\upsilon_1 - \upsilon_0|^2$.

Υπολογίζουμε έπειτα την $f'''(0)$. Αφού $T(0,t) \equiv 0$, έχουμε ότι $f'''(0) = 6\left\langle \frac{\nabla^2 T}{ds^2}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle \Big|_{(0,t)}$, και αφού $\frac{\nabla T}{ds}(0,t) = \upsilon_1 - \upsilon_0$, απομένει να υπολογίσουμε την $\frac{\nabla^2 T}{ds^2}(0,t)$. Όμως

$$\frac{\nabla^2 T}{ds^2} = \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla J}{dt} = R(J,T)J + \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}$$

και άρα αφού η $R(J,T)J$ μηδενίζεται στο $(0,t)$, έχουμε ότι

$$\frac{\nabla^2 T}{ds^2}(0,t) = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}(0,t).$$

Όπως έχουμε δει, $J^0 = \dot{\gamma_0}$, $J^1 = \dot{\gamma_1}$ και άρα $\frac{\nabla J}{ds}(s,0) = \frac{\nabla J}{ds}(s,1) = 0$ για κάθε $0 \le s \le 1$. Ειδικότερα, $\frac{\nabla J}{ds}(0,0) = \frac{\nabla J}{ds}(0,1) = 0$ και άρα αν δείξουμε ότι $\frac{\nabla^2}{dt^2}\frac{\nabla J}{ds}(0,t) \equiv 0$, θα έχουμε ότι $f'''(0) = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\nabla^2}{dt^2}\frac{\nabla J}{ds} = \frac{\nabla}{dt}(R(T,J)J) + R(T,J)\frac{\nabla T}{ds} + \frac{\nabla}{ds}(R(T,J)T).$$

Προφανώς οι ποσότητες $\frac{\nabla}{dt}(R(T,J)J)$ και $R(T,J)\frac{\nabla T}{ds}$ στο δεξί μέλος μηδενίζονται στο $(0,t)$ αφού $T(0,\cdot) \equiv 0$. Επίσης

$$\frac{\nabla}{ds}(R(T,J)T) = \frac{\nabla R}{ds}(T,J,T) + R(\frac{\nabla T}{ds},J) + R(T,\frac{\nabla J}{ds})T + R(T,J)\frac{\nabla T}{ds},$$

όπου $\frac{\nabla R}{ds}$ είναι η μερική συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή καμπυλότητας R κατά μήκος της Γ ως προς τη μεταβλητή s. Έτσι, αφού ο $\frac{\nabla R}{ds}$ είναι τανυστής, η $\frac{\nabla}{ds}(R(T,J)T)$ επίσης μηδενίζεται στο $(0,t)$.

Υπολογίζουμε τέλος την $f^{(4)}(0)$. Από τους υπολογισμούς μας έως τώρα, έχουμε ότι

$$f^{(4)}(0) = 8\left\langle \frac{\nabla^3 T}{ds^3}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle \Big|_{(0,t)}$$

και έχουμε δείξει ότι $\frac{\nabla T}{ds}(0,t) = \upsilon_1 - \upsilon_0$. Απομένει, λοιπόν, να υπολογίσουμε την $\frac{\nabla^3 T}{ds^3}$ στο $(0,t)$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla^3 T}{ds^3}(0,t) &= \frac{\nabla}{ds}\left(R(J,T)J + \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}\right)\Big|_{(0,t)} = \\
&= \frac{\nabla}{ds}(R(J,T)J)\Big|_{(0,t)} + \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}\Big|_{(0,t)} = \\
&= R(J,\frac{\nabla T}{ds})J\Big|_{(0,t)} + \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}\Big|_{(0,t)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$f^{(4)}(0) = 8\left\langle R(J,\frac{\nabla T}{ds})J, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)} + 8\left\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)}.$$

Από την αντισυμμετρικότητα του τανυστή καμπυλότητας R έχουμε ότι

$$\left\langle R\left(J,\frac{\nabla T}{ds}\right)J\ ,\ \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)} = \langle R(\upsilon_0,\upsilon_1)\upsilon_0,\upsilon_1\rangle.$$

Έπεται ότι η $\left\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)}$ είναι σταθερή ως προς t. Όμως

$$\left\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)},$$

και συνεπώς η

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)} = \left\langle \frac{\nabla^2 J}{ds^2}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,t)}$$

είναι αφφινική ως προς το t. Αλλά $\left\langle \frac{\nabla^2 J}{ds^2}, \frac{\nabla T}{ds}\right\rangle\Big|_{(0,i)} = (J^i)''(0) = (\dot{\gamma}_i)''(0) = 0$ για $i = 0,1$ και άρα $f^{(4)}(0) = 8\langle R(\upsilon_0,\upsilon_1)\upsilon_0,\upsilon_1\rangle$ όπως ζητούσαμε. $\square$

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη του θεωρήματος του Alexandrov. Θα εξετάσουμε μονάχα την περίπτωση όπου η καμπυλότητα τομής της M είναι $\geq \kappa$. Η άλλη περίπτωση είναι ανάλογη. Έστω $p \in M$ και έστω S διδιάστατος υπόχωρος του T_pM. Πρέπει να δείξουμε ότι $K := K_p(S) \geq \kappa$. Έστω $W = D(0,\delta)$, $0 < \delta < D_\kappa/2$, μία ε-ομοιόμορφα κανονική και κυρτή περιοχή του p, για κάποιο $0 < \varepsilon < D_\kappa$. Έστω $u, v \in D(0_p,\delta)$ τ.ω. $|u| = |v| = \lambda > 0$ και $\langle v,u\rangle = 0$. Έστω $x = (x_t)_{t\in[0,1]}$, $y = (y_t)_{t\in[0,1]}$ οι γεωδαισιακές από το p στα $q := \exp_p(u)$ και $r = \exp_p(v) \in W$ αντίστοιχα. Από το λήμμα 5.4.5, έχουμε ότι

$$|x_t y_t|^2 = 2\lambda^2 t^2 - \frac{\lambda^4 K}{3}t^4 + O(t^5). \quad (\star)$$

Έστω $\hat{p} \in M^m_\kappa$ και κάθετες γεωδασιακές $\hat{x} = (\hat{x}_t)_{t\in[0,1]}$, $\hat{y} = (\hat{y}_t)_{t\in[0,1]}$ στον M^m_κ με αρχή το $\hat{p}$ μήκους λ. Αφού η M έχει καμπυλότητα $\geq \kappa$, έχουμε ότι $|x_t y_t| \leq |\hat{x}_t\hat{y}_t|$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\kappa = 0$. Σ' αυτή την περίπτωση, $|\hat{x}_t\hat{y}_t|^2 = 2\lambda^2 t^2$ και άρα από την $(\star)$ έχουμε ότι $\frac{\lambda^4 K}{3}t^4 \geq O(t^5)$ με την έννοια ότι

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{1}{t^5}\frac{\lambda^4 K}{3}t^4 = \liminf_{t\to 0^+}\frac{\lambda^4 K}{3t} \geq 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $K \geq 0$. Εξετάζουμε έπειτα την περίπτωση $\kappa < 0$. Σ' αυτή την περίπτωση, αφού οι $\hat{x}$ και $\hat{y}$ είναι κάθετες, από το νόμο των συνημιτόνων και το ανάπτυγμα της $\cosh^2$ σε δυναμοσειρά, έχουμε ότι

$$\cosh(\sqrt{-\kappa}|\hat{x}_t\hat{y}_t|) = \cosh^2(\sqrt{-\kappa}\lambda t) = 1 - \kappa\lambda^2 t^2 + \frac{\kappa^2\lambda^4}{3}t^4 + O(t^5).$$

Επίσης, από την $(\star)$ και το ότι $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}|x_ty_t| = \lambda\sqrt{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\cosh(\sqrt{-\kappa}|x_ty_t|) &= 1 - \frac{\kappa}{2}|x_ty_t|^2 + \frac{\kappa^2}{24}|x_ty_t|^4 + O(|x_ty_t|^5) = \\
&= 1 - \frac{\kappa}{2}|x_ty_t|^2 + \frac{\kappa^2}{24}|x_ty_t|^4 + O(t^5) = \\
&= 1 - \kappa\lambda^2 t^2 + \frac{\lambda^4(\kappa K + \kappa^2)}{6}t^4 + O(t^5).
\end{aligned}$$

Όμως $|x_ty_t| \leq |\hat{x}_t\hat{y}_t|$ και η cosh είναι αύξουσα, και άρα

$$O(t^5) \leq \frac{\kappa^2\lambda^4}{3}t^4 - \frac{\lambda^4(\kappa K + \kappa^2)}{6}t^4 = \frac{\lambda^4(\kappa^2 - K\kappa)}{6}t^4.$$

Συνεπώς $\kappa^2 - K\kappa \geq 0$, το οποίο αφού $k < 0$, συνεπάγεται ότι $K \geq \kappa$ όπως ζητούσαμε. Η περίπτωση $\kappa > 0$ είναι όμοια. □

Ως πόρισμα έχουμε ότι σε μία ρημάννεια πολλαπλότητα η γωνία Alexandrov μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων με αρχή το ίδιο σημείο, υπάρχει με την αυστηρή έννοια και ισούται με τη ρημάννεια γωνία τους.

Πόρισμα 5.4.3 *Έστω M λεία πολλαπλότητα* Riemann *και έστω $\gamma, \sigma : [0, \ell] \to M$ γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας με αρχή το $p = \gamma(0) = \sigma(0)$. Το όριο της γωνίας σύγκρισης $\overline{\angle}_p(\gamma(t), \sigma(s))$ καθώς $s, t \to 0$ υπάρχει και ισούται με τη γωνία των διανυσμάτων $\dot{\gamma}(0), \dot{\sigma}(0)$ στον T_pM.*

Απόδειξη Επειδή η M είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει συμπαγής περιοχή του $p \in M$, στην οποία οι καμπυλότητες τομής είναι φραγμένες. Έτσι το p έχει κυρτή περιοχή W η οποία είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(\kappa)$-χώρος για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$. Συνεπώς από την πρόταση 5.1.8, το όριο $\lim_{s,t\to 0}\overline{\angle}_p(\gamma(t), \sigma(s))$ υπάρχει και αν $\theta := \angle(\gamma, \sigma)$ είναι η γωνία Alexandrov μεταξύ των γ, σ τότε

$$2\sin\frac{\theta}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{d(\gamma(t), \sigma(t))}{t}.$$

Έστω τώρα $u = \dot{\gamma}(0)$, $\upsilon = \dot{\sigma}(0)$ και έστω φ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων u, υ στον T_pM. Προφανώς, αφού τα u, υ είναι μοναδιαία διανύσματα, έχουμε ότι $2\sin(\varphi/2) = |u - \upsilon|$. Όπως ξέρουμε όμως,

$$\lim_{t\to 0}\frac{d(\gamma(t), \sigma(t))}{|tu - t\upsilon|} = 1$$

και άρα έχουμε ότι

$$2\sin\frac{\theta}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{d(\gamma(t), \sigma(t))}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|tu - t\upsilon|}{t} = |u - \upsilon| = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Έτσι, $\theta = \varphi$ όπως ζητούσαμε. □

<u>**Παρατήρηση**</u>

1. Έπεται από την απόδειξη του θεωρήματος 5.4.1 ότι αν μια λεία πολλαπλότητα Riemann M έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ με την έννοια του Busemann, τότε η καμπυλότητα τομής της είναι φραγμένη από πάνω ή από κάτω από τον κ, και άρα έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ ή $\geq \kappa$ με την έννοια του Alexandrov. Με άλλα λόγια, για πολλαπλότητες Riemann, η έννοια καμπυλότητας του Busemann είναι ισοδύναμη με την έννοια καμπυλότητας του Alexandrov.

4. <u>Γινόμενα</u>

Από το τετριμμένο παράδειγμα $\mathbb{R} \times^p \mathbb{R} = \ell_p^2$ έπεται ότι τα φράγματα στην καμπυλότητα ενός μετρικού χώρου με την έννοια του Alexandrov δεν διατηρούνται από το ℓ_p-γινόμενο, εκτός κι αν $p = 2$. Για $p = 2$, είναι άμεσο από την NPC-ανισότητα ότι το ℓ_2-γινόμενο δύο $\overline{\text{CAT}}(0)$-χώρων είναι $\overline{\text{CAT}}(0)$-χώρος. Ομοίως, το ℓ_2-γινόμενο δύο $\underline{\text{CAT}}(0)$-χώρων είναι $\underline{\text{CAT}}(0)$-χώρος. Γενικά ισχύει το εξής:

Πρόταση 5.4.6 *Έστω X_1, X_2 γεωδασιαικοί χώροι με περισσότερα από ένα σημεία. Τότε*

$$\overline{\text{curv}}(X_1 \times X_2) = \max\{\overline{\text{curv}}(X_1), \overline{\text{curv}}(X_2), 0\},$$

και

$$\underline{\text{curv}}(X_1 \times X_2) = \min\{\underline{\text{curv}}(X_1), \underline{\text{curv}}(X_2), 0\}.$$

5. <u>Χώροι L^p</u>

Πρόταση 5.4.7 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και (X, d) μετρικός χώρος.*

(α) *Αν ο X είναι κυρτός μετρικός χώρος, τότε για κάθε $1 < p < \infty$ και κάθε ισχυρά μετρήσιμη βασική απεικόνιση $o : \Omega \longrightarrow X$, ο $L^p(\mu; X, o)$ είναι κυρτός μετρικός χώρος.*

(β) *Αν ο X είναι $\overline{\text{CAT}}(0)$ χώρος, τότε για κάθε ισχυρά μετρήσιμη βασική απεικόνιση $o : \Omega \longrightarrow X$, ο $L^2(\mu; X, o)$ είναι $\overline{\text{CAT}}(0)$ χώρος.*

(γ) *Αν ο $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι πεπερασμένος χώρος μέτρου, τότε ισχύουν και τα αντίστροφα των (α) και (β).*

Απόδειξη (α) Έστω $f, g : [0,1] \longrightarrow L^p(\mu; X, o)$ δύο γεωδαισιακές με $f_0 = g_0$. Ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, και έτσι, όπως ξέρουμε από την πρόταση 2.3.8, μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, οι καμπύλες

$$[0,1] \ni t \longrightarrow f_t(\omega) \in X, \qquad [0,1] \ni t \longrightarrow g_t(\omega) \in X,$$

είναι γεωδαισιακές στον X. Έτσι, από την κυρτότητα της d έχουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $1 < p < \infty$,

$$d^p(f_t(\omega), g_t(\omega)) \leq t^p d^p(f_1(\omega), g_1(\omega)),$$

μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$. Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα ως προς το μ, προκύπτει η κυρτότητα της μετρικής d_p του $L^p(\mu; X, o)$.

(β) Έστω $g \in L^2(\mu; X, o)$. Όμοια με το (α), αν $f : [0,1] \longrightarrow L^p(\mu; X, o)$ είναι μία γεωδαισιακή στον $g \in L^2(\mu; X, o)$, τότε η καμπύλη $[0,1] \ni t \longrightarrow f_t(\omega) \in X$ είναι γεωδαισιακή στον X μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$. Έτσι, από την NPC-ανισότητα στον X έπεται ότι για κάθε $t \in [0,1]$,

$$d^2(g(\omega), f_t(\omega)) \leq td^2(g(\omega), f_1(\omega)) + (1-t)d^2(g(\omega), f_0(\omega)) - t(1-t)d^2(f_0(\omega), f_1(\omega)),$$

μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$. Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα ως προς το μ, προκύπτει η NPC-ανισότητα στον $L^2(\mu; X, o)$.
(γ) Έπεται από το ότι όταν ο $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι πεπερασμένος χώρος μέτρου, τότε ο X εμβυθίζεται αφφινικά στον $L^p(\mu; X, o)$ μέσω της απεικόνισης $X \ni x_0 \longmapsto c_{x_0} \in L^p(\mu; X)$, αφού

$$d_p(c_{x_0}, c_{x_1}) = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} d(x_0, x_1),$$

για κάθε $x_0, x_1 \in X$, $1 \leq p \leq \infty$. □

6. Όπως μπορεί να ελέγξει ο αναγνώστης, ο τρίποδας, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 3.3, έχει καμπυλότητα $\leq \kappa$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μέρος **II**

Χώροι Μέτρων Πιθανότητας του Wasserstein

Κεφάλαιο 6

Προκαταρκτικά Αποτελέσματα για Χώρους Μέτρων

Ξεκινάμε με μία σύντομη συζήτηση για χώρους μέτρων πάνω από ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{F})$ τ.ω. η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ να διαχωρίζει τα σημεία του X, δηλαδή τ.ω. για κάθε $x, y \in X$, $x \neq y$, να υπάρχουν $E, F \in \mathcal{F}$ τ.ω. $x \in E$, $y \in F$ και $E \cap F = \emptyset$. Έπειτα θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου ο X είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και η $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του και θα μελετήσουμε την ασθενή τοπολογία του χώρου $\mathbb{P}X$ όλων των Borel μέτρων πιθανότητας στον X. Τέλος, θα δούμε τον ορισμό των τοπολογιών $\mathcal{W}_r$, $1 \leq R < \infty$ του Wasserstein στο χώρο $\mathbb{P}_r X$ όλων των μέτρων πιθανότητας με πεπερασμένη r-οστή κεντρική ροπή και τη σχέση της με την ασθενή τοπολογία.

6.1 Χώροι Μέτρων πάνω σε Μετρήσιμους Χώρους

Υπενθυμίζουμε καταρχάς κάποια βασικά πράγματα για προσημασμένα μέτρα (φορτία), κυρίως για να εξοικειωθούμε με το συμβολισμό. Έστω ν ένα φορτίο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{F})$. Από το θεώρημα διάσμασης του Jordan, το ν γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $\nu = \nu^+ - \nu^-$ όπου τα ν^+, ν^- είναι αμοιβαία ιδιάζοντα μέτρα στην $\mathcal{F}$, και λέγονται η θετική και η αρνητική κύμανση του ν αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι αν $\nu = \mu - \lambda$ για κάποια θετικά μέτρα μ, λ στην $\mathcal{F}$, τότε $\nu^+ \leq \mu$ και $\nu^- \leq \lambda$. Η ολική κύμανση του ν είναι το μέτρο $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$. Γράφοντας $\mu + \nu = (\mu^+ + \nu^+) - (\mu^- + \nu^-)$, η προηγούμενη παρατήρηση μας δίνει ότι

$$|\mu + \nu| = (\mu + \nu)^+ + (\mu + \nu)^- \leq \mu^+ + \nu^+ + (\mu^+ + \nu^-) = |\mu| + |\nu|$$

για οποιαδήποτε φορτία μ, ν στην $\mathcal{F}$. Ως γνωστών $L^p(\nu) := L^p(|\nu|) = L^p(\nu^+) \cap L^p(\nu^-)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ και το ολοκλήρωμα μίας $f \in L^1(\nu)$ ορίζεται από την

$$\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^-.$$

Είναι άμεσο από τους ορισμούς ότι

$$\left| \int f d\nu \right| \leq \int |f| d|\nu|.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

Πρόταση 6.1.1 *Έστω ν ένα φορτίο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{F})$ και έστω $E \in \mathcal{F}$. Τότε*

(α) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) | F \in \mathcal{F}, F \subseteq E\}$, $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) | F \in \mathcal{F}, F \subseteq E\}$

(β) $|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\nu(E_i)| \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \text{τα } E_i \in \mathcal{F} \text{ ξένα}, \cup_{i=1}^n E_i = E\right\}$

(γ) $|\nu|(E) = \sup_{|f| \le 1} \left|\int_E f d\nu\right|$

Προφανώς το συναρτησοειδές $I_\nu : L^1(\nu) \to \mathbb{R}$ με τύπο $I_\nu(f) = \int f d\nu$ είναι γραμμικό. Επίσης, όπως είναι γνωστό, η ποσότητα $\int f d\nu$ είναι γραμμική (όποτε τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένα) και ως προς το ν.

Πρόταση 6.1.2 *Έστω μ, ν φορτία στην $\mathcal{F}$, $a, b \in \mathbb{R}$ και $1 \le p \le \infty$. Αν $f \in L^p(\mu) \cap L^p(\nu)$, τότε $f \in L^p(a\mu + b\nu)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και επιπλέον, αν $p = 1$, τότε*

$$\int f d(a\mu + b\nu) = a \int f d\mu + b \int f d\nu.$$

Απόδειξη Προφανώς, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $f \in L^p(a\mu)$ και $\int f d(a\mu) = a \int f d\mu$. Απομένει να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε φορτία μ, ν στην $\mathcal{F}$ έχουμε $f \in L^p(\mu + \nu)$ και

$$\int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu. \tag{6.1}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι τα μ, ν είναι μέτρα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης σε μία ακολουθία $\{\phi_n\}$ $\mathcal{F}$-απλών συναρτήσεων τ.ω. $0 \le \phi_n \nearrow |f|^p$, παίρνουμε ότι $f \in L^p(\mu + \mu)$. Προσεγγίζοντας το θετικό και το αρνητικό μέρος της f με ακολουθίες απλών συναρτήσεων, μία ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης, μας δίνει ότι $\int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu$. Ερχόμαστε τώρα στη γενική περίπτωση. Αφού $f \in L^p(\mu) \cap L^p(\nu)$ και ο ισχυρισμός ισχύει για μέτρα, έχουμε ότι $f \in L^p(\mu^+ + \nu^+) \cap L^p(\mu^- + \nu^-)$. Ωστόσο, όπως έχουμε δει, $(\mu + \nu)^+ \le \mu^+ + \nu^+$, $(\mu + \nu)^- \le \mu^- + \nu^-$ και άρα $f \in L^p(\mu + \nu)$. Τέλος, η (6.1) έπεται από την ισότητα $(\mu + \nu)^+ + \mu^- + \nu^- = (\mu + \nu)^- + \mu^+ + \nu^+$. □

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος τ.ω. η $\mathcal{F}$ να διαχωρίζει τα σημεία του X. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ το χώρο όλων των πεπερασμένων φορτίων στην $\mathcal{F}$, με $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ το χώρο όλων των πεπερασμένων μέτρων στην $\mathcal{F}$ και με $\mathbb{P}(X, \mathcal{F})$ το χώρο όλων των μέτρων πιθανότητας στην $\mathcal{F}$. Όταν είναι ξεκάθαρο το σε ποια σ-άλγεβρα αναφερόμαστε, θα γράφουμε απλά $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}_+(X)$ και $\mathbb{P}X$ αντί $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$, $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{F})$ και $\mathbb{P}(X, \mathcal{F})$ αντίστοιχα.

Το σύνολο $\mathcal{M}(X)$ γίνεται πραγματικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με τις συνήθεις πράξεις, δηλαδή για κάθε $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$(a\mu + b\nu)(A) = (a\mu + b\nu)(A) = a\mu(A) + b\nu(A),$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$, και η συνάρτηση $\|\cdot\|_{TV} : \mathcal{M}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ με τύπο

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{M}(X)$. Προφανώς ο $\mathcal{M}_+(X)$ είναι κυρτός κώνος στον $\mathcal{M}(X)$, δηλαδή $a\mu + b\nu \in \mathcal{M}_+(X)$ για κάθε $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ και κάθε $a, b \ge 0$, και το $\mathbb{P}X$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}_+(X)$, δηλαδή $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu \in \mathbb{P}X$ για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{P}X$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι ο $\mathbb{P}X$ παράγει τον $\mathcal{M}(X)$, αφού κάθε $\nu \in \mathcal{M}(X)$ γράφεται στη μορφή

$$\nu = \nu^+(X)\frac{\nu^+}{\nu^+(X)} - \nu^-(X)\frac{\nu^-}{\nu^-(X)} \in \mathrm{span}\mathbb{P}X,$$

όπου τα ν^+, ν^- είναι η θετική και η αρνητική κύμανση του ν.

Μέσω της ένθεσης $\delta : X \hookrightarrow \mathbb{P}X$ του Dirac, με τύπο

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x), \quad A \in \mathcal{F},$$

μπορούμε να θεωρούμε τον X ως υποσύνολο του $\mathbb{P}X$. Παρατηρήστε ότι η δ είναι πράγματι ένθεση, δηλαδή 1-1, αφού έχουμε υποθέσει ότι η $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του X.

Παραδείγματα

1. Το σύνολο X είναι πεπερασμένο ανν $\dim \mathcal{M}(X) < +\infty$, και σε αυτή την περίπτωση, $\mathcal{M}(X) \overset{iso}{=} \ell_1^n$, όπου $n = \mathrm{card}(X)$.

2. $\mathcal{M}(\mathbb{N}) \overset{iso}{=} L^1(\mathbb{N})$.

Όπως θα δούμε, ο $\mathcal{M}$ γίνεται συναρτητής από την κατηγορία των μετρήσιμων χώρων στην κατηγορία των πραγματικών χώρων μέ νόρμα, αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{F})$ το χώρο με νόρμα $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ και σε κάθε μετρήσιμη απεικόνιση $f : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{G})$ την απεικόνιση $f_* := \mathcal{M}f : \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{G})$ που αντιστοιχεί σε κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ το μέτρο-εικόνα $f_*\mu$ του μ μέσω της f. Για όσους δεν είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του μέτρου εικόνα, υπενθυμίζουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των μέτρων-εικόνα.

Ορισμός 6.1.1 Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος φορτίου (μέτρου), $(Y, \mathcal{N})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \longrightarrow Y$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Η f επάγει το φορτίο (μέτρο) $f_*\mu$ στην $\mathcal{N}$ με τύπο

$$f_*\mu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big).$$

Το $f_*\mu$ λέγεται το φορτίο-εικόνα (μέτρο-εικόνα) του μ μέσω της f.

Προφανώς αν το μ είναι (θετικό) μέτρο ή μέτρο πιθανότητας, τότε το ίδιο είναι και το $f_*\mu$.

Πρόταση 6.1.3 *Έστω X, Y, Z μετρήσιμοι χώροι. Τότε*

(α) *για κάθε μετρήσιμη απεικόνιση $f : X \to Y$ η επαγόμενη απεικόνιση $f_* : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ είναι γραμμική και $\|f_*\|_{TV} \leq 1$.*

(β) *$(id_X)_* = id_{\mathcal{M}(X)}$, και*

(γ) *για οποιεσδήποτε μετρήσιμες απεικονίσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ έχουμε ότι*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Απόδειξη (α) Η γραμμικότητα της $f_* : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ είναι άμεση από τους ορισμούς. Έστω $\mu \in \mathcal{M}(X)$ και έστω μ^+, μ^- η θετική και η αρνητική του κύμανση αντίστοιχα. Τότε $f_*\mu = f_*\mu^+ - f_*\mu^-$ και άρα $(f_*\mu)^+ \leq f_*\mu^+$ και $(f_*\mu)^- \leq f_*\mu^-$. Συνεπώς,

$$|f_*\mu| = (f_*\mu)^+ + (f_*\mu)^- \leq f_*\mu^+ + f_*\mu^- = f_*|\mu|$$

και άρα $\|f_*\mu\|_{TV} = |f_*\mu|(Y) \leq f_*|\mu|(Y) = |\mu|(X) = \|\mu\|_{TV}$, δηλαδή $\|f_*\| \leq 1$, όπως θέλαμε. Τα (β) και (γ) είναι τετριμμένα. □

Παραδείγματα

3. Αν η $f : X \longrightarrow Y$ είναι η σταθερή απεικόνιση $f \equiv y_0 \in Y$ και το μ είναι ένα φορτίο στον X, τότε $f_*\mu = \mu(X)\delta_{y_0}$.

4. Έστω $f_i : (X_i, \mu_i) \longrightarrow Y_i$, $i = 1, 2$, είναι μετρήσιμες, τότε

$$(f_1 \times f_2)_*(\mu_1 \otimes \mu_2) = f_{1*}(\mu_1) \otimes f_{2*}(\mu_2).$$

5. Έστω (X_i, μ_i), $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, χώροι πιθανότητας και $x^i : \prod_{j=1}^n X_j \longrightarrow X_i$ οι προβολές. Τότε

$$x_*^i \left(\otimes_{j=1}^n \mu_j\right) = \mu_i,$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

6. Έστω X χώρος Hilbert. Η συνέλιξη $\mu \oplus \nu$ δύο Borel μέτρων $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ είναι το μέτρο-εικόνα του γινομένου τους μέσω της πρόσθεσης, δηλαδή $\mu \oplus \nu = +_*(\mu \otimes \nu)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν μ είναι θετικό μέτρο στην $(X, \mathcal{F})$ και η $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, λέμε ότι το $\int f d\mu$ ορίζεται αν η

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

έχει νόημα, δηλαδή αν είτε $\int f^+ d\mu < \infty$ είτε $\int f^- d\mu < \infty$. Ομοίως, αν το μ είναι φορτίο, θα λέμε ότι το $\int f d\mu$ ορίζεται αν τα ολοκλήρωματα $\int f d\mu^+$ και $\int f d\mu^-$ ορίζονται και τα δύο και ο τύπος

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f^- d\mu^-$$

έχει νόημα, δηλαδή αν ούτε $\int f d\mu^+ = \int f^- d\mu^- = \infty$ και ούτε $\int f d\mu^+ = \int f^- d\mu^- = -\infty$.

Πρόταση 6.1.4 *Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, $(Y, \mathcal{G})$ μετρήσιμος χώρος και $T : X \to Y$, $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_Y f dT_*\mu$ ορίζεται ανν το $\int_X f \circ T d\mu$ ορίζεται, και σ' αυτή την περίπτωση τα ολοκληρώματα είναι ίσα.*

Απόδειξη Ο ισχυρισμός ισχύει για δείκτριες συναρτήσεις, αφού για κάθε $G \in \mathcal{G}$ έχουμε ότι

$$\int \mathbb{1}_G dT_*\mu = T_*\mu(G) = \mu(T^{-1}(G)) = \int \mathbb{1}_{T^{-1}(G)} d\mu = \int \mathbb{1}_G \circ T d\mu$$

Λόγω γραμμικότητας ισχύει και για απλές συναρτήσεις, και με μία συνηθισμένη εφαρμογή του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης, βλέπουμε ότι ισχύει και για θετικές συναρτήσεις. Εφαρμόζοντάς το αυτό στο θετικό και στο αρνητικό μέρος της f, παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατηρήσεις

1. Εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση στη συνάρτηση $\mathbb{1}_G f$, $G \in \mathcal{G}$, παίρνουμε ότι

$$\int_G f dT_* \mu = \int_{T^{-1}(G)} f \circ T d\mu$$

για κάθε $G \in \mathcal{G}$.

2. Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει αν το μ είναι φορτίο.

Πρόταση 6.1.5 *Για κάθε μετρήσιμη απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$, το διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Big\downarrow \delta & & \Big\downarrow \delta \\ \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{M}(Y) \end{array}$$

μετατίθεται, δηλαδή $f_* \circ \delta = \delta \circ f$. Με άλλα λόγια, μέσω της ένθεσης δ του Dirac, η επαγόμενη απεικόνιση $f_* : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ είναι επέκταση της f.

Απόδειξη Η απόδειξη είναι τετριμμένη. Για κάθε $B \subseteq Y$ και κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$f_*(\delta_x)(B) = \delta_x\big(f^{-1}(B)\big) = \mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = \mathbb{1}_B(f(x)) = \delta_{f(x)}(B),$$

δηλαδή $f_*(\delta_x) = \delta_{f(x)}$ για κάθε $x \in X$, όπως θέλουμε. $\square$

Έστω $B_0(X)$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων απεικονίσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ που είναι μ-ολκληρώσιμες για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Από την πρόταση 6.1.2 και το ότι ο $\mathbb{P}X$ παράγει τον $\mathcal{M}(X)$, έπεται ότι $B_0(X)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις που είναι μ-ολοκληρώσιμες για κάθε $\mu \in \mathbb{P}X$. Επίσης, από την πρόταση 6.1.2, η συνάρτηση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : B_0(X) \times \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι διγραμμική. Μέσω τέτοιων απεικονίσεων ορίζονται σημαντικές τοπολογίες σε υποσύνολα του $\mathcal{M}(X)$.

Προφανώς, $B(X) \subseteq B_0(X)$. Μάλιστα, σύμφωνα με το ακόλουθο, έχουμε ισότητα.

Λήμμα 6.1.1 *Αν μία μετρήσιμη απεικόνιση $f : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μ-ολοκληρώσιμη για κάθε $\mu \in \mathbb{P}X$, τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η $f : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία μη-φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και θα δείξουμε ότι δεν είναι μ-ολοκληρώσιμη για κάποιο μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathbb{P}(X, \mathcal{F})$. Αφού η f δεν είναι φραγμένη, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_k \in X$ τ.ω. $|f(X_k)| \geq 2^k$. Έστω $\mu \in \mathbb{P}(X, 2^X)$ το μέτρο με τύπο

$$\mu(A) = \sum_{k:x_k \in A} \frac{1}{2^k}, \quad A \subseteq X.$$

Αφού η f είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη, έχουμε ότι $\int |f| d\mu|_{\mathcal{F}} = \int |f| d\mu$. Όμως

$$\int |f| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \frac{1}{2^k} = \infty$$

και άρα $f \notin L^p(\mu|_{\mathcal{F}}), \mu|_{\mathcal{F}} \in \mathbb{P}(X, \mathcal{F})$, όπως ζητούσαμε. $\square$

Θα θεωρούμε τον $B_0(X) = B(X)$ εφοδιασμένο με την ομοιόμορφη νόρμα $\|\cdot\|_u$ με τύπο $\|f\|_u = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Πρόταση 6.1.6 *Η διγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle : B(X) \times \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την*

$$|\langle f, \mu \rangle| \leq \|f\|_u \|\mu\|_{TV} \tag{6.2}$$

για κάθε $(f, \mu) \in B(X) \times \mathcal{M}(X)$, είναι συνεχής και επάγει τις ισομετρικές γραμμικές ενθέσεις $I : \mathcal{M}(X) \longrightarrow B(X)^*$ και $J : B(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)^*$ που ορίζονται από την

$$I_\mu(f) = \langle f, \mu \rangle = Jf(\mu).$$

Απόδειξη Προφανώς η (6.2) ισχύει. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι συνεχής. Έστω $\{(f_n, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $B(X) \times \mathcal{M}(X)$ τ.ω. $(f_n, \mu_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f, \mu) \in B(X) \times \mathcal{M}(X)$. Αφού $f_n \overset{\|\cdot\|_u}{\longrightarrow} f \in B(X)$, υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $\|f_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι

$$\begin{aligned} |\langle f, \mu \rangle - \langle f_n, \mu_n \rangle| &\leq |\langle f - f_n, \mu \rangle| + |\langle f_n, \mu - \mu_n \rangle| \\ &\leq \|\mu\|_{TV} \|f - f_n\|_u + M \|\mu - \mu_n\|_{TV} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Το ότι $I(\mathcal{M}(X)) \subseteq B(X)^\sharp$ και $J(B(X)) \subseteq \mathcal{M}(X)^\sharp$, (όπου $X^\sharp$ είναι ο αλγεβρικός δυικός του X), καθώς και η γραμμικότητα των I, J, έπονται από τη διγραμμικότητα της $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Από την (6.2) έπεται ότι $I(\mathcal{M}(X)) \subseteq B(X)^*$ και $J(B(X)) \subseteq \mathcal{M}(X)^*$ Οι I, J είναι προφανώς ενθέσεις, αφού για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X)$, το I_μ καθόριζεται από τη δράση του στο $2^X \subseteq B(X)$ και για κάθε $f \in B(X)$, το Jf καθορίζεται μονοσήμαντα από τη δράση του στο $\delta(X) \subseteq \mathcal{M}(X)$. Δείχνουμε τέλος ότι οι I, J είναι ισομετρίες. Έστω $0 \neq \mu \in \mathcal{M}(X)$ και έστω $X = P \cup N$, $P, N \in \mathcal{F}$ μία διάσπαση Hahn του X για το μ, δηλαδή $P \cap N = \emptyset$ και $\mu^+ = \mu|_P$, $\mu^- = -\mu|_N$. Θέτουμε $f := \mathbb{1}_P - \mathbb{1}_N$. Τότε $\|f\|_u = 1$ και

$$I_\mu(f) = \int_X f d\mu = \int_X \mathbb{1}_P d\mu - \int_X \mathbb{1}_N d\mu = \mu^+(X) + \mu^-(X) = \|\mu\|_{TV}.$$

Συνεπώς,

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{f:\|f\|_u=1} |I_\mu(f)| = \|I_\mu\|_u^*,$$

για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X)$, το οποίο δείχνει ότι η I_μ είναι ισομετρία. Επίσης και η J είναι ισομετρία, αφού

$$\|f\|_u = \sup_{\mu \in \mathbb{P}X} |Jf(\mu)| = \sup_{\mu : \|\mu\|_{TV}=1} |Jf(\mu)| = \|Jf\|_{TV}^*,$$

για κάθε $f \in B(X)$. □

Ειδικότερα, ο $\mathbb{P}X$ εφοδιασμένος με τη $\|\cdot\|_{TV}$ είναι ισομετρικός με γραμμικά κυρτό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του $B(X)^*$. Παρατηρήστε επίσης ότι μέσω της ένθεσης δ του Dirac, η $Jf : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρείται ως επέκταση της f. Τέλος σημειώνουμε ότι εν γένει καμία από τις ενθέσεις I, J δεν είναι ισομορφισμός. Το ότι η I δεν είναι ισομορφισμός, φαίνεται από το ότι αν $X = \mathbb{N}$, τότε $\mathcal{M}(\mathbb{N}) \overset{iso}{=} L^1(\mathbb{N})$ και $B(\mathbb{N}) \overset{iso}{=} L^\infty(\mathbb{N})$, αφού ο δυικός του $L^\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι ο δυικός του $L^1(\mathbb{N})$ ή από την περίπτωση $X = \mathbb{R}$, αφού μέσω του θεωρήματος Hahn-Banach μπορεί κανείς να κατασκευάσει γραμμικό συναρτησοειδές $\ell \in B(\mathbb{R})^*$ το οποίο στηρίζεται στο άπειρο, που δεν παριστάνεται από κάποιο μέτρο. Το ότι η J δεν είναι ισομορφισμός έπεται από το παράδειγμα $X = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με λίγα λόγια για την ασθενή* τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \leq (B(X)^*, w^*)$, δηλαδή την τοπολογία ως προς την οποία ένα δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ στον $\mathcal{M}(X)$ συγκλίνει στο $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ανν

$$\int f d\mu_i \longrightarrow \int f d\mu,$$

για κάθε $f \in B(X)$. Η ασθενής* τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$ είναι ασθενέστερη (δηλαδή με λιγότερα ανοικτά σύνολα) από την τοπολογία της $\|\cdot\|_{TV}$. Επιπλέον, εκτός και αν ο X είναι πεπερασμένος, η ασθενής* τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$ είναι γνήσια ασθενέστερη από την τοπολογία της ολικής κύμανσης $\|\cdot\|_{TV}$. Πράγματι, η τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \leq (B(X)^*, w^*)$ είναι η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την οικογένεια $\{Jf | f \in B(X)\} \subseteq \mathcal{M}(X)^*$ και, όπως ξέρουμε, η ασθενής τοπολογία που επάγεται σε ένα γραμμικό χώρο X από μία διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών, επάγεται από νόρμα ανν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Στην περίπτωση μας, όμως, ο $\mathcal{M}(X)$ έχει πεπερασμένη διάσταση ανν το X είναι πεπερασμένο.

Προαφανώς αν ένα δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ στο $\mathcal{M}(X)$ συγκλίνει στο $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ως προς την ασθενή* τοπολογία, τότε $\mu_i(A) \longrightarrow \mu(A)$ για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq X$. Σύμφωνα με το ακόλουθο, για φραγμένα δίκτυα, ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 6.1.7 *Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος, $\mu \in \mathcal{M}(X)$ και $(\mu_i)_{i\in I}$ ένα δίκτυο στον $\mathcal{M}(X)$ τ.ω. $\sup \|\mu_i\|_{TV} < \infty$. Αν $\mu_i(A) \longrightarrow \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu_i \longrightarrow \mu$ ως προς την τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \leq (B(X)^*, w^*)$.*

Απόδειξη Αφού το δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ είναι φραγμένο, αρκεί να ελέγξουμε τη σύγκλιση $\int f d\mu_i \longrightarrow \int f d\mu$ σε κάποιο υποσύνολο A του $B(X)$ του οποίου η κλειστή γραμμική θήκη να ταυτίζεται με τον $B(X)$. Προφανώς όμως, ένα τέτοιο σύνολο είναι το $2^X = \{\mathbb{1}_A | A \in \mathcal{F}\} \subseteq B(X)$. □

Στα ακόλουθα παραδείγματα φαίνεται ότι ακόμη και η ασθενής* τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \leq (B(X)^*, w^*)$ είναι πολύ ισχυρή για να είναι φυσική.

Παραδείγματα

1. Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Μία ακολουθία μέτρων $(\nu_n)_{n=1}\infty$ απολύτως συνεχών ως προς το μ δεν είναι δυνατόν να συγ-κλίνει σε κάποιο μέτρο ν το οποίο δεν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.

Απόδειξη. Έστω ότι $\nu_n \xrightarrow{w^*} \nu$ για κάποιο $\nu \in \mathcal{M}(X)$. Αφού το ν_n είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{F}$ με $\mu(A)$,

$$\nu(A) = \lim_n \nu_n(A) = 0.$$

2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία στον X τ.ω. να συγκλίνει στο $x \in X$. Η ακολουθία $(\delta_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ των αντίστοιχων μέτρων Dirac συγκλίνει στο δ_x ανν η (x_n) είναι τελικά σταθερή. Έτσι, η ένθεση δ του Dirac είναι συνεχής ανν ο X έχει τη διακριτή τοπολογία.

Από εδώ και πέρα θα ασχοληθούμε κυρίως με χώρους μέτρων πιθανότητας. Όπως φαίνεται στο παράδειγμα 2, καμία από τις τοπολογίες που έχουμε ορίσει ως τώρα στο $\mathbb{P}X$ δεν σέβεται την όποια τοπολογία υπάρχει στο X. Αυτό είναι και φυσικό, αφού στον ορισμό τους δεν λαμβάνεται υπόψιν η όποια τοπολογική δομή του X. Λαμβάνοντας όμως υπόψιν την όποια τοπολογική δομή του X, μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathcal{M}(X)$ μία ακόμη ασθενέστερη τοπολογία που να σέβεται την τοπολογία του X, μέσω της απεικόνισης

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : BC(X) \times \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

όπου $BC(X)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Στη μεθεπόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε αυτή την τοπολογία στο $\mathbb{P}X$ στην περίπτωση που ο X είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Πρώτα, όμως, θα δούμε τις βασικές ιδιότητες των Borel μέτρων πιθανότητας σε μετρικούς χώρους.

6.2 Πεπερασμένα Μέτρα σε Μετρικούς Χώρους

Πολλά από τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ισχύουν για πολωνικούς χώρους. Για το λόγο αυτό ξεκινάμε με κάποια βασικά στοιχεία για πολωνικούς χώρους.

6.2.1 Πολωνικοί Χώροι

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται τοπολογικά πλήρης αν υπάρχει μετρική d η οποία να ορίζει την τοπολογία του X τ.ω. ο (X, d) να είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ορισμός 6.2.1 Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται πολωνικός χώρος αν είναι τοπολογικά πλήρης και η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση.

Ισοδύναμα, ο X είναι πολωνικός χώρος ανν υπάρχει πλήρης μετρική d στον X που να ορίζει την τοπολογία του, τ.ω. ο (X, d) να είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή ανν είναι ομοιομορφικός με κάποιο πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο.

Παραδείγματα

1. Το καρτεσιανό γινόμενο πολωνικών χώρων είναι πολωνικός χώρος με την τοπολογία γινόμενο.

2. Το διάστημα $(0, 1)$ με την ευκλείδια μετρική δεν είναι πλήρης χώρος. Όμως είναι πολωνικός χώρος αφού είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}$.

Πρόταση 6.2.1 *Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι τοπολογικά πλήρης ανν είναι G_δ υποσύνολο της πλήρωσής του.*

Απόδειξη Έστω $(\bar{X}, \bar{d})$ η πλήρωση του X. Ως συνήθως θεωρούμε το X ως πυκνό υποσύνολο του $\bar{X}$. Έστω πρώτα ότι ο X είναι G_δ υποσύνολο του $\bar{X}$, δηλαδή ότι υπάρχει ακολουθία $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ ανοικτών υποσυνόλων του $\bar{X}$ τ.ω. $X = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη $f_n : X \longrightarrow (0, \infty)$ από τον τύπο

$$f_n(x) = \frac{1}{\bar{d}(x, \bar{X} \setminus U_n)}.$$

Επίσης, για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε $g(t) = \frac{t}{1+t}$ και ορίζουμε συνάρτηση $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ από τον τύπο

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(|f_n(x) - f_n(y)|).$$

Η ρ είναι μετρική στο X. Πράγματι, είναι προφανώς συμμετρική και θετικά ορισμένη και η τριγωνική ανισότητα έπεται από το ότι η g είναι αύξουσα και υποπροσθετική. Θα δείξουμε ότι ρ είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την d και πλήρης. Προφανώς κάθε ρ-συγκλίνουσα ακολουθία είναι και d-συγκλίνουσα. Από την άλλη, η σειρά $h(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} g(|f_n(x) - f_n(y)|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $X \times X$ και αφού οι f_n είναι d-συνεχής έπεται ότι η συνάρτηση $h : X \times X \longrightarrow [0, 1]$, που ορίζεται από την παραπάνω σειρά, είναι d-συνεχής. Συνεπώς, κάθε d-συγκλίνουσα ακολουθία είναι και ρ-συγκλίνουσα.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης. Έστω, λοιπόν, $(x_n)_{n=1}^\infty$ ρ-Cauchy. Αφού $d \leq \rho$, η (x_n) είναι και d-Cauchy και άρα υπάρχει $x \in \bar{X}$ τ.ω. $x_n \xrightarrow{\bar{d}} x$. Αφού οι d και ρ είναι τοπολογικά ισοδύναμες, αν δείξουμε ότι $x \in X$, θα έχουμε δείξει το ζητούμενο. Γι' αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $x \in U_n$, ή, ισοδύναμα, ότι $\bar{d}(x, \bar{X} \setminus U_n) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως

$$\bar{d}(x, \bar{X} \setminus U_n) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{f_n(x_m)},$$

και άρα αρκεί να δείξουμε ότι η $\{f_n(x_m)\}_{m=1}^\infty \subseteq [0, \infty)$ είναι φραγμένη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι ρ-Cauchy, και έτσι υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$m, k \geq m_0 \implies \rho(x_m, x_k) < \frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}.$$

Τότε όμως για κάθε $m, k \geq m_0$ έχουμε ότι $|f_n(x_m) - f_n(x_k)| < \varepsilon$, από όπου έπεται ότι η $\{f_n(x_m)\}_{m=1}$ είναι ακολουθία Cauchy και άρα φραγμένη.

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο. Επειδή ο X είναι τοπολογικά πλήρης υπάρχει πλήρης μετρική ρ στο X, τοπολογικά ισοδύναμη με την d. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$ θέτουμε

$$U_n(\varepsilon) := \left\{ x \in \bar{X} \,\middle|\, \operatorname{diam}_\rho\big(X \cap D_{\bar{d}}(x, \varepsilon)\big) < \frac{1}{n} \right\}$$

και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $U_n := \bigcup_{\varepsilon > 0} U_n(\varepsilon)$. Θα δείξουμε ότι κάθε U_n είναι ανοικτό και $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Έστω $x \in U_n(\varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Τότε, αν $y \in D_{\bar{d}}(x, \frac{\varepsilon}{2})$, έχουμε ότι

$$\operatorname{diam}_\rho\big(X \cap D_{\bar{d}}(y, \frac{\varepsilon}{2})\big) \leq \operatorname{diam}_\rho\big(X \cap D_{\bar{d}}(x, \varepsilon)\big) < \frac{1}{n},$$

δηλαδή $y \in U_n(\frac{\varepsilon}{2})$. Έτσι $D_{\bar{d}}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U_n(\frac{\varepsilon}{2})$, και άρα το U_n είναι ανοικτό.

Αποδεικνύουμε τέλος ότι $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Έστω $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Επειδή οι d, ρ είναι τοπολογικά ισοδύναμες, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\operatorname{diam}_\rho\big(D_d(x, \varepsilon)\big) < \frac{1}{n}$ και άρα $x \in U_n(\varepsilon) \subseteq U_n$. Συνεπώς $X \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} U_n$. Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq \bar{X}$. Το X είναι πυκνό στον $\bar{X}$, και άρα υπάρχει ακολουθία (x_m) στον X τ.ω. $x_m \xrightarrow{\bar{d}} x$. Αν δείξουμε ότι η (x_m) είναι ρ-Cauchy, η απόδειξη τελειώνει, αφού τότε από την ισοδυναμία των d, ρ και την πληρότητα της ρ, θα υπάρχει $y \in X$ τ.ω. $x_m \xrightarrow{d} y$ και άρα $x_m \xrightarrow{\bar{d}} y$, από όπου έπεται ότι $x = y \in X$. Έστω, λοιπόν, $n_0 \in \mathbb{N}$. Αφού $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(n_0)$ τ.ω.

$$\operatorname{diam}_\rho\big(X \cap D_{\bar{d}}(x, \varepsilon)\big) < \frac{1}{n_0}.$$

Όμως $x_m \xrightarrow{\bar{d}} x$ και άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$m \geq m_0 \implies x_m \in D_{\bar{d}}(x, \varepsilon).$$

Τότε για κάθε $m, k \geq m_0$ έχουμε ότι

$$\rho(x_m, x_k) \leq \operatorname{diam}_\rho\big(X \cap D_{\bar{d}}(x, \varepsilon)\big) < \frac{1}{n_0},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η (x_m) είναι ρ-Cauchy και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παραδείγματα

3. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών είναι πολωνικός χώρος με την ευκλείδια τοπολογία.

Απόδειξη. Προφανώς το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι διαχωρίσιμο ως υποσύνολο του διαχωρίσιμου χώρου $\mathbb{R}$ και είναι G_δ-σύνολο στην πλήρωση του $\mathbb{R}$, αφού

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}.$$

4. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ όλων των ρητών αριθμών δεν είναι πολωνικός χώρος με την ευκλείδια τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω ότι το $\mathbb{Q}$ είναι τοπολογικά πλήρης χώρος. Τότε το $\mathbb{Q}$ θα είναι G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έτσι θα υπάρχει ακολουθία $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τ.ω. $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Τότε, όμως, ο τοπολογικά πλήρης χώρος $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ θα ισούται με την αριθμήσιμη ένωση των πουθενά πυκνών συνόλων $\mathbb{R} \setminus U_n$, το οποίο αντιφάσκει με το θεώρημα κατηγορίας του Baire.

Πόρισμα 6.2.1 *Έστω X μετρικοποιήσιμος χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Ο X είναι τοπολογικά πλήρης.*

(β) *Ο X είναι G_δ-υποσύνολο της πλήρωσής του για κάθε μετρική που ορίζει την τοπολογία του X.*

(ς) *Ο X είναι G_δ-υποσύνολο της πλήρωσής του για κάποια μετρική που ορίζει την τοπολογία του X.*

Απόδειξη Η απόδειξη είναι προφανής.

Πόρισμα 6.2.2 *Έστω Y υπόχωρος ενός πολωνικού χώρου X. Ο Y είναι πολωνικός ανν είναι G_δ-υποσύνολο του X.*

Απόδειξη Έστω d πλήρης μετρική που ορίζει την τοπολογία του X. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο Y είναι πολωνικός. Από την πρόταση 6.2.1, ο Y είναι G_δ-υποσύνολο του $\overline{Y}$. Υπάρχουν λοιπόν $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{Y} \cap U_n) = \overline{Y} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right).$$

Το $\overline{Y}$, όμως, ως κλειστό υποσύνολο του X, είναι G_δ-σύνολο, παραδείγματος χάριν $\overline{Y} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D\left(Y, \frac{1}{n}\right)$, και άρα το Y είναι G_δ-σύνολο ως τομή δύο G_δ-συνόλων.

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι το Y είναι G_δ-υποσύνολο του X. Τότε το Y είναι επίσης G_δ-υποσύνολο του $\overline{Y}$. Αφού, όμως, η d είναι πλήρης, ο $(\overline{Y}, d|_{\overline{Y}\times\overline{Y}})$ είναι η πλήρωση του Y. έπεται από την πρόταση 6.2.1 ότι ο Y είναι τοπολογικά πλήρης και άρα, αφού το Y είναι προφανώς διαχωρίσιμο, έπεται ότι ο Y είναι πολωνικός χώρος. □

Έστω X τοπολογικός χώρος. Θα θεωρούμε πάντοτε τον X ως μετρήσιμο χώρο με τη Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$, δηλαδή τη σ-άλγεβρα που παράγεται από ανοικτά υποσύνολα του X.

Ορισμός 6.2.2 Έστω X τοπολογικός χώρος. Η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ του X για την οποία όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμες λέγεται η Baire σ-άλγεβρα του X και συμβολίζεται με $\mathcal{B}a(X)$.

Παρατηρήσεις

1. Η Baire σ-άλγεβρα του τοπολογικού χώρου X είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στο X ως προς την οποία όλες οι φραγμένες και συνεχείς συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}$ η μικρότερη σ-άλγεβρα στο X ως προς την οποία όλες οι φραγμένες και συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις είναι μετρήσιμες. Προφανώς $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}a(X)$. Για το αντίστροφο, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση f είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη. Έστω, λοιπόν, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η $\arctan f$ είναι φραγμένη και συνεχής και $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη. Η $\tan$ όμως είναι $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη, και άρα η $f = \tan \arctan f$ είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη.

2. Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε $\mathcal{B}a(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Εν γένει ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\mathcal{B}a(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ είναι προφανής. Από την άλλη, αν θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{0, 1\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία $\{\emptyset, \{0\}, X\}$, τότε $\mathcal{B}a(X) = \{\emptyset, X\} \subsetneqq 2^X = \mathcal{B}(X)$.

Πρόταση 6.2.2 *Έστω X μετρικός χώρος. Τότε $\mathcal{B}a(X) = \mathcal{B}(X)$.*

Απόδειξη Αφού η $\mathcal{B}(X)$ παράγεται από τα κλειστά υποσύνολα του X, για να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}a(X)$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο είναι σύνολο Baire. Έστω $F \subseteq X$ κλειστό και έστω $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = d(x, F)$. Τότε $F = f^{-1}(\{0\})$. Η f όμως είναι $(\mathcal{B}a(X), \mathcal{B}(X))$-μετρήσιμη ως συνεχής συνάρτηση και άρα $F \in \mathcal{B}a(X)$ □

Η ακόλουθη πρόταση βασίζεται στο ότι η άλγεβρα που παράγεται από μία αριθμήσιμη συλλογή συνόλων είναι αριθμήσιμη.

Πρόταση 6.2.3 *Η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ κάθε πολωνικού χώρου X παράγεται από κάποια αριθμήσιμη άλγεβρα.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{A}_0$ αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X. Προφανώς η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A}_0)$ που παράγεται από την $\mathcal{A}_0$ ταυτίζεται με τη $\mathcal{B}(X)$. Επιπλέον, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma\big(\rho(\mathcal{A}_0)\big)$, όπου $\rho(\mathcal{A}_0)$ είναι η άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}_0$. Αν δείξουμε λοιπόν ότι η $\rho(\mathcal{A}_0)$ είναι αριθμήσιμη, θα έχουμε τελειώσει. Θέτουμε $\mathcal{A}_0^c := \{A^c | \, A \in \mathcal{A}_0\}$ και $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_0^c$. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ που αποτελείται από όλες τις πεπερασμένες ενώσεις πεπερασμένων τομών της $\mathcal{A}'$ είναι προφανώς αριθμήσιμη και περιέχει το $\emptyset$ και το X. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A} = \rho(\mathcal{A}_0)$. Ο εγκλεισμός $\mathcal{A} \subseteq \rho(\mathcal{A}_0)$ είναι προφανής. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Καταρχάς, η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, αφού αν $A := \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n A_{ij}$, $A_{ij} \in \mathcal{A}'$, είναι κάποιο στοιχείο της $\mathcal{A}$, τότε

$$A^c = \bigcap_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n A_{ij}^c \quad = \bigcup_{j_1, \ldots, j_m = 1}^n \bigcap_{i=1}^m A_{ij_i}^c,$$

το οποίο ανήκει στην $\mathcal{A}$. Δεύτερον, η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τομές, αφού αν $A := \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n A_{ij} \in \mathcal{A}$ και $B := \bigcup_{k=1}^p \bigcap_{l=1}^q B_{kl} \in \mathcal{A}$, τότε

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{k=1}^p \bigcap_{j=1}^n \bigcap_{l=1}^q A_{ij} \cap B_{kl},$$

το οποία ανήκει στην $\mathcal{A}$ και άρα η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα όπως θέλαμε. □

6.2.2 Σφικτότητα

Συχνά χρειάζεται να προσεγγίζουμε μέτρα μετρήσιμων συνόλων από μέτρα πιο ομαλών συνόλων, όπως ανοικτά, κλειστά ή συμπαγή. Σ' αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι σε ένα πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο έχουμε πάντοτε αυτή τη δυνατότητα.

Ορισμός 6.2.3 Έστω X τοπολογικός χώρος, $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα στον X, και μ ένα μέτρο στην $\mathcal{F}$. Ένα σύνολο A λέγεται *μ-κανονικό* αν

$$\mu(A) = \sup\{\, \mu(K) \,|\, K \text{ συμπαγές},\ K \subseteq A,\ K \in \mathcal{F}\}.$$

Ομοίως, το A λέγεται *μ-κλειστά κανονικό* αν

$$\mu(A) = \sup\{\, \mu(F) \,|\, F \text{ κλειστό},\ F \subseteq A,\ F \in \mathcal{F}\}.$$

Το μ λέγεται *(κλειστά) κανονικό* αν κάθε σύνολο στην $\mathcal{F}$ είναι (κλειστά) κανονικό. Ένα πεπερασμένο μέτρο μ λέγεται *σφικτό* αν το X είναι κανονικό, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο K_ε τ.ω.

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Παρατήρηση

3. Έστω $A \in \mathcal{F}$. Το A είναι κλειστά μ-κανονικό αν το $X \setminus A$ είναι εξωτερικά μ-κανονικό, δηλαδή ανν

$$\mu(X \setminus A) = \inf\{\, \mu(U) \,|\, U \text{ ανοικτό}, U \supseteq X \setminus A, U \in \mathcal{F}\}.$$

4. Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων απεικονίζουν σφικτά μέτρα σε σφικτά μέτρα.

Απόδειξη. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση και μ σφικτό μέτρο Borel στον X. Τότε το $f_*\mu$ είναι σφικτό. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι σφικτό, υπάρχει συμπαγές $K \subseteq X$ τ.ω. $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$. Τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές και

$$f_*\mu\big(f(K)\big) = \mu\Big(f^{-1}\big(f(K)\big)\Big) \geq \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Το ακόλουθο λήμμα βοηθάει πολλές φορές να δείξουμε ότι μία σ-άλγεβρα σε κάποιο τοπολογικό χώρο αποτελείται από μ-κανονικά μέτρα.

Λήμμα 6.2.1 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff τοπολογικός χώρος, $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στο X και μ πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{F}$. Θέτουμε*

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathcal{F} \,|\, \text{τα } A,\ X \setminus A \text{ είναι κλειστά κανονικά ως προς το } \mu\}.$$

Τότε η $\mathcal{R}$ είναι σ-άλγεβρα. Αν το μ είναι σφικτό, τότε η πρόταση ισχύει και αν στον ορισμό της $\mathcal{R}$ αντικαταστήσουμε τη φράση κλειστά κανονικό με τη φράση κανονικό.

Απόδειξη Προφανώς η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και περιέχει το $\emptyset$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{R}$. Θέτουμε $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Πρέπει να δείξουμε ότι το A είναι κλειστά και εξωτερικά μ-κανονικό. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού κάθε A_n είναι κλειστά και εξωτερικά κανονικό, υπάρχουν κλειστά σύνολα F_n και ανοικτά σύνολα U_n, $n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$F_n \subseteq A_n \subseteq U_n, \quad \mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Τότε το σύνολο $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι ανοικτό και

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus A) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς το A είναι εξωτερικά κανονικό. Επειδή μη-πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι απαραίτητα κλειστό σύνολο, χρησιμοποιούμε τη συνέχεια του μ από κάτω και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3}$$

και θέτουμε $F := \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n$. Τότε

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) \setminus F\right) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \mu(A_n \setminus F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

και άρα αφού $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$, έχουμε ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) \leq \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. Από την ανισότητα αυτή και την (6.3) έπεται ότι $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$ και συνεπώς το A είναι κλειστά κανονικό.

Η περίπτωση όπου το μ είναι σφικτό είναι όμοια. $\square$

Πρόταση 6.2.4 *Κάθε πεπερασμένο μέτρο* Borel *σε ένα μετρικό χώρο είναι κλειστά κανονικό και κάθε σφικτό μέτρο είναι κανονικό.*

Απόδειξη Έστω (X, d) μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο Borel μέτρο στον X. Αφού η $\mathcal{B}(X)$ παράγεται από τα ανοικτά υποσύνολα του X αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο στο X περιέχεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{R}$ της προηγούμενης πρότασης. Έστω, λοιπόν, $U \subseteq X$ ανοικτό. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = \left\{x \in X \mid d(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό και αφού το U είναι ανοικτό έχουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = U$. Από τη συνέχεια του μ από κάτω $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} F_m\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mu(U)$ και άρα το U είναι κλειστά μ-κανονικό.

Έστω, τώρα, ότι το μ είναι σφικτό και έστω B Borel υποσύνολο του X. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη σφικτότητα του μ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$ τ.ω. $\mu(X \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Όμως το μ είναι κλειστά κανονικό από τα παραπάνω και άρα υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του B τ.ω. $\mu(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε το $L := K \cap F \subseteq B$ είναι συμπαγές και

$$\begin{aligned}\mu(B \setminus L) &= \mu\big((B \setminus L) \cup (B \setminus F)\big) \leq \mu(b \setminus K) + \mu(B \setminus F) \\ &\leq \mu(X \setminus K) + \mu(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Συνεπώς το μ είναι κανονικό. □

Σύμφωνα με το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα, κάθε πεπερασμένο Borel μέτρο σε ένα πολωνικό χώρο είναι κανονικό.

Θεώρημα 6.2.1 (Το θεώρημα του Ulam) *Έστω X πολωνικός χώρος και έστω μ πεπερασμένο* Borel *μέτρο στον X. Τότε το μ είναι σφικτό και άρα κανονικό.*

Απόδειξη Έστω d πλήρης μετρική που ορίζει την τοπολογία του X και έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε συμπαγές υποσύνολο K του X τ.ω. $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$. Έστω $\{x_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Για κάθε $r > 0$, έχουμε ότι $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r)$. Έτσι, από τη συνέχεια του μ από κάτω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i, \frac{1}{n})\right) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Θέτουμε $K_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i, \frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε K_n είναι κλειστό και αν $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, τότε

$$\mu(X \setminus K) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus K_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Αν δείξουμε ότι το K είναι συμπαγές η απόδειξη ολοκληρώνεται. Επειδή ο X είναι πλήρης, αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Αυτό όμως είναι προφανές, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$, αν $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i, \frac{1}{n}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i, \varepsilon)$ □

Για να αποδείξουμε ότι η ασθενής τοπολογία στον $\mathbb{P}X$ (ως προς την οικογένεια των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων) είναι μετρικοποιήσιμη όταν ο X είναι πολωνικός χώρος, χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.2.5 *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος, $f \in BC(X)$ και $\mathcal{U} \subseteq BC(X)$ μία οικογένεια τ.ω. $f \leq u \leq R < \infty$ για κάθε $u \in \mathcal{U}$ και $f = \inf_{u \in \mathcal{U}} u$. Αν η $\mathcal{U}$ είναι κατευθυνόμενη ως προς τη σχέση $\geq$, δηλαδή αν για κάθε $u, v \in \mathcal{U}$ υπάρχει $w \in \mathcal{U}$ τ.ω. $u \wedge v \geq w$, τότε*

$$\int_X f d\mu = \inf_{u \in \mathcal{U}} \int_X u d\mu,$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{P}^T X$.

Απόδειξη Έστω $\mu \in \mathbb{P}X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι σφικτό, υπάρχει συμπαγές $K \subseteq X$ τ.ω.

$$\mu(X \setminus K) < \varepsilon\big(2(\|f\|_u + R + 1)\big)^{-1}.$$

Αφού $f = \inf_{u \in \mathcal{U}} u$, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $u_x \in \mathcal{U}$ τ.ω. $0 \leq u_x(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Από τη συνέχεια της f, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x^{(1)} > 0$ τ.ω.

$$d(y,x) < \delta_x^{(1)} \implies f(y) \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{8},$$

και από τη συνέχεια των u_x υπάρχει για κάθε $x \in X$ κάποιος $\delta_x^{(2)} > 0$ τ.ω.

$$d(y,x) < \delta_x^{(2)} \implies u_x(y) \leq u_x(x) + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Θέτουμε $\delta_x := \delta_x^{(1)} \wedge \delta_x^{(2)} > 0$. Η οικογένεια $\{D(x,\delta_x)\}_{x \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς K και άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$, $m \in \mathbb{N}$, τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m D(x_i, \delta_{x_i})$. Από τις υποθέσεις, η $\mathcal{U}$ είναι κατευθυνόμενη ως προς την $\geq$, και άρα υπάρχει $u \in \mathcal{U}$ τ.ω. $\bigwedge_{i=1}^m u_{x_i} \geq u$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in K} |u(x) - f(x)| &\leq \bigvee_{i=1}^m \sup_{x \in D(x_i, \delta_{x_i})} \big(u(x) - f(x)\big) \\
&\leq \bigvee_{i=1}^m \sup_{x \in D(x_i, \delta_{x_i})} \big(u_{x_i}(x) - f(x)\big) \\
&\leq \bigvee_{i=1}^m \sup_{x \in D(x_i, \delta_{x_i})} \Big(\big(u_{x_i}(x_i) - f(x_i)\big) + \frac{\varepsilon}{4}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_X u d\mu - \int_X f d\mu &= \int_X (u-f) d\mu = \int_K (u-f) d\mu + \int_{X \setminus K} (u-f) d\mu \\
&\leq \varepsilon/2 \cdot \mu(K) + (R + \|f\|_u) \cdot \mu(X \setminus K) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. □

Η τελευταία έννοια που θα δούμε σ' αυτή την παράγραφο είναι του φορέα ενός μέτρου. Διαισθητικά, ο φορέας ενός μέτρου μ, αν υπάρχει, είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο στο οποίο "ζει" το μέτρο μ. Όπως θα δούμε, ο φορέας ενός Borel μέτρου σε ένα πλήρη μετρικό χώρο υπάρχει ανν το μέτρο αυτό είναι σφικτό.

Ορισμός 6.2.4 Έστω X μετρικός χώρος και έστω μ ένα Borel μέτρο στον X. Λέμε ότι το μ στηρίζεται στο $F \in \mathcal{B}(X)$ αν $\mu(X \setminus F) = 0$. Το F θα λέγεται ένα στήριγμα του μ. Αν υπάρχει ελαχιστικό ως προς τον εγκλεισμό κλειστό στήριγμα Φ για το μ, αυτό είναι προφανώς μοναδικό και λέγεται ο φορέας του μ. Συμβολίζεται suppμ, sptμ, ή $\Phi(\mu)$.

Πρόταση 6.2.6 *Έστω X μετρικός χώρος και μ Borel μέτρο στον X. Τότε το κλειστό σύνολο*

$$\Phi_1 := \bigcap \big\{ F \subseteq X \;\big|\; F \text{ κλειστό και } \mu(X \setminus F) = 0 \big\}$$

ισούται με το σύνολο

$$\Phi_2 := \big\{ x \in X \;\big|\; \mu\big(D(x,r)\big) > 0 \text{ για κάθε } r > 0 \big\}.$$

Επιπλέον, αν το μ στηρίζεται από κάποιο διαχωρίσιμο σύνολο, τότε $\mu(X \setminus \Phi_2) = 0$ και άρα ο φορέας του μ υπάρχει.

Απόδειξη "$\Phi_2 \subseteq \Phi_1$" Έστω $x \in \Phi_2$ και έστω F κλειστό υποσύνολο του X τ.ω. $\mu(X \setminus F) = 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in F$. Υποθέτουμε ότι $x \notin F$. Υπάρχει τότε $r_x > 0$ τ.ω. $D(x, r_x) \cap F = \emptyset$. Αφού όμως $x \in \Phi_2$, έπεται ότι

$$\mu(X \setminus F) \geq \mu\big(D(x, r_x)\big) > 0$$

το οποίο είναι άτοπο.
"$\Phi_1 \subseteq \Phi_2$" Δείχνουμε ισοδύναμα ότι $X \setminus \Phi_2 \subseteq X \setminus \Phi_1$. Έστω, λοιπόν, $x \notin \Phi_2$. Υπάρχει τότε $r > 0$ τ.ω. $\mu\big(D(x, r)\big) = 0$. Τότε όμως το $F := X \setminus D(x, r)$ είναι κλειστό και $\mu(X \setminus F) = 0$, ενώ $x \notin F$. Άρα $x \notin \Phi_1$.

Έστω τώρα ότι το μ στηρίζεται από κάποιο διαχωρίσιμο σύνολο $X_0 \in \mathcal{B}(X)$. Μπορούμε φυσικά να υποθέσουμε ότι το X_0 είναι κλειστό, και άρα $\Phi_2 \subseteq X_0$. Αφού το X_0 στηρίζει το μ, για να δείξουμε ότι $\mu(X \setminus \Phi_2) = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(X_0 \setminus \Phi_2) = 0$. Το σύνολο

$$X_0 \setminus \Phi_2 = \big\{x \in X_0 \,\big|\, \exists\, r > 0 \ \text{ τ.ω. } \ \mu\big(D(x, r)\big) = 0\big\},$$

είναι ανοικτό στο X_0 και άρα για κάθε $x \in X_0 \setminus \Phi_2$ υπάρχει ρητός $r_x > 0$ τ.ω. $X_0 \cap D(x, r_x) \subseteq X_0 \setminus \Phi_2$ και $\mu\big(D(x, r_x)\big) = 0$. Έστω Q πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο του X_0. Για κάθε $x \in X_0$, υπάρχει $q_x \in Q$ τ.ω. $d(q_x, x) < \frac{r_x}{2}$. Τότε για κάθε $x \in X_0$ έχουμε ότι

$$x \in X_0 \cap D\big(q_x, \frac{r_x}{2}\big) \subseteq X_0 \cap D(x, r_x).$$

Συνεπώς $X_0 \setminus \Phi_2 \subseteq \bigcup \big\{D\big(q_x, \frac{r_x}{2}\big) \,\big|\, x \in X_0\big\}$ και άρα αφού αυτή η ένωση είναι αριθμήσιμη, έχουμε ότι

$$\mu(X_0 \setminus \Phi_2) \leq \sum_{x \in X_0 \setminus \Phi_2} \mu\left(D\big(q_x, \frac{r_x}{2}\big)\right) \leq \sum_{x \in X_0 \setminus \Phi_2} \mu\big(D(x, r_x)\big) = 0,$$

όπως θέλαμε. □

Πόρισμα 6.2.3 *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ο φορέας κάθε* Borel *μέτρου υπάρχει.*

Πόρισμα 6.2.4 *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και μ ένα* Borel *μέτρο. Το μ στηρίζεται από κάποιο διαχωρίσιμο σύνολο ανν είναι σφικτό.*

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι το μ είναι σφικτό. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει συμπαγές K_n, τ.ω. $\mu(K_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$. Τότε, το σύνολο $K := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι σ-συμπαγές και άρα διαχωρίσιμο και

$$\mu(K) = \lim_{m \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} K_n\right) \geq \lim_{m \to \infty} \mu(K_m) \geq \lim_{m \to \infty} (1 - \frac{1}{m}) = 1.$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την κατεύθυνση δεν χρειάζεται η πληρότητα του X. Αντίστροφα, έστω ότι το μ στηρίζεται από κάποιο διαχωρίσιμο σύνολο $X_0 \in \mathcal{B}(X)$. Τότε το μ στηρίζεται από το $\overline{X_0}$ που είναι διαχωρίσιμο και πλήρες. Έτσι το μ είναι σφικτό από το θεώρημα του Ulam. □

Πρόταση 6.2.7 *Έστω μ σφικτό* Borel *μέτρο στο μετρικό χώρο X και έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση. Ο φορέας του $f_*\mu$ υπάρχει και*

$$f(\mathrm{supp}\mu) \subseteq \mathrm{supp} f_*\mu = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)}.$$

Απόδειξη Προφανώς, ο φορέας του $f_*\mu$ υπάρχει, αφού το $f_*\mu$ είναι σφικτό. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\mathrm{supp} f_*\mu \subseteq \overline{f(\mathrm{supp}\mu)}$. Παρατηρούμε ότι το $f_*\mu$ στηρίζεται από το $f(\mathrm{supp}\mu)$, αφού

$$f_*\mu\big(f(\mathrm{supp}\mu)\big) = \mu\Big(f^{-1}\big(f(\mathrm{supp}\mu)\big)\Big) \geq \mu(\mathrm{supp}\mu) = 1$$

και, έτσι, ο ζητούμενος εγκλεισμός έπεται από τον ορισμό του $\mathrm{supp} f_*\mu$. Αποδεικνύουμε τώρα τον άλλο εγκλεισμό. Έστω $y \in f(\mathrm{supp}\mu)$ και $\varepsilon > 0$. Από την πρόταση 6.2.6 έχουμε ότι $f_*\mu\left(D\big(f(x), \varepsilon\big)\right) > 0$. Όμως $y = f(x)$ για κάποιο $x \in \mathrm{supp}\mu$ και από τη συνέχεια της f υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $f\big(D(x, \delta)\big) \subseteq D\big(f(x), \varepsilon\big)$. Συνεπώς

$$f_*\mu\Big(D\big(f(x), \varepsilon\big)\Big) \geq \mu\big(D(x, \delta)\big) > 0$$

και άρα $f(\mathrm{supp}\mu) \subseteq \mathrm{supp} f_*\mu$. Η ζητούμενη ισότητα έπεται από αυτό τον εγκλεισμό και από το ότι το $\mathrm{supp} f_*\mu$ είναι κλειστό. □

Πρόταση 6.2.8 *Έστω μ_1, μ_2* Borel *μέτρα στους μετρικούς χώρους X_1, X_2 αντίστοιχα. Αν οι φορείς των μ_1, μ_2 υπάρχουν, τότε υπάρχει και ο φορέας του $\mu_1 \otimes \mu_2$ και*

$$\mathrm{supp}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \mathrm{supp}\mu_1 \times \mathrm{supp}\mu_2.$$

Απόδειξη Το $\mathrm{supp}\mu_1 \times \mathrm{supp}\mu_2$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο και στηρίζει το $\mu_1 \otimes \mu_2$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι αν το F είναι κάποιο κλειστό σύνολο που στηρίζει το $\mu_1 \otimes \mu_2$, τότε $\mathrm{supp}\mu_1 \times \mathrm{supp}\mu_2 \subseteq F$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathrm{supp}\mu_1 \times \mathrm{supp}\mu_2$, κάθε ε-περιοχή του (x, y) περιέχει κάποια περιοχή της μορφής $D(x, \delta) \times D(y, \delta)$, $\delta > 0$, η οποία προφανώς έχει θετικό μέτρο ως προς το $\mu_1 \otimes \mu_2$. Επειδή τώρα το κλειστό σύνολο F στηρίζει το $\mu_1 \otimes \mu_2$, έπεται από την πρόταση 6.2.6 ότι $(x, y) \in F$. □

6.3 Η Ασθενής Τοπολογία του $\mathbb{P}X$

Έστω X τοπολογικός χώρος. Όπως είδαμε στην πρώτη ενότητα του πρώτου κεφαλαίου, η ασθενής τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \subseteq (B(X)^*, w^*)$, καθώς και η ισχυρή τοπολογία της νόρμας ολικής κύμανσης, δεν σέβονται την τοπολογία του X (αφού, άλλωστε, δεν την λαμβάνουν υπόψιν στον ορισμό τους) και είναι πολύ ισχυρές ώστε να μας δίνουν τη δυνατότητα να προσεγγίζουμε μέτρα από άλλα απλούστερα μέτρα, όπως θα θέλαμε. Όπως θα δούμε όμως, η ασθενής τοπολογία στο $\mathbb{P}X$ ως προς την οικογένεια των *συνεχών* και φραγμένων συναρτήσεων είναι αρκετά ασθενής ώστε να σέβεται την τοπολογία του X και να μας επιτρέπει να προσεγγίζουμε μέτρα από άλλα απλούστερα: π.χ. κάθε φορτίο $\nu \in \mathcal{M}(X)$ είναι όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac.

Έστω X τοπολογικός χώρος. Θέτουμε $C(X)$ το σύνολο όλων των φραγμένων συναρτήσεων και $BC(X)$ το σύνολο όλων των φραγμένων και συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο X. Υπενθυμίζουμε ότι με $I : \mathcal{M}(X) \longrightarrow B(X)^*$ και $J : B(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)^*$ συμβολίζουμε τις γραμμικές ενθέσεις που ορίζονται από την

$$I(\mu)(f) = \int_X f d\mu = J(f)(\mu).$$

Ορισμός 6.3.1 Έστω X τοπολογικός χώρος. Η ασθενής τοπολογία w_Ξ που επάγεται στον $\mathcal{M}(X)$ από τη συλλογή $\Xi \subseteq BC(X)$ είναι η ασθενής τοπολογία που επάγεται στον $\mathcal{M}(X)$ από τη συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών

$$\{J(f) \,|\, f \in \Xi\} \subseteq \mathcal{M}(X)^*.$$

Η ασθενής τοπολογία w_0 του $\mathcal{M}(X)$ είναι η ασθενής τοπολογία που επάγεται στο $\mathcal{M}(X)$ από την $BC(X)$. Ομοίως, η ασθενής τοπολογία w_0 του $\mathbb{P}X$ είναι η σχετική τοπολογία του $\mathbb{P}X \subseteq (\mathcal{M}(X), w_0)$.

Με άλλα λόγια, ένα δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ στον $\mathcal{M}(X)$ συγκλίνει στο $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ανν

$$\int_X f d\mu_i \xrightarrow{i} \int_X f d\mu, \tag{6.4}$$

για κάθε $f \in BC(X)$. Φυσικά, ο $(\mathcal{M}(X), w_0)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις. Από εδώ και πέρα λέγοντας ασθενής τοπολογία στους $\mathcal{M}(X)$ και $\mathbb{P}X$ θα εννοούμε πάντοτε την ασθενή τοπολογία w_0.

Η ασθενής τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$ είναι προφανώς ασθενέστερη από την τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \leq (B(X)^*, w^*)$. Επιπλέον, η ένθεση του Dirac $\delta : X \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ είναι συνεχής, απ' όπου έπεται ότι εκτός και αν ο X έχει τη διακριτή τοπολογία, τότε η ασθενής τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$ είναι γνήσια ασθενέστερη από την τοπολογία του $\mathcal{M}(X) \leq (B(X)^*, w^*)$.

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, αν ο X είναι μετρικός χώρος, τότε η συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών $\{J(f) \,|\, f \in BC(X)\} \subseteq \mathcal{M}(X)^*$ διαχωρίζει τα σημεία του $\mathcal{M}(X)$, και άρα η ασθενής τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$ είναι Hausdorff.

Πρόταση 6.3.1 *Έστω X μετρικός χώρος. Η απεικόνιση $I_C : \mathcal{M}(X) \longrightarrow BC(X)^*$ με τύπο $I_C(\mu) = I(\mu)|_{BC(X)}$ είναι γραμμικός μονομορφισμός και διατηρεί τις νόρμες.*

Απόδειξη Προφανώς η $I_C(\mu) : BC(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμική για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X)$ και η I_C είναι γραμμική. Θα δείξουμε πρώτα ότι η I_C είναι ένθεση, δηλαδή ότι αν $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ και $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ για κάθε $f \in BC(X)$, τότε $\mu = \nu$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που τα μ, ν είναι θετικά μέτρα. Αφού η $\mathcal{B}(X)$ παράγεται από τα κλειστά υποσύνολα του X, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mu(F) = \nu(F)$ για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq X$ τ.ω. $\varepsilon := |\mu(F) - \nu(F)| > 0$. Αφού ο X είναι μετρικός χώρος, τα μ, ν είναι κλειστά κανονικά και άρα υπάρχει ανοικτό σύνολο $F \subseteq U \subseteq X$ τ.ω. $\mu(U \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\nu(U \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Αφού ο X είναι κανονικός τοπολογικός χώρος ως μετρικός χώρος, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X :\longrightarrow [0, 1]$ τ.ω. $\mathbb{1}_F \leq g \leq \mathbb{1}_U$. Όμως τότε,

$$\mu(F) \leq \int_X g d\mu = \int_X g d\nu \leq \nu(U) \leq \nu(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ομοίως βλέπουμε ότι $\nu(F) \leq \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς $|\mu(F) - \nu(F)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, το οποίο είναι άτοπο.

Ερχόμαστε τώρα στη γενική περίπτωση. Έστω, λοιπόν, $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ τ.ω. $I_C(\mu) = I_C(\nu)$. Από τη γραμμικότητα της I_C, έπεται ότι $I_C(\mu^+ + \nu^-) = I_C(\mu^- + \nu^+)$, το οποίο απ' το πρώτο μέρος της απόδειξης, συνεπάγεται ότι $\mu^+ + \nu^- = \mu^- + \nu^+$, δηλαδή ότι $\mu = \nu$.

Δείχνουμε, τέλος, ότι η I_C είναι ισομετρία στην εικόνα της. Έστω, λοιπόν, $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Προφανώς

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{f\in B(X),\, \|f\|_u=1} |I_\mu(f)| \geq \sup_{f\in BC(X),\, \|f\|_u=1} |I_C(\mu)(f)| = \|I_C(\mu)\|^*_{BC(X)}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $X = P \cup N$ μία ανάλυση Hahn του X για το μ. Τα μέτρα μ^+ και μ^- είναι κλειστά κανονικά. Συνεπώς, υπάρχουν κλειστά σύνολα $F_P, F_N \subseteq X$ και ανοικτά $U_P, U_N \subseteq X$, τ.ω. $F_P \subseteq P \subseteq U_P$, $F_N \subseteq N \subseteq U_N$, $F_P \cap U_N = \emptyset$, $F_N \cap U_P = \emptyset$ και

$$\mu^+(U_P \setminus F_P) \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mu^-(U_N \setminus F_N) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Επειδή ο X είναι κανονικός, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $g_P, g_N : X \longrightarrow [0,1]$ τ.ω. $\mathbb{1}_{F_P} \leq g_P \leq \mathbb{1}_{U_P}$ και $\mathbb{1}_{F_N} \leq g_N \leq \mathbb{1}_{U_N}$. Θέτουμε $g := g_P - g_N$. Τότε $\|g\|_u = 1$ και

$$\begin{aligned}
\Big| |I_C(\mu)(g)| - \|\mu\|_{TV} \Big| &\leq \left| \int_X g d\mu - \int_X (\mathbb{1}_P - \mathbb{1}_N) d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_X (g_P - \mathbb{1}_P) d\mu \right| + \left| \int_X (g_N - \mathbb{1}_N) d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_X g_P d\mu^+ - \mu^+(P) \right| + \left| \int_X g_N d\mu^- - \mu^-(N) \right| + \\
&+ \left| \int g_P d\mu^- \right| + \left| \int g_N d\mu^+ \right| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έπεται ότι

$$\|I_C(\mu)\|^*_{BC(X)} = \sup_{f\in BC(X),\, \|f\|_u=1} |I_C(\mu)(f)| \geq |I_C(\mu)(g)| = \|\mu\|_{TV},$$

όπως ζητούσαμε. □

Παρατηρήσεις

1. Σύμφωνα με αυτή την πρόταση, μπορούμε να θεωρούμε τον $\mathcal{M}(X)$ ως γραμμικό υπόχωρο του $BC(X)^*$, και η ασθενής τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$ είναι ακριβώς η τοπολογία που έχει ο $\mathcal{M}(X)$ ως υπόχωρος του $(BC(X)^*, w^*)$. Ειδικότερα, ο $\mathbb{P}X$ είναι γραμμικά κυρτός υπόχωρος της μοναδιαίας σφαίρας του $(BC(X)^*, w^*)$.

2. Η απόδειξη αυτής της πρότασης ισχύει και στην περίπτωση που ο X είναι κανονικός τοπολογικός χώρος, αν αντικαταστήσουμε τον $\mathcal{M}(X)$ με το χώρο $\mathcal{M}_{CR}(X)$ όλων των κλειστά κανονικών και πεπερασμένων φορτίων στον X.

Παραδείγματα

1. Η ένθεση του Dirac $\delta : X \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ είναι συνεχής ως προς την ασθενή τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$.

2. Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ το μέτρο Lebesgue. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $f_n := n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ και $\mu_n := f_n d\mu$. Τότε $\mu_n \longrightarrow \delta_0$ στην ασθενή τοπολογία του $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $g \in BC(\mathbb{R})$. Από τη συνέχεια της g έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}\int g d\mu_n &= \int g f_n dm = n \int g \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} dm \\ &= \frac{1}{m([0,\frac{1}{n}])} \int_{[0,\frac{1}{n}]} g dm \longrightarrow g(0) = \int g d\delta_0\end{aligned}$$

3. Γενικότερα, έστω $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $r > 0$ θέτουμε

$$f_r(x) = r^n f(rx), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε $\mu_r := f_r dm \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int f dm\right) \delta_0$.

Απόδειξη. Για κάθε $r > 0$ θεωρούμε την απεικόνιση $H_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο $H_r(x) = rx$. Όπως ξέρουμε, $H_{r*}m = \frac{1}{r^n}m$. Έστω $g \in BC(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $r > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int g d\mu_r &= \int g f_r dm = r^n \int g(f \circ H_r) dm \\ &= r^n \int (g \circ H_r^{-1}) f d(H_r)_*(m) = \int (g \circ H_r^{-1}) f dm.\end{aligned}$$

Από τη συνέχεια της g, έπεται ότι $(g \circ H_r^{-1})f \longrightarrow g(0)f$ κατά σημείο στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, $|(g \circ H_r^{-1})f| \leq \|g\|_u |f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και, έτσι, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι κάθε μέτρο στον $\mathbb{P}X$ μπορεί να προσεγγιστεί από διακριτά μέτρα, δηλαδή από κυρτούς συνδυασμούς μέτρων Dirac. Από αυτό έπεται ειδικότερα ότι ο $\mathbb{P}X$ είναι διαχωρίσιμος ανν ο X είναι. Αυτή την ιδιότητα της ασθενούς τοπολογίας στον $\mathbb{P}X$ θα τη συναγάγουμε από τον ακόλουθο χαρακτηρισμό της κλειστής γραμμικά κυρτής θήκης ενός συνόλου $A \subseteq (\mathbb{P}X, w_0)$, ο οποίος βασίζεται στο ότι ο $(\mathbb{P}X, w_0)$ είναι κυρτός υπόχωρος του $(BC(X)^*, w^*)$.

Πρόταση 6.3.2 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $A \subseteq \mathbb{P}X$ και $\mu \in \mathbb{P}X$. Τότε*

$$\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)} \iff \int_X f d\mu \leq \sup_{\nu \in A} \int_X f d\nu, \ \forall f \in BC(X).$$

Απόδειξη Η απόδειξη βασίζεται στην ακόλουθη συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach: αν ο X είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος, το K είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X και $x_0 \in X$, τότε

$$x_0 \in K \iff x^*(x_0) \leq \sup\{x^*(x) \mid x \in K\}, \ \forall x^* \in X^*.$$

Καταρχάς, αφού το $\mathbb{P}X$ είναι γραμμικά κυρτό, έχουμε ότι $\mathrm{co}(A) \subseteq \mathbb{P}X$. Έστω $\overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}$ η κλειστή θήκη του $\mathrm{co}(A)$ στον $(BC(X)^*, w^*)$. Τότε

$$\overline{\mathrm{co}(A)} = \ \mathbb{P}X \cap \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}.$$

Συνεπώς, $\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}$ ανν $\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}$, αφού $\mu \in \mathbb{P}X$. Όμως ο $(BC(X)^*, w^*)$ είναι τοπικά κυρτός με $(BC(X)^*, w^*)^* = BC(X)$, και άρα από τη συνέπεια του Hahn-Banach που αναφέραμε, έπεται ότι

$$\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X f d\mu \leq \sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}} G(f), \ \ \forall\, f \in BC(X).$$

Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in BC(X)$, έχουμε

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}} G(f) = \sup_{\nu \in A} \int_X f d\nu.$$

Η μία ανισότητα είναι προφανής. Για την αντίστροφη, παρατηρούμε ότι από τη γραμμικότητα του $\int f d\nu$ ως προς το ν έχουμε ότι

$$\sup_{\nu \in \mathrm{co}(A)} \int_X f d\nu = \sup_{\nu \in A} \int_X f d\nu,$$

για κάθε $f \in BC(X)$, και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in BC(X)$,

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}} G(f) \leq \sup_{\nu \in \mathrm{co}(A)} \int_X f d\nu.$$

Έστω $f \in BC(X)$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $F \in \overline{\mathrm{co}(A)} \subseteq (BC(X)^*, w^*)$ τ.ω.

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^{w^*}} G(f) \leq F(f) + \varepsilon.$$

Το σύνολο $U := \big\{G \in BC(X)^* \,\big|\, |G(f) - F(f)| < \varepsilon\big\}$, είναι υποβασική περιοχή του $F \in \overline{\mathrm{co}(A)}$, και συνεπώς υπάρχει $\nu \in \mathrm{co}(A) \cap U \subseteq \mathbb{P}X$. Τότε,

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}} G(f) \leq F(f) + \varepsilon \leq \int_X f d\nu + 2\varepsilon \leq \sup_{\nu \in \mathrm{co}(A)} \int_X f d\nu + 2\varepsilon,$$

όπως θέλαμε. $\square$

Πρόταση 6.3.3 *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Τότε ο $\mathbb{P}X$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη Έστω D αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Για κάθε $\mu \in \mathbb{P}X$ και κάθε $f \in BC(X)$, έχουμε ότι

$$\int f d\mu \leq \sup_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} \int f d\delta_x = \sup_{\nu \in \delta(D)} \int f d\nu.$$

Συνεπώς, από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι $\mathbb{P}X = \overline{\text{co}(\delta(D))}$. Τώρα, το σύνολο

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{Q},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in D,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

είναι προφανώς αριθμήσιμο, και από τη συνέχεια των πράξεων του $\mathcal{M}(X)$ ως προς την ασθενή τοπολογία έπεται ότι $\overline{K} = \overline{\text{co}(\delta(D))}$. Συνεπώς ο $\mathbb{P}X$ είναι διαχωρίσιμος. □

<u>Παρατήρηση</u>

3. Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{Q},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in X,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

είναι πυκνό στον $\mathbb{P}X$. Επιπλέον, κάθε $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in K$, μπορεί να κανονικοποιηθεί στη μορφή $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \delta_{y_i}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και κάποια $y_1, \ldots, y_m \in D$.

Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στην ασθενή τοπολογία του $\mathbb{P}X$. Θα δείξουμε καταρχάς ότι όταν ο X είναι διαχωρίσιμος, η ασθενής τοπολογία είναι μετρικομοιήσιμη. Τα ακόλουθα δύο λήμματα είναι χρήσιμα για αυτό το σκοπό.

Λήμμα 6.3.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f_1, \ldots, f_n \in BL(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε*

$$\text{Lip}\Big(\mathop{*}_{i=1}^{n} f_i \Big) \leq \bigvee_{i=1}^{n} \text{Lip}(f_i), \quad * = \bigwedge \text{ or } \bigvee.$$

Λήμμα 6.3.2 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος.*

(α) *Για κάθε φραγμένη από κάτω, κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, υπάρχει ακολουθία $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φραγμένων* Lipschitz *συναρτήσεων στο X, τ.ω. $f_k \leq f$ και $f_k \nearrow f$ κατά σημείο.*

(β) *Για κάθε φραγμένη από πάνω, άνω ημισυνεχής συνάρτηση $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$, υπάρχει ακολουθία $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ φραγμένων* Lipschitz *συναρτήσεων στο X, τ.ω. $f \leq f_k$ και $f^k \searrow f$ κατά σημείο.*

(γ) *Για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, υπάρχουν ακολουθίες $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}, (f^k)_{k \in \mathbb{N}}$, φραγμένων* Lipschitz *συναρτήσεων στο X, τ.ω. $f_k \leq f \leq f^k$ και $f_k \nearrow f$, $f^k \searrow f$ κατά σημείο.*

Απόδειξη (α) Έστω $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ φραγμένη από κάτω, κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Καταρχάς παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φραγμένων από κάτω και Lipschitz συνεχών συναρτήσεων τ.ω. $f_k \nearrow f$, αφού τότε η $f_k \wedge k$, είναι φραγμένη και Lipschitz για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και η $(f_k \wedge k)_{k \in \mathbb{N}}$ αυξάνει κατά σημείο στην f. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ από τον τύπο

$$f_k(x) = \inf_{z \in X} \big(f(z) + k d(x, z) \big).$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η f_k είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά Lipschitz $\leq k$. Πράγματι, έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $z_\varepsilon \in X$ τ.ω. $f_k(y) + \varepsilon \geq f(z_\varepsilon) + kd(y, z_\varepsilon)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} f_k(x) - f_k(y) &\leq f(z_\varepsilon) + kd(x, z_\varepsilon) - f(z_\varepsilon) - kd(y, z_\varepsilon) + \varepsilon \\ &= k\big(d(x, z_\varepsilon) - d(y, z_\varepsilon)\big) + \varepsilon \\ &\leq kd(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $f_k(y) - f_k(x) \leq kd(x, y) + \varepsilon$, και έτσι, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έπεται ότι $\mathrm{Lip}(f_k) \leq k$. Επιπλέον, είναι άμεσο από τον ορισμό των f_k ότι

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq f_k(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in X} f(x),$$

για κάθε $x \in X$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$, και συνεπώς η (f_k) είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάτω. Θα δείξουμε ότι $f_k(x) \nearrow f(x)$ για κάθε $x \in X$. Καταρχάς, είναι προφανές ότι η (f_k) είναι αύξουσα και άρα το όριο $\lim_k f_k(x)$ υπάρχει. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε $\lim_k f_k(x) \geq f(x) - \varepsilon$. Έστω, λοιπόν, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό των f_k, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_k \in X$, τ.ω. $f(z_k) + d(x, z_k) \leq f_k(x) + \frac{1}{k}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \lim_k f_k(x) &\leq \liminf_k \big(f(z_k) + kd(x, z_k)\big) \leq \limsup_k \big(f(z_k) + kd(x, z_k)\big) \\ &\leq \limsup_k \big(f_k(x) + \frac{1}{k}\big) = \lim_k f_k(x), \end{aligned}$$

και συνεπώς $\lim_k f_k(x) = \lim_k \big(f(z_k) + kd(x, z_k)\big)$. Τώρα, η ακολουθία $\big(kd(x, z_k)\big)$ είναι φραγμένη και άρα $d(x, z_k) \longrightarrow 0$. Έτσι, από την κάτω ημισυνεχεία της $X \ni z \mapsto f(z) + kd(x, z)$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$k \geq k_0 \quad \Longrightarrow \quad f(z_k) + kd(x, z_k) \geq f(x) - \varepsilon.$$

Συνεπώς $f(z_k) \longrightarrow f(x)$ και άρα $\lim_k f_k(x) \geq f(x) - \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, αυτό αποδεικνύει το (α). Φυσικά το (β) έπεται εφαρμόζοντας το (α) στην $-f$ και το (γ) συνδιάζοντας τα (α) και (β). □

Όπως έχουμε δει, ο $\mathbb{P}X$ είναι κυρτό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του $BC(X)^*$. Είναι γνωστό από τη συναρτησιακή ανάλυση ότι όταν ο V είναι διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, τότε ο περιορισμός της w^* τοπολογίας του V^* στη μοναδιαία σφαίρα του V^* είναι μετρικοποιήσιμη. Ωστόσο, στην περίπτωσή μας, ο $BC(X)$ δεν είναι διαχωρίσιμος και έτσι πρέπει να ακολουθήσουμε διαφορετικό δρόμο ώστε να βρούμε αριθμήσιμο υποσύνολο $\Xi \subseteq BC(X)$ τ.ω. η σύγκλιση $\int f d\mu_i \longrightarrow \int f d\mu$ για κάθε $f \in \Xi$ να αρκεί για τη σύγκλιση ενός δικτύου $(\mu_i)_i$ στο $\mu \in \mathbb{P}X$. Το ακόλουθο λήμμα μας βοηθάει σε αυτό.

Λήμμα 6.3.3 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $\Xi_0 \subseteq \Xi_1 \subseteq BC(X)$ τ.ω.*

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X h d\mu \,\middle|\, h \in \Xi_0,\ h \leq f\right\} \tag{6.5}$$

$$= \inf\left\{\int_X h d\mu \,\middle|\, h \in \Xi_0,\ h \geq f\right\} \tag{6.6}$$

για κάθε $f \in \Xi_1$, $\mu \in \mathbb{P}X$. Τότε οι ασθενείς τοπολογίες που επάγονται στο $\mathbb{P}X$ από τις Ξ_0 και Ξ_1 συμπίπτουν.

Απόδειξη Προφανώς, αφού $\Xi_0 \subseteq \Xi_1$, η τοπολογία που επάγεται στον $\mathbb{P}X$ από την Ξ_0 είναι ασθενέστερη από την τοπολογία που επάγεται στον $\mathbb{P}X$ από την Ξ_1. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\int_X h d\mu_i \longrightarrow \int_X h d\mu$ για κάθε $h \in \Xi_0$ και έστω $f \in \Xi_1$. Από τη μία,

$$\sup_{i\in I}\inf_{j\geq i}\int_X f d\mu_i \geq \sup_{h\in\Xi_0,\, h\leq f}\ \sup_{i\in I}\inf_{j\geq i}\int_X h d\mu_i = \sup_{h\in\Xi_0,\, h\leq f}\int_X h d\mu = \int_X f d\mu,$$

και από την άλλη

$$\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i}\int_X f d\mu_i \leq \inf_{h\in\Xi_0,\, h\geq f}\ \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i}\int_X h d\mu_i = \inf_{h\in\Xi_0,\, h\geq f}\int_X h d\mu = \int_X f d\mu.$$

Συνεπώς

$$\limsup_i \int_X f d\mu_i \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_i \int_X f d\mu_i,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\lim_i \int_X f d\mu_i = \int_X f d\mu$. □

Μία συλλογή συναρτήσεων του $BC(X)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (6.5) και (6.6) με $\Xi_1 = BC(X)$ είναι η οικογένεια $BL(X)$ όλων των φραγμένων Lipschitz πραγματικών συναρτήσεων στον X. Πράγματι, από το λήμμα 6.3.2 και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\sup_k \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu = \inf_k \int_X f^k d\mu,$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{P}X$, και συνεπώς η ασθενής τοπολογία του $\mathbb{P}X$ επάγεται από την $BL(X)$.

Λήμμα 6.3.4 *Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Τότε η ασθενής τοπολογία στον $\mathbb{P}X$ επάγεται από κάποια αριθμήσιμη συλλογή $\Xi \subseteq BL(X)$.*

Απόδειξη Ξεκινάμε ορίζοντας τη συλλογή $\Xi \subseteq BL(X)$. Επιλέγουμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και θέτουμε Ξ_1 το σύνολο όλων των συναρτήσεων $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ της μορφής

$$h(x) = \big(q_1 + q_2 d(x,y)\big) \wedge k, \quad q_1 \in \mathbb{Q}\cap(-1,1),\ q_2, k \in \mathbb{Q}\cap(0,1), ; y \in D.$$

Προφανώς η οικογένεια Ξ_1 είναι αριθμήσιμη. Για κάθε $h \in \Xi_1$ έχουμε ότι $\|h\|_u < 1$ και $\mathrm{Lip}(h) < 1$ και συνεπώς $\Xi_1 \subseteq BL(X)$. Θέτουμε Ξ_0 το σύνολο που παράγεται από την Ξ_1 παίρνοντας το infimum πεπερασμένων το πλήθος στοιχείων της Ξ_1, δηλαδή

$$\Xi_0 := \left\{ \bigwedge_{i=1}^n h_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ h_i \in \Xi_1 \right\}.$$

Προφανώς η Ξ_0 είναι επίσης αριθμήσιμη και για κάθε $h = \bigwedge_{i=1}^n h_i \in \Xi_0$ έχουμε ότι

$$\|h\|_u \leq \bigvee_{i=1}^n \|h_i\|_u < 1, \quad \mathrm{Lip}(h) \leq \bigvee_{i=1}^n \mathrm{Lip}(h_i) < 1.$$

Τέλος, θέτουμε $\Xi = \Xi^+ \cup (-\Xi^+)$, όπου

$$\Xi^+ = \{\lambda h \,|\, h \in \Xi_0,\ \lambda \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Αφού η $BL(X)$ ορίζει την ασθενή τοπολογία του $\mathbb{P}X$, από το λήμμα 6.3.3 έπεται ότι αρκεί να δείξουμε ότι η $\Xi \subseteq BL(X)$ ικανοποιεί τις σχέσεις (6.5) και (6.6) για κάθε $f \in BL(X)$ και κάθε $\mu \in \mathbb{P}X$. Επιπλέον, αφού $\Xi = -\Xi$, αρκεί να αποδείξουμε είτε την (6.5) είτε την (6.6).

Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μπορούμε να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο για πλήρεις μετρικούς χώρους και έστω $f \in BL(X)$, $\mu \in \mathbb{P}X$. Έστω $\bar{X}$ η πλήρωση του X και $i : X \hookrightarrow \bar{X}$ η ένθεση. Αφού η f είναι Lipschitz και το X πυκνό στον $\bar{X}$, η f επεκτείνεται σε μοναδική Lipschitz απεικόνιση $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\bar{f})$. Θεωρούμε το μέτρο $\mu \in \mathbb{P}X$ ως μέτρο στον $\bar{\mu} \in \mathbb{P}\bar{X}$ μέσω της ένθεσης i, δηλαδή $\bar{\mu} = i_*\mu$. Επίσης το αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D \subseteq X$ που επιλέξαμε για τον ορισμό της Ξ, είναι πυκνό στον $\bar{X}$ και, άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό της αντίστοιχης οικογένειας στον $\bar{X}$. Έστω $\bar{\Xi}$ η αντίστοιχη αυτή υπο-οικογένεια της $BL(\bar{X})$. Αν το ζητούμενο ισχύει για πλήρεις χώρους, τότε η $\bar{\Xi}$ ικανοποιεί τις σχέσεις (6.5) και (6.6) για κάθε $f \in BC(X)$, $\mu \in \mathbb{P}X$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \int_{\bar{X}} \bar{f} d\bar{\mu} = \sup\left\{ \int_{\bar{X}} \bar{h} d\bar{\mu} \,\middle|\, \bar{h} \in \bar{\Xi},\ \bar{h} \leq \bar{f} \right\} \\
&= \sup\left\{ \int_X (\bar{h} \circ i) d\mu \,\middle|\, \bar{h} \in \bar{\Xi},\ \bar{h} \leq \bar{f} \right\} \\
&= \sup\left\{ \int_X h d\mu \,\middle|\, h \in \Xi,\ h \leq f \right\},
\end{aligned}$$

αφού $\bar{\Xi} = \{\bar{h} \,|\, h \in \Xi\}$, και $\bar{h} \leq \bar{f}$ ανν $(\bar{h} \circ i) \leq f$, για κάθε $\bar{h} \in \bar{\Xi}$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος. Το κέρδος μας είναι ότι με την επιπλέον υπόθεση της πληρότητας έχουμε στα χέρια μας το θεώρημα του Ulam και την πρόταση 6.2.5.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε τον ισχυρισμό. Έστω λοιπόν $f \in BL(X)$ και $\mu \in \mathbb{P}X$. Θέτουμε

$$\Xi^{+,f} := \{h \in \Xi^+ \,|\, h \leq \|f\|_u + 1\},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\inf\left\{ \int_X h d\mu \,\middle|\, h \in \Xi^{+,f},\ h \geq f \right\} \geq \inf\left\{ \int_X h d\mu \,\middle|\, h \in \Xi,\ h \geq f \right\}.$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{U}_f := \{h \in \Xi^{+,f} \,|\, h \geq f\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 6.2.5. Αρκεί, δηλαδή, να δείξουμε ότι

(α) $f = \inf_{u \in \mathcal{U}_f} u$, και (β) η οικογένεια $\mathcal{U}_f$ είναι κατευθυνόμενη ως προς την $\geq$.

(α) Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $h \in \mathcal{U}_f$ τ.ω. $h(x_0) - f(x_0) \leq \varepsilon$. Έστω $L \geq 0$ η σταθερά Lipschitz της f. Τότε $f(x) \leq f(x_0) + Ld(x, x_0)$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε απεικόνιση $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \big(f(x_0) + Ld(x, x_0)\big) \wedge \|f\|_u.$$

Τότε $g \geq f$, $g \leq \|f\|_u$ και $g(x_0) = f(x_0)$. Παρατηρούμε ότι θέτοντας

$$\ell := (L+1)(\|f\|_u + 1),\ a_1 := \frac{f(x_0)}{\ell},\ a_2 := \frac{L}{\ell} \text{ and } c := \frac{\|f\|_u}{\ell},$$

η g μπορεί να γραφεί ως

$$g(x) = \ell\Big(\big(a_1 + a_2 d(x, x_0)\big) \wedge c\Big), \tag{6.7}$$

όπου $\ell > 0$, $a_1 \in (-1, 1)$, $a_2, c \in (0, 1)$ και $x_0 \in X$. Για την απόδειξη του (α), αρκεί να διαταράξουμε τις παραμέτρους ℓ, a_1, a_2, c, x_0 της g κατά τέτοιο τρόπο ώστε η συνάρτηση h που θα προκύψει να ανήκει στην $\mathcal{U}_f$ και η τιμή της $h(x_0)$ στο x_0 να παραμείνει ε-κοντά στον $g(x_0) = f(x_0)$. Καταρχάς, υπάρχουν ρητοί

$$\lambda \in \left(\ell, \ell + \frac{\varepsilon}{4(|a_1| + 1)}\right) \quad \text{και} \quad k \in (c, 1)$$

τ.ω.

$$c\ell \leq k\lambda < \|f\|_u < \|f\|_u + 1 \tag{6.8}$$

και $y_0 \in D$ τ.ω. $d(x_0, y_0) < \frac{\varepsilon}{4\lambda N(a_2+1)}$, όπου το $N \in \mathbb{N}$ είναι κάποια αυθαίρετη παράμετρος που θα προσδιοριστεί σε επόμενο στάδιο της απόδειξης. Έπειτα επιλέγουμε ρητούς

$$q_1 \in \left(a_1 + \frac{\varepsilon}{4\lambda N}, a_1 + \frac{\varepsilon}{2\lambda N}\right) \quad \text{και} \quad q_2 \in \left(a_2, (a_2 + \frac{1}{N}) \wedge 1\right),$$

και θέτουμε

$$h_0 := \lambda\big(q_1 + q_2 d(\cdot, y_0)\big), \quad h := h_0 \wedge k.$$

Προφανώς $h \in \Xi^{+,f}$ και άρα για να δείξουμε ότι $h \in \mathcal{U}_f$ απομένει να δείξουμε ότι $h \geq f$. Αφού $k\lambda \geq c\ell$ και $h - f \geq h - g$, για να δείξουμε ότι $h - f \geq 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $h_0 - g_0 \geq 0$, όπου $g_0 := \ell\big(a_1 + a_2 d(\cdot, x_0)\big)$. Τώρα, για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
h_0(x) - g_0(x) &= \lambda\big(q_1 + q_2 d(x, y_0)\big) - \ell\big(a_1 + a_2 d(x, x_0)\big) \\
&\geq \lambda\big((q_1 - a_1) + q_2 d(x, y_0) - a_2 d(x, x_0)\big) \\
&\geq \lambda\Big((q_1 - a_1) + a_2\big(d(x, y_0) - d(x, x_0)\big)\Big) \\
&\geq \lambda\Big(\frac{\varepsilon}{4\lambda N} - a_2 d(x_0, y_0)\Big) \\
&> \lambda\Big(\frac{\varepsilon}{4\lambda N} - \frac{a_2}{a_2 + 1} \cdot \frac{\varepsilon}{4\lambda N}\Big) \geq 0.
\end{aligned}$$

Έπειτα ελέγχουμε ότι $h(x_0) - f(x_0) \leq \varepsilon$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
(i) $q_1 + q_2 d(x_0, y_0) \leq k$: Τότε

$$\begin{aligned}
h(x_0) - f(x_0) &= \lambda\big(q_1 + q_2 d(x_0, y_0)\big) - \ell a_1 \leq \lambda q_1 - \ell a_1 + \frac{\varepsilon}{4N} \\
&\leq \lambda(q_1 - a_1) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4N} \leq \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4N} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

(ii) $q_1 + q_2 d(x_0, y_0) > k > c$: Σ' αυτή την περίπτωση, επιλέγοντας την περάμετρο $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\frac{3\varepsilon}{4\lambda N} + \frac{d(x_0, y_0)}{N} < k - c,$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + a_2 d(x_0, y_0) - a_2 d(x_0, y_0) \geq a_1 + a_2 d(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{4\lambda N} \\ &\geq q_1 - \frac{\varepsilon}{2\lambda N} + q_2 d(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{4\lambda N} - \frac{d(x_0, y_0)}{N} \\ &= q_1 + q_2 d(x_0, y_0) - \frac{3\varepsilon}{4\lambda N} - \frac{d(x_0, y_0)}{N} > k + c - k = c, \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο, αφού $a_1 = \frac{f(x_0)}{\ell} \leq \frac{\|f\|_u}{\ell} = c$. Έτσι, με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς $N \in \mathbb{N}$, η περίπτωση αυτή δεν υφίσταται και η απόδειξη του (α) ολοκληρώθηκε.
(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν οι $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_f$ είναι της μορφής $u_i = \lambda_i h_i$, $i = 1, 2$, όπου $h_i \in \Xi_1$, τότε υπάρχει $u \in \mathcal{U}_f$ τ.ω. $u_1 \wedge u_2 \geq u$. Έστω λοιπόν $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_f$, ας πούμε

$$u_i = \lambda_i h_i = \lambda_i \Big(\big(q_1^i + q_2^i d(\,\cdot\,, y^i) \big) \wedge k^i \Big), \quad i = 1, 2.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Τότε,

$$\lambda_1 h_1 = \lambda_2 \Big(\big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} q_1^1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} q_2^1 d(\,\cdot\,, y^1) \big) \wedge \big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} k \big) \Big) =: \lambda_2 h_1',$$

και $h_1' \in \Xi_1$. Συνεπώς

$$u := (\lambda_1 h_1) \wedge (\lambda_2 h_2) = \lambda_2 (h_1' \wedge h_2) \in \mathcal{U}_f,$$

και η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε. □

Αριθμώντας τα στοιχεία της Ξ_0 σε μία ακολουθία $\Xi_0 = \{h_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ και ορίζοντας

$$\rho(\mu, \nu) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int_X h_k d(\mu - \nu) \right|,$$

για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{P}X$, ορίζεται η μετρική $\rho : \mathbb{P}X \times \mathbb{P}X \longrightarrow [0, \infty)$ στον $\mathbb{P}X$.

Πρόταση 6.3.4 *Η μετρική $\rho : \mathbb{P}X \times \mathbb{P}X \longrightarrow [0, \infty)$ μετρικοποιεί την ασθενή τοπολογία στον $\mathbb{P}X$.*

Απόδειξη Το ότι η ρ είναι μετρική είναι προφανές. Θα δείξουμε ότι μετρικοποιεί την ασθενή τοπολογία στον $\mathbb{P}X$. Έστω, λοιπόν, $\mu_n, \mu \in \mathbb{P}X$, $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\rho(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_X h_k d(\mu_n - \mu) \right| \leq 2^k \rho(\mu_n, \mu) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

και άρα $\int_X h d\mu_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_X h d\mu$ για κάθε $h \in \Xi_0$. Συνεπώς, $\int_X h d\mu_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_X h d\mu$ για κάθε $h \in \Xi$ και άρα $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς.

Αντίστροφα, έστω $(\mu_i)_{i \in I}$ ένα δίκτυο στον $\mathbb{P}X$ και έστω $\mu \in \mathbb{P}X$ τ.ω. $\mu_i \longrightarrow \mu$ ασθενώς. Θα δείξουμε ότι $\rho(\mu_i, \mu) \longrightarrow 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Αφού $\mu_i \longrightarrow \mu$ ασθενώς, για κάθε $k = 1, \ldots, k_0$, υπάρχει $i_k \in I$ τ.ω.

$$i_k \geq i \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_X h_k d(\mu_i - \mu) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού, όμως, το I είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $i_0 \in I$ τ.ω. $i_0 \geq i_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, k_0$. Για κάθε $i \geq i_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(\mu_i, \mu) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int_X h_k d(\mu_i - \mu) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon,\end{aligned}$$

αφού για κάθε $h \in \Xi_0$ έχουμε ότι $\left|\int_X hd(\mu_i - \mu)\right| \leq \|h\|_u \|\mu_i - \mu\|_{TV} \leq 2$. $\square$

Ειδικότερα, οι ακολουθίες αρκούν για την περιγραφή της ασθενούς τοπολογίας στον $\mathbb{P}X$. Φυσικά υπάρχουν πολλές άλλες μετρικές που μετρικοποιούν την ασθενή τοπολογία στον $\mathbb{P}X$. Θα περιγράψουμε μία από αυτές, την λεγόμενη μετρική του Dudley.

Πρόταση 6.3.5 *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Η συνάρτηση $\beta : \mathbb{P}X \times \mathbb{P}X \longrightarrow [0, \infty)$ με τύπο*

$$\beta(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int_X fd(\mu - \nu) \right| \;\middle|\; f \in BL(X),\ \|f\|_{BL} \leq 1 \right\},$$

όπου η νόρμα $\|\cdot\|_{BL} : BL(X) \longrightarrow [0, \infty)$ δίνεται από τον τύπο $\|f\|_{BL} = \|f\|_u + \mathrm{Lip}(f)$, είναι μετρική στον $\mathbb{P}X$ και μετρικοποιεί την ασθενή τοπολογία.

Απόδειξη Προφανώς η β είναι μετρική. Θα δείξουμε ότι μετρικοποιεί την ασθενή τοπολογία στον $\mathbb{P}X$. Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε

$$\beta_M(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int fd(\mu - \nu) \right| \;\middle|\; f \in BL(X),\ \|f\|_{BL} \leq M \right\},$$

για κάποιο $M \geq 1$, τότε $\beta \leq \beta_M \leq M\beta$. Συνεπώς η β_M είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την β για κάθε $M \geq 1$. Όμως για κάθε $h \in \Xi_0$, ισχύει ότι $\|h\|_{BL} < 2$, και άρα για κάθε $h \in \Xi_0$,

$$\left| \int hd(\mu_n - \mu) \right| \leq 2\beta(\mu_n, \mu) \leq 0.$$

Συνεπώς, $\int hd\mu_n \longrightarrow \int hd\mu$ για κάθε $h \in \Xi$, το οποίο δείχνει ότι $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς.

Αντίστροφα, έστω $\mu_n, \mu \in \mathbb{P}X$ τ.ω. $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς. Παρατηρούμε καταρχάς ότι για να δείξουμε ότι $\beta(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$, μπορούμε να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης. Πράγματι, αν $i : X \hookrightarrow \bar{X}$ είναι η ένθεση του X στην πλήρωση του, και $\bar{\beta}$ είναι η μετρική του Dudley στον $\mathbb{P}\bar{X}$, επειδή η απεικόνιση επέκτασης $\big(BL(X), \|\cdot\|_{BL(X)}\big) \longrightarrow \big(BL(\bar{X}), \|\cdot\|_{BL(\bar{X})}\big)$ είναι γραμμική ισομετρία, έπεται ότι η $i_* : (\mathbb{P}X, \beta) \longrightarrow (\mathbb{P}\bar{X}, \bar{\beta})$ είναι ισομετρική ένθεση και έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι δουλεύουμε στο χώρο των μέτρων πιθανότητας του πλήρους χώρου $\bar{X}$.

Υποθέτουμε λοιπόν στη συνεχεία ότι ο X είναι πλήρης. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα του Ulam, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K του X τ.ω. $\mu(X \setminus K) \geq 1 - \varepsilon$. Θέτουμε

$$B := \big\{ f|_K \,\big|\, f \in BL(X),\ \|f\|_{BL} \leq 1 \big\}.$$

Από το θεώρημα Arzela-Ascoli, έπεται ότι το B είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(K)$ ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στο K. Υπάρχουν λοιπόν $g_j \in B$, $j = 1, \ldots, k$, τ.ω.

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} D_{K,u}(g_j, \varepsilon),$$

όπου για κάθε $f \in B$, $D_{K,u}(f, \varepsilon) = \big\{g \in B \mid \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\big\}$. Συνεπώς, για κάθε $f \in B$, υπάρχει $j_f \in \{1, \ldots, k\}$ τ.ω. $\sup_{x \in K} |f(x) - g_{j_f}(x)| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $f \in B$, έχουμε ότι

$$\sup\Big\{|f(x) - g_{j_f}(x)| \,\Big|\, x \in D(K, \varepsilon)\Big\} < 3\varepsilon,$$

αφού αν $y \in K$ και $d(x, y) < \varepsilon$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - gj_f(x)| &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - g_{j_f}(y)| + |g_{j_f}(y) - g_{j_f}(x)| \\ &< \mathrm{Lip}(f) d(x, y) + \varepsilon + \mathrm{Lip}(g_{j_f}) d(x, y) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = 0 \vee \left(1 - \frac{d(x, K)}{\varepsilon}\right).$$

Προφανώς, $g \in BL(X)$ και $\mathbb{1}_K \leq g \leq \mathbb{1}_{D(K,\varepsilon)}$. Έτσι, αφού $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \int g d\mu_n \geq \int g d\mu - \varepsilon.$$

Όμως, τότε, για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε ότι

$$\mu_n\big(D(K, \varepsilon)\big) \geq \int g d\mu_n \geq \int g d\mu - \varepsilon \geq \mu(K) - \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Επιπλέον, από τον ορισμό του B, για κάθε $j = 1, \ldots, k$, υπάρχει $F_j \in BL(X)$ με $\|F_j\|_{BL} \leq 1$, τ.ω. $F_j|K = f_j$. Αφού $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$$n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\int F_j d(\mu_n - \mu)\right| < \varepsilon,$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0 \vee n_1$ και κάθε $f \in BL(X)$ με $\|f\|_{BL} \leq 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left|\int f d(\mu_n - \mu)\right| &\leq \int |f - F_f| d|\mu_n - \mu| + \left|\int F_f d(\mu_n - \mu)\right| \\ &\leq \int |f - F_f| d(\mu_n + \mu) + \varepsilon \\ &= \int_{D(K,\varepsilon)} |f - F_f| d(\mu_n + \mu) + \int_{X \setminus D(K,\varepsilon)} |f - F_f| d(\mu_n + \mu) + \varepsilon \\ &\leq \int_{D(K,\varepsilon)} 3\varepsilon d(\mu_n + \mu) + \int_{X \setminus D(K,\varepsilon)} 2 d(\mu_n + \mu) + \varepsilon \\ &\leq 6\varepsilon + 6\varepsilon + \varepsilon = 13\varepsilon, \end{aligned}$$

και συνεπώς $\beta(\mu_n, \mu) \leq 13\varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0 \vee n_1$. Συνεπώς $\mu_n \longrightarrow \mu$ ως προς τη μετρική του Dudley β, και η απόδειξη έχει τελειώσει. $\square$

Έως τώρα έχουμε περιγράψει τη σύγκλιση ακολουθιών ως προς την ασθενή τοπολογία στον $\mathbb{P}X$ μέσω των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων στον X. Η ακόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει τη σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{P}X$ μέσω κατάλληλων υποσυνόλων του X και μας δίνει τη δυνατότητα, δεδομένης της ασθενούς σύγκλισης $\mu_n \longrightarrow \mu$, να περάσουμε στο όριο στην 6.4 ως και προς μη φραγμένες ημισυνεχείς συναρτήσεις και μ-σ.π. συνεχείς φραγμένες συναρτήσεις. Η ισοδυναμία των (α) έως (δ) αποδείχθηκε γύρω στο Β΄ παγκόσμιο πόλεμο από τον A.D. Alexandrov.

Θεώρημα 6.3.1 (Το θεώρημα portmanteau) *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω (μ_n) ακολουθία στον $\mathbb{P}X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(a) *$\mu_n \longrightarrow \mu \in \mathbb{P}X$ ασθενώς.*

(b) *Για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$, $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$.*

(c) *Για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$, $\liminf_n \mu_n(U) \geq \mu(U)$.*

(d) *Για κάθε μ-συνεχές σύνολο $A \subseteq X$, δηλαδή για κάθε* Borel *σύνολο $A \subseteq X$ τ.ω. $\mu(\partial A) = 0$, ισχύει ότι*

$$\lim_n \mu_n(A) = \mu(A).$$

(b') *Για κάθε φραγμένη από πάνω, άνω ημισυνεχή συνάρτηση $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$,*

$$\limsup_n \int f d\mu_n \leq \int f d\mu.$$

(g') *Για κάθε φραγμένη από κάτω, κάτω ημισυνεχή συνάρτηση $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$,*

$$\liminf_n \int f d\mu_n \geq \int f d\mu.$$

(d) *Για κάθε μ-σ.π. συνεχή συνάρτηση, $\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$.*

Απόδειξη Καταρχάς παρατηρούμε ότι επειδή ένα Borel σύνολο $A \subseteq X$ είναι κλειστό, ανοικτό και μ-συνεχές ανν η $\mathbb{1}_A$ είναι άνω ημισυνεχείς, κάτω ημισυνεχής και μ-σ.π. συνεχής αντίστοιχα, έπεται ότι η (x') συνεπάγεται την (x), $x = a, b, c$. Επιπλέον, η (b') είναι προφανώς ισοδύναμη με την (c'), και η (b) ισοδύναμη με την (c). Τέλος προφανώς η (d') συνεπάγεται την (a), και έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι $(a) \Longrightarrow (c')$, (β) και $(c) \Longrightarrow (d)$, και ότι $(d) \Longrightarrow (d')$.
$(a) \Longrightarrow (c')$ Έστω $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ φραγμένη από κάτω, κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Από το λήμμα 6.3.2 και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έχουμε ότι

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu \,\middle|\, h \in BL(X),\ h \leq f \right\}.$$

Όπως στην απόδειξη του λήμματος 6.3.3, αυτό συνεπάγεται ότι $\liminf_n \int f d\mu_n \geq \int f d\mu$.
$(b) \wedge (c) \Longrightarrow (d)$ Καταρχάς παρατηρούμε ότι ένα Borel σύνολο $A \subseteq X$, είναι μ-συνεχές

σύνολο ανν $\mu(A^o) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$. Έτσι, αν το A είναι μ-συνεχές σύνολο, από τα (a) και (b) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(A^o) &\leq \liminf \mu_n(A^o) \leq \liminf \mu_n(A) \\ &\leq \limsup \mu_n(A) \leq \limsup \mu_n(\overline{A}) \leq \mu(\overline{A}),\end{aligned}$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο.
$(d) \Longrightarrow (d')$ Έστω $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη μ-σ.π. συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $X_0 \in \mathcal{B}(X)$ σύνολο που στηρίζει το μ, τ.ω. η f να είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X_0. Έστω, επίσης, $a, b \in \mathbb{R}$ τ.ω. $a < f(x) < b$ για κάθε $x \in X$. Για κάθε $r \in (a, b)$, θέτουμε $F_r := \{x \in X \,|\, f(x) = r\}$. Η οικογένεια $\{F_r\}_{r\in(a,b)}$ είναι διαμέριση του X, και άρα για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο I του (a, b) έχουμε ότι

$$\sum_{r\in I} \mu(F_r) = \mu\Big(\bigcup_{r\in I} F_r\Big) \leq 1.$$

Συνεπώς $\sum_{r\in(a,b)} \mu(F_r) \leq 1 < +\infty$, και άρα το σύνολο όλων των $r \in (a, b)$ για τα οποία $\mu(F_r) > 0$, είναι το πολύ αριθμήσιμο. Υπάρχει, λοιπόν, διαμέριση $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ του (a, b), τ.ω. $a_i - a_{i-1} < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$ και $\mu(F_{a_i}) = 0$, $i = 0, \ldots, n$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, θέτουμε $E_i := f^{-1}\big([a_{i-1}, a_i)\big)$ και ορίζουμε τις απλές συναρτήσεις

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} \mathbb{1}_{E_i}, \qquad \psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}.$$

Προφανώς, $\phi \leq f \leq \psi$ και $\psi - \phi \leq \varepsilon$. Επίσης, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε ότι $\partial E_i \subseteq F_{a_{i-1}} \cup F_{a_i} \cup (X \setminus X_0)$, και άρα τα E_i είναι μ-συνεχή σύνολα. Από το (d) έπεται ότι $\lim \int \phi d\mu_n = \int \phi d\mu$ και $\lim \int \psi d\mu_n = \int \psi d\mu$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int f d\mu - \varepsilon &\leq \int \phi d\mu \leq \liminf_n \int f d\mu_n \leq \limsup_n \int f d\mu_n \\ &\leq \int \psi d\mu_n \leq \int f d\mu + \varepsilon,\end{aligned}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.3.1 *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X συγκλίνει ανν η (δ_{x_n}) συγκλίνει στον $\mathbb{P}X$, και $\lim \delta_{x_n} = \delta_{\lim x_n}$.*

Απόδειξη Όπως ξέρουμε η $\delta : X \longrightarrow \mathbb{P}X$ είναι συνεχής. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\delta_{x_n} \longrightarrow \mu \in \mathbb{P}X$, και θα δείξουμε ότι το μ είναι κάποιο μέτρο Dirac $= \delta_x$, $x \in X$, και ότι $x_n \longrightarrow x$. Έστω $x \in \mathrm{supp}\mu$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\mu\big(D(x, 1/k)\big) > 0$. Συνεπώς από το θεώρημα portmanteau, έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_n \delta_{x_n}\big(D(x, 1/k)\big) \geq \mu\big(D(x, 1/k)\big) > 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άπειρα το πλήθος από τα x_n περιέχονται στην $D(x, 1/k)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, κατασκευάζουμε υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n), που συγκλίνει στο $x \in X$. Τότε, όμως, $\delta_x = \lim \delta_{x_{n_k}} = \lim \delta_{x_n} = \mu$, από όπου έπεται ότι η (x_n) συγκλίνει στο x. □

Θα δούμε τέλος ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{P}X$, που αποδείχθηκε από τον Prokhorov. Αυτό είναι ένα θεώρημα τύπου Arzela-Ascoli στον $\mathbb{P}X$, όπου η έννοια της ισοσυνέχειας αντικαθίσταται από την έννοια της ομοιόμορφης σφικτότητας. Η απόδειξη που θα ακολουθήσουμε βρίσκεται στο [3]

Ορισμός 6.3.2 Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ λέγεται (ομοιόμορφα) σφικτό αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_\varepsilon \subseteq X$ τ.ω.

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \mu(X \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Παρατηρήσεις

4. Σύμφωνα με τους ορισμούς, ένα μέτρο $\mu \in \mathbb{P}X$ είναι σφικτό ανν το $\{\mu\}$ είναι σφικτό.

5. Ένα σύνολο $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ είναι σφικτό ανν υπάρχει συνάρτηση $\phi : X \longrightarrow [0, \infty]$ με συμπαγή σύνολα υποστάθμης, $\phi^{-1}([0, c])$, $0 \leq c < \infty$, τ.ω.

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int \phi d\mu < \infty.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το $\mathcal{K}$ είναι σφικτό. Μία συνάρτηση $\phi : X \longrightarrow [0, +\infty]$ με ις ζητούμενες ιδιότητες κατασκευάζεται ως εξής. Επιλέγουμε αθροίσιμη ακολουθία, $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$, θετικών αριθμών. Από τη σφικτότητα του $\mathcal{K}$, υπάρχει ακολουθία $(K_n)_{n=0}^\infty$ συμπαγών υποσυνόλων του X, τ.ω.

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \mu(X \setminus K_n) \leq \varepsilon_n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η συνάρτηση $\phi : X \longrightarrow [0, \infty]$ με τύπο

$$\phi(x) := \inf\{n \geq 0 \,|\, x \in K_n\} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{X \setminus K_n}(x),$$

έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Πράγματι, για κάθε $0 \leq c < \infty$, $\phi^{-1}([0, c]) = K_{[c]}$, το οποίο είναι συμπαγές και $\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int \phi d\mu \leq \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n < +\infty$.

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι η $\phi : X \longrightarrow [0, +\infty]$ έχει συμπαγή σύνολα υποστάθμης $K_c := \phi^{-1}([0, c])$ και ότι είναι τ.ω. $\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int \phi d\mu < +\infty$, και έστω $\varepsilon > 0$. Από την ανισότητα του Chebyshev, για κάθε $0 < c < +\infty$ και κάθε $\mu \in \mathcal{K}$, έχουμε ότι

$$\mu(X \setminus K_c) = \mu\{x \in X \,|\, \phi(x) > c\} \leq \frac{1}{c} \int \phi d\mu \leq \frac{1}{c} \cdot \sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int \phi d\mu < +\infty.$$

Έτσι, αν το $c \geq 0$ είναι αρκετά μεγάλο ώστε $1/c \cdot \sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int \phi d\mu < \varepsilon$, τότε $\mu(X \setminus K_c) < \varepsilon$ για κάθε $\mu \in \mathcal{K}$, το οποίο δείχνει ότι το $\mathcal{K}$ είναι σφικτό.

Θεώρημα 6.3.2 (Prokhorov) *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Κάθε σφικτό υποσύνολο του $\mathbb{P}X$ είναι σχετικά συμπαγές ως προς την ασθενή τοπολογία του $\mathbb{P}X$. Το αντίστροφο είναι επίσης αλήθεια, αν ο X είναι πολωνικός χώρος*

Απόδειξη($\Longrightarrow$) Έστω $\mathcal{K}$ σφικτό υποσύνολο του $\mathbb{P}X$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων του X τ.ω.

$$\inf_{\mu\in\mathcal{K}} \mu(K_n) > 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμη βάση, $(B_m)_{m=0}^{\infty}$, $B_0 = X$, για την τοπολογία του X, που αποτελείται από ανοικτές d-μπάλες. Έστω $\mathcal{H}$ η οικογένεια όλων των πεπερασμένων ενώσεων συνόλων της μορφής $\overline{B_m} \cap K_n$, $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Η οικογένεια $\mathcal{H}$ είναι προφανώς αριθμήσιμη και κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις, και κάθε στοιχείο της είναι συμπαγές σύνολο.

Έστω $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathcal{K}$. Πρέπει να δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Η ακολουθία $\big(\mu_n(H)\big)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη για κάθε $H \in \mathcal{H}$, και η $\mathcal{H}$ αριθμήσιμη, και έτσι με μία διαγώνια διαδικασία βρίσκουμε υπακολουθία (μ_{k_n}) της (μ_n), τ.ω. το όριο

$$\alpha(H) := \lim_n \mu_{k_n}(H), \tag{6.9}$$

να υπάρχει για κάθε $H \in \mathcal{H}$. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{P}X$ τ.ω.

$$\mu(A) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subseteq A} \alpha(H), \quad \forall \text{ ανοικτό } A \subseteq X. \tag{6.10}$$

Τότε $\mu_{k_n} \longrightarrow \mu$ ασθενώς. Πράγματι, για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$ και κάθε $H \in \mathcal{H}$ τ.ω. $H \subseteq A$, έχουμε ότι

$$\alpha(H) = \lim_n \mu_{k_n}(H) \le \liminf_n \mu_{k_n}(A).$$

Συνεπώς $\mu(A) \le \liminf_n \mu_{k_n}(A)$ για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$, το οποίο από το portmanteau θεώρημα δίνει την ασθενή σύγκλιση της μ_{k_n} στο μ. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{P}X$ το οποίο ικανοποιεί την (6.10).

Η απεικόνιση $\alpha : \mathcal{H} \longrightarrow [0,1]$ που ορίζεται από την (6.9) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_1. \quad \alpha(H_1) \le \alpha(H_2), \text{ if } H_1 \subseteq H_2,\\
&\mathrm{I}_2. \quad \alpha(H_1 \cup H_2) = \alpha(H_1) + \alpha(H_2), \text{ if } H_1 \cap H_2 = \emptyset,\\
&\mathrm{I}_3. \quad \alpha(H_1 \cup H_2) \le \alpha(H_1) + \alpha(H_2), \text{ for all } H_1, H_2 \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε, τώρα, την απεικόνιση $\beta : \mathscr{T} \longrightarrow [0,1]$ με τύπο

$$\beta(A) = \sup_{\mathcal{H}\ni H\subseteq A} \alpha(H),$$

όπου $\mathscr{T}$ είναι η τοπολογία του X, και ορίζουμε την $\mu^* : 2^X \longrightarrow [0,1]$ από τον τύπο

$$\mu^*(E) = \inf_{E\subseteq A\in\mathscr{T}} \beta(A).$$

Προφανώς $\beta(A) = \mu^*(A)$ για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$. Αν δείξουμε τώρα ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο και ότι κάθε κλειστό σύνολο περιέχεται στη σ-άλγεβρα $\mathscr{M}^*$ όλων των μ^*-μετρήσιμων συνόλων, τότε θα έχουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathscr{M}^*$, και ότι το μέτρο $\mu^*|_{\mathcal{B}(X)}$ ικανοποιεί την (6.10). Επιπλέον, το μ είναι μέτρο πιθανότητας, αφού

$$\begin{aligned}
1 &= \mu(X) = \beta(X) \ge \sup_m (K_m) \ge \sup_m \lim_n \mu_{k_n}(K_m)\\
&\ge \sup_m \inf_{\mu\in\mathcal{K}} \mu(K_m) \ge \sup_m \Big(1 - \frac{1}{m}\Big) = 1.
\end{aligned}$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο και ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathscr{M}^*$. Προφανώς $\mu^*(\emptyset) = 0$ και $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ για κάθε $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$. Χωρίζουμε τη συνέχεια της απόδειξης σε τρία βήματα: πρώτα αποδεικνύουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα της β, έπειτα αποδεικνύομε ότι το μ^* είναι αριθμήσιμα υποπροσθετικό και άρα από τα παραπάνω εξωτερικό μέτρο, και τέλος δείχνουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathscr{M}^*$.

Βήμα 1: Η απεικόνιση $\beta : \mathscr{T} \longrightarrow [0,1]$ είναι αριθμήσιμα υπόπροσθετική: Δείχνουμε πρώτα ότι η β είναι πεπερασμένα προσθετική. Έστω A_1, A_2 υποσύνολα του X. Σύμφωνα με τους ορισμούς, για να δείξουμε ότι $\beta(A_1 \cup A_2) \leq \beta(A_1) + \beta(A_2)$, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha(H) \leq \beta(A_1) + \beta(A_2)$, για κάθε $H \in \mathcal{H}$ τ.ω. $H \subseteq A_1 \cup A_2$. Έστω, λοιπόν, $H \in \mathcal{H}$ τ.ω. $H \subseteq A_1 \cup A_2$. Θέτουμε $F_1 := \{x \in H \,|\, d(x, A_1^c) \geq d(x, A_2^c)\}$ και $F_2 := \{x \in H \,|\, d(x, A_2^c) \geq d(x, A_1^c)\}$. Αν $x \in F_1$ και $x \notin A_1$, τότε $x \in A_2$ και, έτσι, αφού το A_2^c είναι κλειστό, έπεται ότι $d(x, A_1^c) = 0 < d(x, A_2^c)$, το οποίο αντιφάσκει με τον ορισμό του F_1. Συνεπώς, $F_1 \subseteq A_1$ και ομοίως $F_2 \subseteq A_2$. Αν δείξουμε ότι υπάρχει $H_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$ τ.ω. $F_i \subseteq H_i \subseteq A_i$, τότε $H = F_1 \cup F_2 \subseteq H_1 \cup H_2$, και άρα

$$\alpha(H) \leq \alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \leq \beta(A_1) + \beta(A_2),$$

από τις I_1, I_2, I_3 και τον ορισμό της β. Το ότι υπάρχει $H_1 \in \mathcal{H}$ τ.ω. $F_1 \subseteq H_1 \subseteq A_1$ αποδεικνύεται ως εξής. Αφού η $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ είναι βάση της τοπολογίας του X και το $F_i \subseteq A_i$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ τ.ω. $F_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{m_i} \subseteq A_1$, και αφού $H \in \mathcal{H}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $H \subseteq K_{n_0}$. Τότε, $H_1 := \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{m_i} \cap K_{n_0} \in \mathcal{H}$ και $F_1 \subseteq H_1 \subseteq A_1$. Ομοίως δείχνουμε ότι υπάρχει $H_2 \in \mathcal{H}$ τ.ω. $F_2 \subseteq H_2 \subseteq A_2$, και άρα η β είναι πεπερασμένα υποπροσθετική. Είναι εύκολο, τώρα, να δείξουμε ότι είναι και αριθμήσιμα υποπροσθετική. Πράγματι, έστω (A_n) ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του X και έστω $H \in \mathcal{H}$, $H \subseteq A$. Αφού το H είναι συμπαγές, έχουμε ότι $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, και άρα από την πεπερασμένη υποπροσθετικότητα της β, έχουμε ότι

$$\alpha(H) \leq \beta\Big(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \beta(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(A_n).$$

Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα $H \in \mathcal{H}$ με $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ολοκληρώνεται η απόδειξη του πρώτου βήματος.

Βήμα 2: Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο: Έστω $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X, και έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του μ^*, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $A_n \supseteq E_n$ τ.ω. $\beta(A_n) \leq \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$, και άρα από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα της β,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \beta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο, αυτό δείχνει ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

Βήμα 3: $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathscr{M}^*$: Έστω $F \subseteq X$ κλειστό σύνολο. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c), \tag{6.11}$$

για κάθε $E \subseteq X$. Από τον ορισμό του μ^*, βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την (6.11) για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$. Πράγματι, τότε για κάθε $E \subseteq X$ και κάθε ανοικτό σύνολο $A \supseteq E$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\beta(A) &= \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \\ &\geq \mu(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c),\end{aligned}$$

από όπου παίρνοντας το infimum πάνω από όλα τα ανοικτά σύνολα $A \supseteq E$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. Έστω, λοιπόν, $A \subseteq X$ ανοικτό και έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $H \in \mathcal{H}$ τ.ω. $H \subseteq A$ και $\alpha(H) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) - \varepsilon$. Το σύνολο $A \cap F^c$ είναι ανοικτό και, έτσι, από τον ορισμό της β υπάρχει $H_1 \in \mathcal{H}$ τ.ω. $H_1 \subseteq A \cap F^c$ και $\alpha(H_1) > \beta(A \cap F^c) - \varepsilon/2$. Το σύνολο $A \cap H_1^c$ είναι επίσης ανοικτό και, έτσι, υπάρχει $H_2 \in \mathcal{H}$ τ.ω. $\alpha(H_2) > \beta(A \cap H_1^c) - \varepsilon/2$. Τα σύνολα H_1, H_2 είναι ξένα, περιέχονται στο A, και $A \cap H_1^c \supseteq A \cap F$. Έτσι, $H := H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, $H \subseteq A$, και

$$\begin{aligned}\alpha(H) &= \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \geq \beta(A \cap F^c) + \beta(A \cap H_1^c) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(A \cap F^c) + \mu^*(A \cap F) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τη μία συνεπαγωγή του θεωρήματος του Prokhorov.
($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι πολωνικός χώρος και θα δείξουμε ότι κάθε σχετικά συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{P}X$ είναι σφικτό. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{K}$ σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{P}X$. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει ακολουθία $(A_n^{(\delta)})_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών μπαλών ακτίνας $\delta > 0$, που καλύπτει τον X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_{\delta,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\mu(B_n^{\delta,\varepsilon}) > 1 - \varepsilon, \quad B_n^{\delta,\varepsilon} := \bigcup_{i=1}^{n_{\delta,\varepsilon}} A_i^{(\delta)},$$

για κάθε $\mu \in \mathcal{K}$. Πράγματι, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπήρχε $\mu_n \in \mathcal{K}$ τ.ω. $\mu_n(B_n) \leq 1 - \varepsilon$, τότε από τη σχετική συμπάγεια του $\mathcal{K}$, θα υπήρχε υπακολουθία (μ_{k_n}) της (μ_n) τ.ω. $\mu_{k_n} \longrightarrow \mu$. Αυτό, όμως, οδηγεί σε άτοπο, αφού από το θεώρημα portmanteau έχουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B_m) \leq \liminf_n \mu_{k_n}(B_m) \leq \liminf_n \mu_{k_n}(B_{k_n}) \leq 1 - \varepsilon,$$

ενώ, αφού $B_m \nearrow X$, ξέρουμε ότι $\lim_m \mu(B_m) = 1$. Εφαρμόζοντας αυτό που μόλις αποδείξαμε, βρίσκουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ πεπερασμένη ακολουθία $A_1^{(k)}, \ldots, A_{n_k}^{(k)}$ μπαλών ακτίνας $1/k$, τ.ω.

$$\inf_{\mu\in\mathcal{K}} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{n_k} A_n^{(k)}\Big) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Όμως το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{n_k} A_n^{(k)}$ είναι προφανώς ολικά φραγμένο (όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Ulam), και άρα η κλειστή του θήκη K είναι συμπαγής και για κάθε $\mu \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}\mu(X \setminus K) &\leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{n_k} (X \setminus A_n^{(k)})\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{n_k} (X \setminus A_i^{(k)})\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(X \setminus (\bigcap_{n=1}^{n_k} A_n^{(k)})\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Συνεπώς, το $\mathcal{K}$ είναι σφικτό και το θεώρημα του Prokhorov αποδείχθηκε. $\square$

Πόρισμα 6.3.2 *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Τότε ο $\mathbb{P}X$ είναι συμπαγής ή πλήρης ανν ο X είναι συμπαγής ή πλήρης, αντίστοιχα.*

6.4 Η r-οστή Τοπολογία του Wasserstein στο $\mathbb{P}_r X$

Στη προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε την ασθενή τοπολογία και μελετήσαμε τις βασικές της ιδιότητες. Όπως είδαμε, η ασθενής τοπολογία είναι αρκετά ασθενής ώστε να έχει αρκετά καλές ιδιότητες όπως το να σέβεται την τοπολογία του χώρου και να επιτρέπει την προσέγγιση των μέτρων από διακριτά μέτρα. Μπορούμε να οδηγηθούμε στις τοπολογίες w_r του Wasserstein στον $\mathbb{P}_r X$, από το ακόλουθο παράδειγμα στο οποίο η ασθενής τοπολογία είναι πιο ασθενής από ό,τι ενδεχομένως θα ήθελε κανείς.

Παράδειγμα

1. Έστω $\mathbb{P}_1\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των $\mu \in \mathbb{P}X$ για τα οποία $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < \infty$. Η *μέση τιμή* ή αλλιώς *βαρύκεντρο* $\mathbb{E} : \mathbb{P}_1\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η απεικόνιση με τύπο

$$\mathbb{E}\mu = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x).$$

Η μέση τιμή δεν είναι συνεχής ως προς τον περιορισμό της ασθενούς τοπολογίας στον $\mathbb{P}_1\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω (x_n) μία οποιαδήποτε αποκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και έστω (μ_n) η ακολουθία στο $\mathbb{P}_1 X$ με τύπο $\mu_n = \frac{n-1}{n}\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_{nx_n}$. Τότε για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f d(\mu - \delta_0) \right| &= \left| \frac{n-1}{n} f(0) + \frac{1}{n} f(nx_n) - f(0) \right| \\ &\leq \left| \frac{n-1}{n} f(0) - f(0) \right| + \frac{\|f\|_u}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $\mu_n \longrightarrow \delta_0$ ασθενώς, ενώ η $\mathbb{E}\mu_n = x_n$, δεν συγκλίνει.

Η μέση τιμή γίνεται συνεχής αν θεωρήσουμε στον $\mathbb{P}_1 X$ την ισχυρότερη τοπολογία w_1 που ορίζεται από την απαίτηση

$$\mu_n \xrightarrow{W_1} \mu \quad \text{ανν} \quad \mu_n \xrightarrow{W_0} \mu \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x).$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\mu_n \xrightarrow{W_1} \mu$ ανν

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu,$$

για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. $|f(x)| \leq A + B|x|$ για κάθε $x \in X$, για κάποιες σταθερές $A, B \geq 0$.

Ορισμός 6.4.1 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $0r \leq \infty$. Λέμε ότι το $\mu \in \mathcal{M}(X)$ έχει πεπερασμένη r-οστή κεντρική ροπή αν $\|d_{x_0}\|_{L^r(|\mu|)} < \infty$ για κάποιο, και άρα και για κάθε, $x_0 \in X$, όπου $d_{x_0} = d(\,\cdot\,, x_0) : X \longrightarrow [0,\infty)$. Θα συμβολίζουμε $\mathcal{M}^r(X)$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων φορτίων με πεπερασμένη r-οστή κεντρική ροπή. Θέτουμε $\mathcal{M}_0(X) := \mathcal{M}(X)$. Επιπλέον, θέτουμε $\mathcal{M}^r_+(X) = \mathcal{M}_+(X) \cap \mathcal{M}^r(X)$ και $\mathbb{P}_r X = \mathbb{P}X \cap \mathcal{M}^r(X)$.

Παρατηρήσεις

1. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι ο ορισμός του $\mathcal{M}^r(X)$ δεν εξαρτάται από το βασικό σημείο $x_0 \in X$.

2. Ένα φορτίο $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ανήκει στον $\mathcal{M}^r(X)$ ανν η θετική και η αρνητική του κύμανση ανήκουν στον $\mathcal{M}^r_+(X)$.

3. Για κάθε $0 < r \leq \infty$, ο $\mathcal{M}^r(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{M}(X)$.

4. Ο $\mathcal{M}^\infty(X)$ αποτελείται από εκείνα ακριβώς τα φορτία $\mu \in \mathcal{M}(X)$ των οποίων η απόλυτη κύμανση $|\mu|$ στηρίζεται από κάποιο φραγμένο σύνολο.

Ορισμός 6.4.2 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $1 \leq r \leq \infty$. Θέτουμε $B_r(X)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι μ-ολοκληρώσιμες για κάθε $\mu \in \mathbb{P}_r X$. Με άλλα λόγια,

$$B_r(X) = \bigcap_{\mu \in \mathbb{P}_r X} \mathcal{L}^1(\mu),$$

όπου στους χώρους $\mathcal{L}^1(\mu)$, $\mu \in \mathbb{P}_r X$, δεν ταυτίζουμε μ σ.π. ίσες συναρτήσεις.

Προφανώς ο $B_r(X)$ είναι γραμμικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού συναρτήσεων και αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις που ολοκληρώνονται ως προς κάθε $\mu \in \mathcal{M}^r(X)$, αφού $\mathcal{M}^r(X) = \mathrm{span}\mathbb{P}_r X$.

Πρόταση 6.4.1 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Για κάθε $0 \leq r < \infty$, έχουμε ότι*

$$B_r(X) = \big\{ f \in \mathcal{L}(X) \,\big|\, \exists\, A, B \geq 0 : |f| \leq A d^r(\,\cdot\,, x_0) + B \big\},$$

για κάποιο, και άρα και για κάθε, $x_0 \in X$. Ο χώρος $B_\infty(X)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις που απεικονίζουν φραγμένα σύνολα σε φραγμένα σύνολα.

Απόδειξη Η περίπτωση $r = 0$ είναι το λήμμα 6.1.1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $0 < r < \infty$. Ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι προφανής. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{L}(X) \setminus B_r(X)$, υπάρχει $\mu \in \mathbb{P}_r X$ τ.ω. $f \notin \mathcal{L}^r(\mu)$. Έστω $f \notin B_r(X)$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ τ.ω.

$$|f(x_n)| > 2^n \big(d^r(x_n, x_0) + 1 \big).$$

Ορίζουμε $\mu_0 \in \mathcal{M}_+(X)$ με τύπο

$$\mu_0(A) = \sum_{n : x_n \in A} \frac{1}{2^n \big(d^r(x_n, x_0) + 1 \big)} \leq 1.$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\mu := \frac{1}{\mu_0(X)} \cdot \mu_0 \in \mathbb{P}_r X$ και $f \notin \mathcal{L}^r(\mu)$.

Εξετάζουμε, τώρα, την περίπτωση $r = \infty$. Έστω $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση η οποία απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα και έστω $\mu \in \mathbb{P}_\infty X$. Θα δείξουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Έστω $x_0 \in X$. Αφού $\mu \in \mathbb{P}_\infty$, υπάρχει $M \geq 0$ τ.ω. $\mu\big(X \setminus D(x_0, M)\big) = 0$. Το σύνολο $f\big(D(x_0, M)\big)$ είναι φραγμένο και συνεπώς

$$\int_X |f| d\mu = \int_{D(x_0,M)} |f| f\mu \leq \sup_{x \in D(x_0,M)} |f(x)| < \infty.$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι αν μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ δεν απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα, τότε υπάρχει $\mu \in \mathbb{P}_\infty X$ τ.ω. $f \notin \mathcal{L}^1(\mu)$. Έστω f τέτοια συνάρτηση. Υπάρχει τότε $M > 0$ τ.ω. το $f\big(D(x_0, M)\big)$ να μην είναι φραγμένο. Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in D(x_0, M)$ τ.ω. $|f(x_n)| > 2^n$. Όμως τότε το μέτρο $\mu \in \mathbb{P}X$ με τύπο

$$\mu(A) = \sum_{n : x_n \in A} \frac{1}{2^n},$$

στηρίζεται από την $D(x_0, M)$, δηλαδή $\mu \in \mathbb{P}_\infty X$, ενώ προφανώς $f \notin \mathcal{L}^1(\mu)$. □

Σε αναλογία με την ένθεση $J : B(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)^*$, θεωρούμε τη γραμμική ένθεση $J_r : B^r C(X) \longrightarrow (\mathcal{M}^r(X))^\sharp$ με τύπο

$$J_r(f)(\mu) = \int_X f d\mu,$$

όπου $(\mathcal{M}^r(X))^\sharp$ είναι ο αλγεβρικός δυικός του $\mathcal{M}^r(X)$. Για κάθε $0 \leq r \leq \infty$ θέτουμε $B_r C(X) := B_r(X) \cap C(X)$. Σε αναλογία με τον ορισμό της ασθενούς τοπολογίας του $\mathcal{M}(X) \subseteq (BC(X)^*, w^*)$ δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.4.3 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $0 \leq r \leq \infty$. Η r-οστή τοπολογία του Wasserstein στο $\mathcal{M}^r(X)$ είναι η ασθενής τοπολογία που ορίζεται στον $\mathcal{M}^r(X)$ από την οικογένεια γραμμικών συναρτησοειδών

$$\big\{J_r(f) \,\big|\, f \in B^r C(X)\big\} \subseteq (\mathcal{M}^r(X))^\sharp.$$

Θα τη συμβολίζουμε με w_r. Η r-οστή τοπολογία w_r του Wasserstein στον $\mathbb{P}_r X$ είναι η τοπολογία που έχει ο $\mathbb{P}_r X$ ως υπόχωρος του $\mathcal{M}^r(X)$.

Από εδώ και στο εξής αν δεν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τον $\mathbb{P}_r X$ εφοδιασμένο με την r-οστή τοπολογία του Wasserstein.

Παρατηρήσεις

5. Αφού $B(X) \subseteq B_r(X)$ για κάθε $0 \leq r \leq \infty$, έπεται ότι η r-οστή τοπολογία του Wasserstein στον $\mathcal{M}^r(X)$ είναι Hausdorff για κάθε $0 \leq r \leq \infty$. Επιπλέον, ο $\mathcal{M}^r(X)$ είναι τοπολογικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις και την r-οστή τοπολογία του Wasserstein.

6. Η οικογένεια (w_r) των τοπολογιών του Wasserstein είναι αύξουσα ως προς τον εγκλεισμό, δηλαδή για κάθε $0 \le r \le s \le \infty$, $w_r|_{\mathbb{P}_s X} \subseteq w_s$.

Απόδειξη. Πράγματι, από την ανισότητα του Hölder έχουμε ότι για κάθε $0 < r \le s \le \infty$, κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X)$ και κάθε $x_0 \in X$,

$$\|d_{x_0}\|_{L^r(|\mu|)} \le \|d_{x_0}\|_{L^s(|\mu|)} \cdot |\mu|(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}},$$

και συνεπώς $\mathcal{M}^s(X) \subseteq \mathcal{M}^r(X)$, για κάθε $0 \le r \le s \le \infty$. Έπεται ότι $B_r(X) \subseteq B_s(X)$ για κάθε $0 < r \le s \le \infty$, και άρα $w_r|_{\mathbb{P}_s X} \subseteq w_s$. Τέλος, προφανώς $w_0|_{\mathbb{P}_r X} \subseteq w_r$ για κάθε $0 \le r \le \infty$.

7. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε η r-οστή τοπολογία του Wasserstein στον $\mathbb{P}_r X$ έχει αριθμήσιμη βάση και έτσι οι ακολουθίες αρκούν για την περιγραφή της.

Απόδειξη. Έστω $\Xi \subseteq BL(X)$ αριθμήσιμη οικογένεια που επάγει την ασθενή τοπολογία στον $\mathbb{P}X$. Προφανώς, ένα δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ στον $\mathbb{P}_r X$ συγκλίνει στο $\mu \in \mathbb{P}_r X$ στον $\mathbb{P}_r X$ ανν $\mu_i \longrightarrow \mu$ ασθενώς και

$$\int_X d^r(x, x_0) d\mu_i(x) \longrightarrow \int_X d^r(x_0, x) d\mu(x),$$

για κάποιο, και άρα και για κάθε $x_0 \in X$. Συνεπώς η r-οστή τοπολογία του Wasserstein στον $\mathbb{P}_r X$ ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγεται από τη συλλογή συναρτήσεων $\Xi \cup \{d_{x_0}\}$ για κάποιο $x_0 \in X$, η οποία έχει αριθμήσιμη βάση.

8. Η απεικόνιση $I_r : (\mathcal{M}^r(X), w_r) \longrightarrow (B_r C(X)^\sharp, w^*)$ με τύπο

$$I_r(\mu)(f) = \int_X f d\mu,$$

είναι γραμμικός ομοιομορφισμός στην εικόνα του, όπου $(B_r C(X)^\sharp, w^*)$ είναι ο αλγεβρικός δυικός του $B^r C(X)$ με την w^*-τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία που επάγεται από την $B_r C(X) \subseteq B_r C(X)^{\sharp\sharp}$.

Παραδείγματα

2. Η ένθεση του Dirac $\delta : X \longrightarrow \mathcal{M}^r(X)$ είναι συνεχής για κάθε $0 \le r \le \infty$.

3. $(\mathcal{M}^r(X), w_r)^* = B^r C(X)$ για κάθε $0 \le r \le \infty$.

Απόδειξη. Όμως ξέρουμε από τη συναρτησιακή ανάλυση, όταν ο X γραμμικός χώρος, η $\mathcal{L} \subseteq X^\sharp$ είναι μία συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών και $w_{\mathcal{L}}$ είναι η ασθενής τοπολογία που ορίζεται στον X από την $\mathcal{L}$, τότε $(X, w_{\mathcal{L}})^* = \mathrm{span}\mathcal{L}$.

Η τοπολογίες του Wasserstein σχετίζονται με την ασθενή τοπολογία μέσω της έννοιας της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας.

Ορισμός 6.4.4 Έστω (X,d) μετρικός χώρος $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ λέγεται *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο* $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ ή αλλιώς $\mathcal{K}$*-ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη* αν

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{K}} \int_{\{x|f(x)\geq R\}} f d\mu = 0. \tag{6.12}$$

Έστω $0 < r < \infty$. Θα λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή ροπή αν η συνάρτηση $f(x) = d^r(x_0, x)$, $x_0 \in X$, είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσισμη στο $\mathcal{K}$, δηλαδή αν

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in K} \int_{X\setminus D(x_0,R)} d^r(x_0,x)d\mu(x) = 0,$$

για κάποιο, και άρα και για κάθε, $x_0 \in X$.

Παρατηρήσεις

9. Η συνάρτηση $[0,\infty) \ni R \mapsto \sup_{\mu\in\mathcal{K}} \int_{\{x|f(x)\geq R\}} f d\mu$ είναι φθίνουσα και άρα το όριο στην (6.12) πάντα υπάρχει.

10. Αν η f είναι ομοιόμοφα ολοκληρώσιμη στο $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$, τότε υπάρχει $M > 0$ τ.ω.

$$\int_X f d\mu \leq M < +\infty \quad \forall \mu \in \mathcal{K}.$$

11. Μία Borel συνάρτηση $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο $\{\mu\}$, $\mu \in \mathbb{P}X$, ανν είναι μ-ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. Αν η f είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο $\{\mu\}$, υπάρχει τότε $R > 0$ τ.ω. $\int_{\{x\,|\,f(x)\geq R\}} f d\mu \leq 1$. Όμως, τότε,

$$\int_X f d\mu = \int_{\{x\,|\,f(x)<R\}} f d\mu + \int_{\{x\,|\,f(x)\geq R\}} f d\mu \leq R + 1 < \infty.$$

Από την άλλη, αν η f είναι μ-ολοκληρώσιμη, τότε $\bigcap_{R=1}^{\infty} \{x\,|\,f(x) \geq R\} = f^{-1}(\infty)$. Όμως αφού η f είναι μ ολοκληρώσιμη, το $f^{-1}(\infty)$ είναι μ-σχεδόν κενό σύνολο και, άρα, αφού η συνάρτηση $\mathcal{B}(X) \ni A \longrightarrow \int_A g d\mu$ είναι μέτρο, έπεται ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\{x\,|\,f(x)\geq R\}} f d\mu = \int_{f^{-1}(\infty)} d\mu = 0.$$

12. Έστω $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{P}X$ και έστω $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ μ_n-ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανν

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n} \int_{\{x\,|\,f(x)\geq R\}} f d\mu_n = 0. \tag{6.13}$$

Απόδειξη. Προφανώς, αν η f είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τότε η (6.13) ισχύει. Έστω, λοιπόν, ότι ισχύει η (6.13) και έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $F^R = \{x|f(x) \geq R\}$. Από την (6.13) υπάρχει $R_0 \geq 0$ τ.ω.

$$R \geq R_0 \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n} \int_{F^R} f d\mu_n \leq \varepsilon.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n \geq n_0} \int_{F^{R_0}} f d\mu_n \leq \varepsilon.$$

Αφού, όμως, η f είναι μ_n-ολοκληρώσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την παρατήρηση 2 έπεται ότι υπάρχει $R_1 > 0$ τ.ω.

$$R \geq R_1 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{1 \leq n \leq n_0} \int_{F^R} f d\mu_n \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $R \geq R_0 \vee R_1$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{F^R} f d\mu_n &= \sup_{1 \leq n \leq n_0} \int_{F^R} f d\mu_n \bigvee \sup_{n \geq n_0} \int_{F^R} f d\mu_n \\ &\leq \varepsilon \bigvee \sup_{n \geq n_0} \int_{F^{R_0}} f d\mu_n \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim\limits_{R \to \infty} \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_{F^R} f d\mu_n = 0$, και έτσι η f είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

13. Αν το $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή κεντρική ροπή για κάποιο $r > 0$, τότε $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}_r X$.

14. Αν το $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή κεντρική ροπή για κάποιο $r > 0$, τότε έχει επίσης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη s-οστή ροπή για κάθε $0 < s \leq r$.

15. Έστω $r > 0$. Μία ακολουθία $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{P}_r X$ έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή ροπή ανν

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{n} \int_{X \setminus D(x_0, R)} d^r(x_0, x) d\mu_n(x) = 0. \tag{6.14}$$

Λήμμα 6.4.1 *Έστω μ_n μία ακολουθία στον $\mathbb{P}X$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στο $\mu \in \mathbb{P}X$.*

(α) *Αν η $g : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ είναι κάτω ημισυνεχής συνάρτηση και η g^- είναι $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$-ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\liminf_{n \to \infty} \int_X g d\mu_n \geq \int_X g d\mu > -\infty. \tag{6.15}$$

(β) *Αν η $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $|f|$ είναι $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$-ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu. \tag{6.16}$$

(γ) *Αν η $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ συνεχής, μ_n-ολοκληρώσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και*

$$\limsup_{n \to \infty} \int_X f d\mu_n \leq \int_X f d\mu < \infty, \tag{6.17}$$

τότε η f είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Απόδειξη (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $g_k = g \vee (-k)$. Από το θεώρημα portmanteau έχουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_k d\mu_n \geq \int_X g_k d\mu \geq \int_X g d\mu,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, $(g_k - g) \leq \mathbb{1}_{\{x|g^-(x)\geq k\}} g^-$. Πράγματι, αν $g^-(x) < k$ τότε $g(x) > -k$ και άρα $g_k(x) - g(x) = 0$, ενώ αν $g^-(x) \geq k$, τότε $g(x) \leq -k \leq 0$ και έτσι

$$g_k(x) - g(x) = -k - g(x) \leq -g(x) = g^-(x).$$

Έπεται ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X g_k d\mu_n - \int_X g d\mu_n \right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{x|g^-(x)\geq k\}} g^- d\mu_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

μιας και η g^- είναι $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Θέτουμε $A_{k,n} := \int_X g_k d\mu_n$, $A_n := \int_X g d\mu_n$ για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ και $A = \int g d\mu$. Με αυτούς τους συμβολισμούς πρέπει να δείξουμε ότι $\liminf_n A_n \geq A$. Η ακολουθία $(\liminf_n A_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και άρα το όριο $\lim_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} A_{k,n}$ υπάρχει και, προφανώς, είναι $\geq A$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \geq \lim_k \liminf_n A_{k,n}. \tag{6.18}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $A_{k,n} \longrightarrow A_n$ ομοιόμορφα ως προς το $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$k \geq k_0 \quad \Longrightarrow \quad A_{k,n} \leq A_n + \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έπεται ότι για κάθε $k \geq k_0$,

$$\liminf_{n\to\infty} A_{k,n} \leq \liminf_{n\to\infty} A_n + \varepsilon,$$

οπότε η (6.18) ισχύει. Το (β) έπεται εφαρμόζοντας το (α) στις συναρτήσεις f, $-f$.
(γ) Έστω $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ συνάρτηση που ικανοποιεί την (6.17). Θέτουμε

$$f^k := f \wedge k, \quad F^k := \{x \in X \mid f(x) \geq k\}.$$

Τότε, επειδή η f^k είναι συνεχής και φραγμένη και το F^k είναι κλειστό υποσύνολο του X, από το θεώρημα portmanteau και την (6.17) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{F^k} f d\mu_n &= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_X (f - f^k) d\mu_n + k\mu_n(F^k) \right) \\
&\leq \int_X (f - f^k) d\mu + k\mu(F^k) = \int_{F^k} f d\mu
\end{aligned}$$

Αφού, όμως, η f είναι μ-ολοκληρώσιμη, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{F^k} f d\mu_n \leq \lim_{k\to\infty} \int_{F^k} f d\mu = 0.$$

Συνεπώς επειδή η f είναι μ_n-ολοκληρώσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο ισχυρισμός έπεται από την παρατήρηση 3. $\square$

Λήμμα 6.4.2 *Έστω $r > 0$ και έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{P}_r X$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\mu \in \mathbb{P}X$. Αν η (μ_n) έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή ροπή, τότε $\mu \in \mathbb{P}_r X$.*

Απόδειξη Αφού

$$\int_X \big(d^r(x_0,x) \wedge R\big) d\mu(x) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_X d^r(x_0,x) d\mu(x),$$

για να δείξουμε ότι $\int_X d^r(x_0,x)d\mu(x) < +\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $0 \le M < \infty$ τ.ω.

$$\int_X \big(d^r(x_0,x) \wedge R\big) d\mu(x) \le M, \tag{6.19}$$

για κάθε $R > 0$. Πράγματι, αφού η (μ_n) έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή ροπή, από την παραρτήρηση 2 υπάρχει $0 \le M < \infty$ τ.ω.

$$\int_X \big(d^r(x_0,x) \wedge R\big) d\mu_n(x) \le M,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $R > 0$. Άρα η (6.19) έπεται από την ασθενή σύγκλιση της (μ_n) □

Θεώρημα 6.4.1 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{P}_r X$, $0 \le r < \infty$. Τότε, για κάθε $\mu \in \mathbb{P}^T X$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) $\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ *στον* $\mathbb{P}_r X$.

(β) $\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ *ασθενώς και η* (μ_n) *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη* r*-οστή ροπή.*

(γ) $\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ *ασθενώς και*

$$\int d^r(x_0,x) d\mu_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int d^r(x_0,x) d\mu(x), \tag{6.20}$$

για κάποιο, και άρα και για κάθε, $x_0 \in X$.

(δ) $\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ *ασθενώς και*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X d^r(x,x_0) d\mu_n(x) \le \int_X d^r(x,x_0) d\mu(x), \tag{6.21}$$

για κάποιο, και άρα και για κάθε, $x_0 \in X$.

Απόδειξη (β)$\Longrightarrow$(α) Έστω $f \in B_r C(X)$ και $x_0 \in X$. Υπάρχουν τότε σταθερές $A, B \ge 0$ τ.ω. $|f(x)| \le A d^r(x_0,x) + B$ για κάθε $x \in X$. Αφού η (μ_n) έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή ροπή, η $|f|$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στο (μ_n). Έτσι από το λήμμα 6.4.1 (β) έπεται ότι

$$\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu.$$

Το ότι (γ)$\Longrightarrow$(β) έπεται από την 6.4.1 (γ), και το ότι (α)$\Longrightarrow$(δ) είναι προφανές. Τελειώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι(δ)$\Longrightarrow$(γ). Από το θεώρημα portmanteau και το ότι η $\mu_k \longrightarrow \mu$ ασθενώς συνεπάγεται ότι

$$\int_X d^r(x,x_0) d\mu(x) \le \liminf_{n\to\infty} \int_X d^r(x,x_0) d\mu_n(x),$$

και συνεπώς η (6.20) είναι ισοδύναμη με την (6.21), όπως θέλαμε. □

Στον $\mathbb{P}_r X$ υπάρχει ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός της κλειστής κυρτής θήκης ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{P}_r X$ με αυτόν στον $\mathbb{P}X$.

Πρόταση 6.4.2 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $1 \leq r < \infty$, $A \subseteq \mathbb{P}_r X$ και $\mu \in \mathbb{P}_r X$. Τότε*

$$\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}^r \iff \int_X f d\mu \leq \sup_{\nu \in A} \int_X f d\nu, \ \ \forall\, f \in B_r C(X),$$

όπου $\overline{\mathrm{co}(A)}^r$ είναι η κλειστή θήκη του $\mathrm{co}(A)$ στον $\mathbb{P}_r X$ (ως προς την r-οστή τοπολογία του $Wasserstein$).

Απόδειξη Καταρχάς παρατηρούμε ότι αφού το $\mathbb{P}_r X$ είναι γραμμικά κυρτό και $A \subseteq \mathbb{P}_r X$, έχουμε ότι $\mathrm{co}(A) \subseteq \mathbb{P}_r X$. Επίσης, αν $\overline{\mathrm{co}(A)}^*$ είναι η κλειστή θήκη του $\mathrm{co}(A)$ στον $(B_r C(X)^\sharp, w^*)$, τότε

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^r = \mathbb{P}_r X \cap \overline{\mathrm{co}(A)}^*,$$

αφού από την παρατήρηση 8, η r-οστή τοπολογία στον $\mathbb{P}_r X$ ταυτίζεται με την τοπολογία που έχει μέσω της ένθεσης $I_r : (\mathbb{P}_r X, w_r) \hookrightarrow (B_r C(X)^\sharp, w^*)$. Συνεπώς, $\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}^r$ ανν $\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*$, αφού $\mu \in \mathbb{P}_r X$. Όμως ο $(B_r C(X)^\sharp, w^*)$ είναι τοπικά κυρτός χώρος, με δυικό τον $(B_r C(X)^\sharp, w^*)^* = B_r C(X)$, και άρα $\mu \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*$ ανν

$$\int_X f d\mu \leq \sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*} G(f),$$

για κάθε $f \in B_r C(X)$. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in B_r C(X)$, έχουμε

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*} G(f) = \sup_{\nu \in A} \int_X f d\nu.$$

Από τη γραμμικότητα του $\int f d\nu$ ως προς το ν έχουμε ότι

$$\sup_{\nu \in \mathrm{co}(A)} \int_X f d\nu = \sup_{\nu \in A} \int_X f d\nu,$$

για κάθε $f \in B_r C(X)$, και συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in B_r C(X)$, έχουμε ότι

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*} G(f) \leq \sup_{\nu \in \mathrm{co}(A)} \int_X f d\nu.$$

Έστω $f \in B_r C(X)$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $F \in \overline{\mathrm{co}(A)}^* \subseteq (B_r C(X)^\sharp, w^*)$ τ.ω.

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*} G(f) \leq F(f) + \varepsilon.$$

Τό σύνολο $U := \left\{ G \in B_r C(X)^\sharp \,\middle|\, |G(f) - F(f)| < \varepsilon \right\}$ είναι υποβασική περιοχή του $F \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*$ στον $(B_r C(X)^\sharp, w^*)$ και, συνεπώς, υπάρχει $\nu \in \mathrm{co}(A) \cap U \subseteq \mathbb{P}_r X$. Τότε,

$$\sup_{G \in \overline{\mathrm{co}(A)}^*} G(f) \leq F(f) + \varepsilon \leq \int_X f d\nu + 2\varepsilon \leq \sup_{\nu \in \mathrm{co}(A)} \int_X f d\nu + 2\varepsilon,$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση

16. Όπως και στην περίπτωση της ασθενούς τοπολογίας, βλέπουμε ότι το σύνολο

$$K := \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \,\middle|\, x_i \in X,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι πυκνό στον $\mathbb{P}_r X$ (ως προς την r-οστη τοπολογία του Wasserstein) και ότι ο $(\mathbb{P}_r X, w_r)$ είναι διαχωρίσιμος ανν ο X είναι διαχωρίσιμος.

Ο ορισμός των χώρων $B_r(X)$, $0 \leq r \leq \infty$ έχει την ακόλουθη γενίκευση.

Ορισμός 6.4.5 Έστω X, Y μετρικοί χώροι και έστω $0 \leq s, r \leq \infty$. Θέτουμε

$$B_r^s(X;Y) := \bigcap_{\mu \in \mathbb{P}_r X} \mathcal{L}^s(\mu; Y),$$

όπου στους χώρους $\mathcal{L}^s(\mu; Y)$, δεν ταυτίζουμε μ-σ.π. συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 7

Το Πρόβλημα Βέλτιστης Μεταφοράς Μάζας

7.1 Διατύπωση του Προβλήματος Βέλτιστης Μεταφοράς Μάζας

Έστω ότι μας έχει ανατεθεί το καθήκον να μεταφέρουμε ένα (πεπερασμένο) σωρό σιτάρι σε μία αποθήκη. Υποθέτουμε ότι η ποσότητα του σταριού γεμίζει πλήρως την αποθήκη. Η μεταφορά αυτή απαιτεί κάποιο κόστος, και φυσιολογικά θέλουμε να πραγματοποιήσουμε αυτή τη μεταφορά με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σωρό της άμμου ως χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$ και την αποθήκη ως ένα χώρο μέτρου $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Αφού ο σωρός γεμίζει πλήρως την αποθήκη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu(X) = \nu(Y)$. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα μ, ν είναι μέτρα πιθανότητας. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς του σωρού στην αποθήκη με μία μετρήσιμη συνάρτηση $c : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$, την οποία θα λέμε συνάρτηση κόστους, θεωρώντας ότι το $c(x, y)$ παριστά το κόστος μεταφοράς μίας μονάδας μάζας από τη θέση x του σωρού στη θέση y της αποθήκης. Δεδομένης της συνάρτησης κόστους, σε κάθε τρόπο μεταφοράς π του σωρού στην αποθήκη, τον οποίο θα λέμε σχέδιο μεταφοράς από το μ στο ν, αντιστοιχεί το ολικό κόστος $\mathcal{T}_c(\pi)$ πραγματοποιήσης της μεταφοράς με βάση το σχέδιο π. Ζητάμε, δεδομένης της συνάρτησης κόστους c, να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος $\mathcal{T}_c(\pi)$, πάνω από όλα τα δυνατά σχέδια μεταφοράς.

Φυσικά, πριν καταπιαστούμε με αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποιήσης, πρέπει να δώσουμε μαθηματικό περιεχόμενο στην έννοια σχέδιο μεταφοράς. Ένας τρόπος να μοντελοποιήσουμε τα σχέδια μεταφοράς είναι ως μετρήσιμες συναρτήσεις $T : X \to Y$, ερμηνεύοντας την ισότητας $y = T(x)$ ως: **όλη** η μάζα σταριού που βρίσκεται στο x, μεταφέρεται στο y. Φυσικά για να παριστά μία μετρήσιμη απεικόνιση T ένα σχέδιο μεταφοράς, πρέπει η χωρητικότητα $\nu(B)$ κάθε περιοχής $B \in N$ της αποθήκης, να ισούται με το συνολικό ποσό σταριού $\mu(T^{-1}(B))$ που μεταφέρεται στο B. Έτσι, μέσω της έννοιας του μέτρου-εικόνα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.1.1 Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ χώροι πιθανότητας. Μία *απεικόνιση μεταφοράς* από το μ στο ν είναι μία μετρήσιμη απεικόνιση $T : X \to Y$ τ.ω. $T_*\mu = \nu$. Το σύνολο όλων των απεικονίσεων μεταφοράς από το μ το ν συμβολίζεται με $\mathcal{T}(\mu,\nu)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν η $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα της f ως προς το $T_*\mu$ ορίζεται ανν το $\int_X f\circ T d\mu$ ορίζεται, και σ' αυτή την περίπτωση,

$$\int_Y f d T_*\mu = \int_X f\circ T d\mu.$$

Το συνολικό κόστος μεταφοράς του μ στο ν, με βάση το σχέδιο μεταφοράς που παριστά η απεικόνιση μεταφοράς T, είναι

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu;T) = \int_X c\big(x,Tx\big)d\mu(x) = \int_{X\times Y} c\ d\,(Id_X,T)_*\mu,$$

όπου $(Id_X,T) : X \longrightarrow X\times Y$ είναι η διαγώνια απεικόνιση $x\mapsto (x,Tx)$. Θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε, λοιπόν, το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς ως εξής: να βρεθούν τα σημεία ελαχίστου του συναρτησιακού $\mathcal{I}_c(\mu,\nu,\cdot)$ που ορίζεται στο $\mathcal{T}(\mu,\nu)$ και να υπολογιστεί το

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu) := \inf\{\mathcal{I}_c(\mu,\nu;T)|\, T\in\mathcal{T}(\mu,\nu)\}. \tag{7.1}$$

Μία απεικόνιση μεταφοράς για την οποία πιάνεται το infimum στην (7.1), θα λέγεται βέλτιστη απεικόνιση μεταφοράς. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_c(\mu,\nu)$ το σύνολο όλων των απεικονίσεων βέλτιστης μεταφοράς από το μ στο ν.

Το 1781, καιρό πριν οριστεί η έννοια του μέτρου, ο Caspar Monge διατύπωσε και μοντελοποίησε το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς όπως παραπάνω, χρησιμοποιώντας πυκνότητες πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ αντί γενικών μέτρων, με συνάρτηση κόστους $c(x,y)$ την ευκλείδια απόσταση $|x-y|$ στον $\mathbb{R}^n$ και διατύπωσε την εικασία ότι υπάρχει βέλτιστη απεικόνιση μεταφοράς. Η πρώτη σωστή απόδειξη της εικασίας του Monge δόθηκε το 1999 από τους Gangbo και Evans στην περίπτωση που οι πυκνότητες πιθανότητας μ, ν έχουν πεπερασμένη πρώτη κεντρική ροπή. Αν εξετάσουμε τη γενικότερη περίπτωση μοντελοποίησης του σωρού και της αποθήκης από μέτρα, εκτός από το ότι η κυρτότητα της συνάρτησης κόστους $c(x,y) = |x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}^n$ είναι "εκφυλισμένη", προκύπτει δυσκολία στο πρόβλημα του Monge και από τη μοντελοποίηση των σχεδίων μεταφοράς ως απεικονίσεις μεταφοράς. Πράγματι κατ' αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα δεν είναι καλώς τεθημένο, αφού ακόμη και σε απλές περιπτώσεις δεν υπάρχει βέλτιστη απεικόνιση μεταφοράς. Π.χ. έστω $\mu = \delta_x$ και $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{y_1}+\delta_{y_2})$, όπου τα $y_1, y_2 \in Y$ είναι διαφορετικά σημεία. Τότε δεν υπάρχουν απεικονίσεις μεταφοράς από το μ στο ν, αφού δεν μπορούμε να μεταφέρουμε το μ στο ν αν δεν μοιράσουμε τη μάζα που βρίσκεται στο x στις τοποθεσίες y_1 και y_2.

Γύρω στο 1940, μέσω της έννοιας των μέτρων, ο Kantorovich γενίκευσε την έννοια του σχεδίου μεταφοράς, έτσι ώστε να είναι δυνατό να μοιράζεται η μάζα που βρίσκεται στη θέση x στον Y, ως εξής. Το πώς κατανέμεται η μάζα που βρίσκεται στο $x\in X$ στον Y, μπορεί να περιγραφεί από ένα μέτρο π_x στην $\mathcal{N}$. Μπορούμε, λοιπόν, να μοντελοποιήσουμε ένα γενικευμένο σχέδιο μεταφοράς ως μία οικογένεια $\pi = \{\pi_x\}_{x\in X}$ μέτρων πιθανότητας π_x στην $\mathcal{N}$, όπου κάθε π_x περιγράφει το πως κατανέμεται στον Y μία μονάδα μάζας στο x κατά τη διαδικασία της μεταφοράς. Παρατηρήστε ότι η συνολική μάζα που παίρνεται από την περιοχή $A \in \mathcal{M}$ του σωρού, είναι

$$\int_A \pi_x(Y) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_{A \times Y}(x,y) d\pi_x(y) \right) d\mu(x) \tag{7.2}$$

και ισούται με τη μάζα $\mu(A)$ που ήταν στο A. Επιπλέον, αν πρόκειται το π να παριστά κάποιο υλοποιήσιμο σχέδιο μεταφοράς, θα πρέπει η συνολική μάζα

$$\int_X \pi_x(B) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_{X \times B}(x,y) d\pi_x(y) \right) d\mu(x)$$

που μεταφέρεται στο $B \in \mathcal{N}$ να ισούται με τη χωρητικότητα $\nu(B)$ της περιοχής B. Για να γράψουμε (7.2), πρέπει η οικογένεια $\pi = \{\pi_x\}_{x \in X}$ να είναι τ.ω. η $X \ni x \mapsto \nu_x(B) \in [0,1]$ να είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Κάθε τέτοια μ-σ.π. ορισμένη οικογένεια $\pi = \{\pi_x\}_{x \in X}$, θα λέγεται μετρήσιμη. Μπορούμε, λοιπόν, να μοντελοποιήσουμε τα σχέδια μεταφοράς από το μ στο ν, ως μ-σ.π. ορισμένες μετρήσιμες απεικονίσεις $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}Y$, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.1.2 Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ χώροι πιθανότητας. Ένα *σχήμα μεταφοράς* από το μ στο ν είναι μία μ-σ.π. ορισμένη οικογένεια $\{\pi_x\}_{x \in X}$ μέτρων πιθανότητας ορισμένων στην $\mathcal{N}$, τ.ω. για κάθε $B \in \mathcal{N}$,

$$\nu(B) = \int_X \pi_x(B) d\mu(x).$$

Για κάθε $x \in X$, η ποσότητα $\int_Y c(x,y) d\pi_x(y)$ παριστά το κόστος μεταφοράς της μάζας στο x στον Y. Σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα, η μετρησιμότητα της οικογένειας $\{\pi_x\}_{x \in X}$ μας εξασφαλίζει ότι η απεικόνιση $X \ni x \longmapsto \int f(x,y) d\pi_x(y) \in [0,\infty]$ είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ και άρα το συνολικό κόστος

$$\mathcal{T}_c(\pi) = \int_X \left(\int_Y c(x,y) d\pi_x(y) \right) d\mu(x)$$

της μεταφοράς, με βάση το σχήμα μεταφοράς $\pi = \{\pi_x\}_{x \in X}$, ορίζεται καλά.

Λήμμα 7.1.1 *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου, $(Y, \mathcal{N})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $\pi = \{\pi_x\}_{x \in X}$ μία μ-σ.π. ορισμένη οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{N}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Η $X \ni x \longmapsto \pi_x(B) \in [0,1]$ είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση, για κάθε $B \in N$.*

(β) *Η $X \ni x \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} \int f(x,y) d\pi_x(y) \in [0,\infty]$ είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση, για κάθε $M \otimes N$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \times Y \to [0,\infty]$.*

(γ) *Η $X \ni x \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} \int f(x,y) d\pi_x(y) \in \mathbb{R}$ είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση, για κάθε $M \otimes N$-μετρήσιμη και φραγμένη απεικόνιση $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Η συνεπαγωγή (γ)$\Longrightarrow$(α) είναι προφανής.
(α)$\Longrightarrow$(β) Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό στην περίπτωση όπου η $f = \mathbb{1}_E$ είναι η δείκτρια κάποιου συνόλου $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Για το σκοπό αυτό, θέτουμε ξ τη συλλογή όλων των μετρήσιμων υποσυνόλων E του $X \times Y$ για τα οποία η $X \ni x \mapsto \int \mathbb{1}_E(x,y) d\pi_x(y) \in \bar{\mathbb{R}}$ είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Προφανώς η ξ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) Περιέχει τη συλλογή $\mathcal{E}$ όλων των συνόλων της μορφής $A \times B$, όπου $A \in \mathcal{M}$ και $B \in \mathcal{N}$, αφού $T\mathbb{1}_{A\times B} = \mathbb{1}_A T\mathbb{1}_{X\times B}$, μ-σ.π., η οποία είναι μετρήσιμη ως γινόμενο μετρήσιμων συναρτήσεων.

(2) Είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, αφού $\mathcal{L}\mathbb{1}_{E^c} = 1 - \mathcal{L}\mathbb{1}_E$, για κάθε $E \in \xi$ και

(3) Είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ξένες ενώ, αφού $\mathcal{L}\mathbb{1}_{\bigsqcup_{i=1}^n E_i} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}\mathbb{1}_{E_i}$, για κάθε $E_i \in \xi$.

Η συλλογή $\mathcal{E}$, είναι στοιχειώδης οικογένεια και άρα η συλλογή $\mathcal{A}$ όλων των πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα. Από λήμμα μονότονης κλάσης, ξέρουμε ότι η μονότονη κλάση $\xi(\mathcal{A})$ που παράγεται από την $\mathcal{A}$, ταυτίζεται με τη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A})$ που παράγεται από την $\mathcal{A}$. Έτσι, αφού από τις ιδιότητες (1) και (3) έχουμε ότι $\mathcal{A} \subseteq \xi$, αν δείξουμε ότι η ξ είναι μονότονη κλάση, τότε από το λήμμα μονότονης κλάσης θα έχουμε ότι

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{A}) = \xi(\mathcal{A}) \subseteq \xi,$$

όπως θέλουμε. Από την ιδιότητα (2) της ξ, αρκεί να δείξουμε ότι η ξ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις. Έστω λοιπόν $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία συνόλων στην ξ. Αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{L}\mathbb{1}_{E_i}$ είναι μετρήσιμη για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \xi$. Αφού $\{E_i\}$ είναι αύξουσα, $\mathbb{1}_{E_i} \nearrow \mathbb{1}_E$ κατά σημείο. Έτσι, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\mathbb{1}_E(x) = \int_Y \mathbb{1}_E(x,y)d\pi_x(y) = \lim_{i\to\infty} \int_Y \mathbb{1}_{E_i}(x,y)d\pi_x(y) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}\mathbb{1}_{E_i}(x),$$

μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$. Συνεπώς η $\mathcal{L}\mathbb{1}_E$ είναι μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μετρήσιμων συναρτήσεων και, έτσι, ο ισχυρισμός ισχύει για δείκτριες συναρτήσεις. Ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει και για απλές συναρτήσεις και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι ισχύει για θετικές συναρτήσεις $f : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$.
(β)$\Longrightarrow$(γ) Έπεται από τη γραμμικότητα της $\mathcal{L}$, αφού μπορούμε να εκφράσουμε την f ως το άθροισμα του θετικού και του αρνητικού της μέρους. □

Η έννοια του σχήματος μεταφοράς, γενικεύει την έννοια της απεικόνισης μεταφοράς. Πράγματι, κάθε απεικόνιση μεταφοράς $T : X \longrightarrow Y$ μπορεί να ταυτιστεί με το σχήμα μεταφοράς $\pi_T = \{\delta_{Tx}\}_{x\in X}$, και αυτή η ταύτιση είναι 1-1, αν η $\mathcal{N}$ διαχωρίζει το σημεία του Y (μία συνθήκη που ισχύει στις περισσότερες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις) και διατηρεί τα κόστος, αφού,

$$\mathcal{T}_c(\pi_T) = \int_X \left(\int_Y c(x,y)d\delta_{Tx}(y) \right) d\mu(x) = \int_X c(x,Tx)d\mu(x) = \mathcal{T}_c(T).$$

Παρατηρήστε ότι το σύνολο $\Gamma(\mu,\nu)$ που αποτελείται από όλα τα σχήματα μεταφοράς που απεικονίζουν το μ στο ν είναι πάντοτε μη-κενό, αφού περιέχει το σχέδιο μεταφοράς $\pi = \{\pi_x\}_{x\in X}$ με τύπο $\pi_x = \nu$ για κάθε $x \in X$. Αυτό το σχέδιο μεταφοράς κατανέμει τη μονάδα μάζας στο $x \in X$ σε όλον το χώρο Y ανάλογικά με τη χωρητικότητα ν. Ο Kantorovich διατύπωσε το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς ως εξής: να ελαχιστοποιηθεί το συναρτησοειδές

$$I(\pi) = \int_X \left(\int_Y c(x,y)d\pi_x(y) \right) d\mu(x),$$

πάνω από όλα τα σχήματα μεταφοράς $\pi = \{\pi_x\}_{x\in X}$. Στην ορολογία του λογισμού μεταβολών, το πρόβλημα του Kantorovich είναι χαλάρωση του προβλήματος του Monge αφού επεκτείνουμε την κλάση των αντικειμένων πάνω από τα οποία παίρνουμε το infimum, από το σύνολο $\mathcal{T}(\mu,\nu)$ των απεικονίσεων μεταφοράς από το μ το ν, στο σύνολο $\Gamma(\mu,\nu)$ των σχημάτων μεταφοράς.

Έως τώρα, έχουμε μοντελοποιήσει το σωρό στάρι και την αποθήκη σε διαφορετικούς χώρους πιθανότητας. Ωστόσο, στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, ο σωρός και η αποθήκη μοντελοποιούνται ως μέτρα πιθανότητας στον ίδιο μετρήσιμο χώρο. Μάλιστα, όπως θα δουμε στη συνέχεια, ακόμη και από καθαρά μαθηματική άποψη, μία τέτοια επιπλέον υπόθεση δεν περιορίζει τη γενικότητα. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ χώροι μέτρου και $c : X\times Y \longrightarrow [0,\infty]$ μετρήσιμη απεικόνιση κόστους. Το πρόβλημα του Kantorovich για την τριάδα (c,μ,ν) είναι ισοδύναμο (με την έννοια που θα φανεί) με το πρόβλημα του Wasserstein για κάποια τριάδα $(\bar{c},\bar{\mu},\bar{\nu})$, όπου τα μέτρα $\bar{\mu},\bar{\nu}$ ορίζονται στον ίδιο μετρήσιμο χώρο Z και η $\bar{c} : Z\times Z \longrightarrow [0,\infty]$ είναι μετρήσιμη. Μία τέτοια τριάδα κατασκευάζεται στο μετρήσιμο χώρο $Z := X\times Y$ ως εξής. Επιλέγουμε $x_0\in X$, $y_0\in Y$ και θεωρούμε τις ενθέσεις

$$\begin{aligned} i^{y_0} :\ & X \hookrightarrow X\times Y, & \qquad i^{x_0} : Y \hookrightarrow X\times Y \\ & x \mapsto (x,y_0) & y \mapsto (x_0,y) \end{aligned}$$

Επίσης, θέτουμε $p^1 : X\times Y \longrightarrow X$, $p^2 : X\times Y \longrightarrow Y$ τις φυσικές προβολές. Προφανώς $p^1\circ i^{y_0} = id_X$ και $p^2\circ i^{x_0} = id_Y$. Έπειτα θέτουμε $\bar{\mu} := i^{y_0}_*\mu$, $\bar{\nu} := i^{x_0}_*\nu$ και ορίζουμε τη συνάρτηση κόστους $\bar{c} : Z\times Z \longrightarrow [0,\infty]$ από τον τύπο

$$\bar{c}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = c(x_1,y_2).$$

Παρατηρούμε ότι $\bar{c} = c\circ(p^1\times p^2)$. Το σύνολο $\Gamma(\mu,\nu)$ όλων των σχημάτων μεταφοράς από το μ στο ν εμφυτεύεται στο $\Gamma(i^{y_0}_*\mu, i^{x_0}_*\nu)$ μέσω της απεικόνισης $\Psi : \Gamma(\mu,\nu) \hookrightarrow \Gamma(i^{y_0}_*\mu, i^{x_0}_*\nu)$ με τύπο

$$\Psi(\pi) = i^{x_0}_*\circ\pi\circ p^1.$$

Καταρχάς παρατηρούμε ότι η $\Psi(\pi)$ είναι πράγματι σχήμα μεταφοράς από το $i^{y_0}_*\mu$ στο $i^{x_0}_*\nu$ αφού για κάθε $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} i^{x_0}_*\nu(E) &= \nu\big((i^{x_0})^{-1}(E)\big) = \int_X \pi_x\big((i^{x_0})^{-1}(E)\big)d\mu(x) = \\ &= \int_X i^{x_0}_*\pi_x(E)d\mu(x) = \int_X \Psi(\pi)_{(x,y_0)}(E)d\mu(x) = \\ &= \int_Z \Psi(\pi)_{(x,y)}(E)d(i^{y_0}_*\mu)(x,y) \end{aligned}$$

και ότι η $\Phi : \Gamma(i^{y_0}_*\mu, i^{x_0}_*\nu) \longrightarrow \Gamma(\mu,\nu)$ με τύπο

$$\Phi(\Pi) = p^2_*\circ\Pi\circ i^{y_0}$$

είναι αριστερή αντίστροφη της Ψ. Τα προβλήματα του Kantorovich για τις τριάδες (c,μ,ν) και $(\bar{c},\bar{\mu},\bar{\nu})$ είναι ισοδύναμα με την έννοια ότι $\mathcal{I}_c(\mu,\nu) = \mathcal{I}_{\bar{c}}(i^{y_0}_*\mu, i^{x_0}_*\nu)$ και μπορούμε να επανακτήσουμε τα σύνολα $\Gamma_c(\mu,\nu)$ και $\mathcal{T}_c(\mu,\nu)$ από τα σύνολα $\Gamma_{\bar{c}}(i^{y_0}_*\mu, i^{x_0}_*\nu)$ και $\mathcal{T}_{\bar{c}}(i^{y_0}_*\mu, i^{x_0}_*\nu)$

αντίστοιχα. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\mathcal{I}_c(\mu,\nu)=\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες ισότητες:

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\pi)=\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Psi(\pi)) \tag{7.3}$$

για κάθε σχήμα μεταφοράς $\pi\in\Gamma(\mu,\nu)$, και

$$\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Pi)=\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\Phi(\Pi)) \tag{7.4}$$

για κάθε σχήμα μεταφοράς $\Pi\in\Gamma(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)$. Για την απόδειξη της (7.3), παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Psi(\pi)) &= \int_Z\int_Z \bar{c}(z,w)d\Psi(\pi)_z(w)di_*^{y_0}\mu(z)\\
&= \int_Z\int_Z \bar{c}(z,w)di_*^{x_0}\pi_{z_1}(w)di_*^{y_0}\mu(w)\\
&= \int_X\int_Y \bar{c}\big((z_1,y_0),(x_0,w_2)\big)d\pi_{z_1}(w_2)d\mu(z_1)\\
&= \int_X\int_Y c(z_1,w_2)d\pi_{z_1}(w_2)d\mu(z_1)=\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\pi)
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της (7.4) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_c\left(\mu,\nu;\Phi(\Pi)\right) &= \int_X\int_Y c(x,y)d\Phi(\Pi)_x(y)d\mu(x)\\
&= \int_X\int_Y c(x,y)dp_*^2\Pi_{(x,y_0)}(y)d\mu(x)\\
&= \int_Z\int_Z c(p^1(x,y_0),p^2(x_0,y))d\Pi_{(x,y_0)}(x_0,y)di_*^{y_0}\mu(x,y_0)\\
&= \int_Z\int_Z \bar{c}(z,w)d\Pi_z(w)di_*^{y_0}\mu(z)=\mathcal{I}_{\bar{c}}\left(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Pi\right)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (7.4), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_c(\mu,\nu) &= \inf\left\{\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\pi)\middle|\pi\in\Gamma(\mu,\nu)\right)\\
&= \inf\left\{\mathcal{I}_{\bar{c}}\big(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Phi(\pi)\big)\middle|\pi\in\Gamma(\mu,\nu)\right\}\\
&\overset{(\star)}{=} \inf\left\{\mathcal{I}_{\bar{c}}\big(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Pi\big)\middle|\Pi\in\Gamma(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)\right\}=\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)
\end{aligned}$$

όπου η ισότητα $(\star)$ ισχύει επειδή η Φ είναι επί.

Τέλος δείχνουμε ότι μπορούμε να ανακτήσουμε τα σύνολα $\Gamma_c(\mu,\nu)$ και $\mathcal{T}_c(\mu,\nu)$, χρησιμοποιώντας τη Φ, δηλαδή ότι η $\Phi|_{\Gamma_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)}:\Gamma_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)\longrightarrow\Gamma_c(\mu,\nu)$ είναι επί. Προφανώς, αν η $\Pi\in\Gamma(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)$ είναι $\bar{c}$-βέλτιστη, τότε

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\Phi(\Pi))=\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu,\Pi)=\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu)=\mathcal{I}_c(\mu,\nu),$$

δηλαδή το $\Phi(\Pi)$ είναι c-βέλτιστο, δηλαδή $\Phi(\Gamma_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu))\subseteq\Gamma_c(\mu,\nu)$. Από την άλλη, συνδυάζοντας τις (7.3) και (7.4), βλέπουμε ότι

$$\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Pi)=\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu;\Psi\circ\Phi(\Pi))$$

και άρα αν $\pi \in \Gamma_c(\mu,\nu)$, τότε κάθε $\Pi \in \Phi^{-1}\{\pi\} \neq \emptyset$ πρέπει να είναι υποχρεωτικά $\bar{c}$-βέλτιστο, αφού

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu; \Pi) &= \mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu; \Psi\circ\Phi(\Pi)) = \mathcal{I}_{\bar{c}}\big(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu; \Psi(\pi)\big)\\ &= \mathcal{I}_c(\mu,\nu,\pi) = \mathcal{I}_c(\mu,\nu) = \mathcal{I}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu),\end{aligned}$$

δηλαδή $\Gamma_c(\mu,\nu) \subseteq \Phi(\Gamma_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu))$. Επιπλέον, οι απεικονίσεις Ψ, Φ απεικονίζουν απεικονίσεις μεταφοράς σε απεικονίσεις μεταφοράς, μέσω της εμφύτευσης $\mathcal{T}_c(\mu,\nu) \ni T \mapsto \pi_T \in \Gamma(\mu,\nu)$, και άρα $\mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \Phi(\mathcal{T}_{\bar{c}}(i_*^{y_0}\mu, i_*^{x_0}\nu))$.

Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, και για πρακτικούς και για θεωρητικούς σκοπούς, προκύπτουν όταν ο μετρήσιμος χώρος X πάνω στον οποίο ορίζονται τα μέτρα που παριστούν το σωρό και την αποθήκη, έχει κάποια επιπλέον δομή, π.χ. τοπολογική, μετρική ή διαφορική. Στην περίπτωση που τα μ, ν ορίζονται στην Borel σ-άλγεβρα ενός μετρικού χώρου (X,d), ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν συναρτήσεις κόστους της μορφής

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto c\big(d(x,y)\big) \in [0,\infty],$$

όπου $c : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ είναι κάποια κοίλη ή κυρτή συνάρτηση, όπως η $|\cdot|^p$, $0 < p < \infty$. Θα ασχοληθούμε κυρίως με τέτοιες συναρτήσεις κόστους.

Ορισμός 7.1.3 Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος πιθανότητας, $(Y,\mathcal{N})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\pi_x\}_{x\in X} \subseteq \mathbb{P}Y$ μία μ-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη οικογένεια. Το ολοκλήρωμα $\nu \in \mathbb{P}Y$ της $\{\pi_x\}_{x\in X}$ ως προς το μ είναι το μέτρο με τύπο,

$$\nu(F) = \int_X \pi_x(F)d\mu(x). \tag{7.5}$$

Συνήθως θα το συμβολίζουμε $\nu = \int_X \pi_x d\mu(x)$.

Λήμμα 7.1.2 *Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος πιθανότητας, $(Y,\mathcal{N})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $\{\pi_x\}_{x\in X} \subseteq \mathbb{P}Y$ μία μ-σ.π. ορισμένη οικογένεια.*

(α) *Το ολοκλήρωμα ν της $\{\pi_x\}_{x\in X}$ ως προς το μ είναι πράγματι μέτρο, η $\{\pi_x\}_{x\in X}$ είναι σχήμα μεταφοράς από το μ στο ν και χαρακτηρίζεται από την ισχύ της*

$$\int_Y f(y)d\nu(y) = \int_X\int_Y f(y)d\pi_x(y)d\mu(x), \tag{7.6}$$

για κάθε $f \in B(Y)$.

(β) *Για κάθε σχήμα μετραφοράς $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}Y$ από το $\mu \in \mathbb{P}X$ στο $\nu \in \mathbb{P}Y$, ο τύπος*

$$\widetilde{\pi}(E) = \int_X\int_Y \mathbb{1}_E(x,y)d\pi_x(y)d\mu(x), \quad E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N},$$

ορίζει ένα μέτρο $\widetilde{\pi} \in \mathbb{P}(X\times Y)$ τ.ω.

$$\int_{X\times Y} f d\widetilde{\pi} = \int_X\int_Y f(x,y)d\pi_x(y)d\mu(x), \tag{7.7}$$

για κάθε $f \in B(X \times Y)$*, και*

$$\widetilde{\pi}(A \times Y) = \mu(A), \qquad \widetilde{\pi}(X \times B) = \nu(B), \tag{7.8}$$

για κάθε $A \in \mathcal{M}$ *και κάθε* $B \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη(α) Το ότι η (7.5) ορίζει πράγματι μέτρο και ότι το π είναι σχήμα μεταφοράς από το μ στο ν είναι προφανές. Θα αποδείξουμε την (7.6). Από τον ορισμό του ν, η (7.6) ισχύει για απλές συναρτήσεις $f \in B(X)$. Γράφοντας κάθε $f \in B(X)$ ως το άθροισμα του θετικού και του αρνητικού της μέρους, βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την (7.6) για θετικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \longrightarrow [0, \infty)$. Έστω f μία τέτοια συνάρτηση και έστω (f_n) μία ακολουθία απλών συναρτήσεων που αυξάνει κατά σημείο στην f. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έπεται ότι η συνάρτηση $X \ni x \mapsto \int_Y f_n d\pi_x$ αυξάνει κατά σημείο στη συνάρτηση $X \ni x \mapsto \int_Y f d\pi_x$. Συνεπώς, μία ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \int_Y f_n(y) d\pi_x(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \int_Y f(y) d\pi_x(y) d\mu(x). \end{aligned}$$

(β) Δείχνουμε πρώτα ότι το $\widetilde{\pi}$ είναι πράγματι μέτρο. Προφανώς, $\widetilde{\pi}(\emptyset) = 0$. Έστω $E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Τότε $\mathbb{1}_E = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_i}$ και άρα

$$\widetilde{\pi}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \int_Y \mathbb{1}_{E_i}(x, y) d\pi_x(y) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\pi}(E).$$

Το ότι το $\widetilde{\pi}$ ικανοποιεί την (7.7) αποδεικνύεται όπως το (α) και η (7.8) έπεται από το ότι το π μεταφέρει το μ στο ν. □

Παράδειγμα

1. Έστω $T : (X, \mu) \longrightarrow Y$ μετρήσιμη απεικόνιση και $\delta : Y \longrightarrow \mathbb{P}Y$ η ένθεση του Dirac. Τότε

$$\int_X (\delta \circ T)(x) d\mu(x) = T_* \mu, \qquad \widetilde{\delta \circ T} = (Id_X, T)_* \mu.$$

Απόδειξη. Θα ελέγξουμε μόνο τη δεύτερη ισότητα. Έστω $E \subseteq X \times Y$ Borel σύνολο. Τότε,

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta \circ T}(E) &= \int_X \int_Y \mathbb{1}_E(x, y) d\delta_{T(x)}(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \mathbb{1}_E(x, Tx) d\mu(x) = (Id_X, T)_* \mu(E). \end{aligned}$$

Τεχνικά, είναι βολικότερο να κωδικοποιήσουμε όλη την πληροφορία ενός σχήματος μεταφοράς $\{\pi_x\}_{x \in X} \in \Gamma(\mu, \nu)$ από το μ στο ν, στο μέτρο πιθανότητας $\widetilde{\pi} \in \mathbb{P}(X \times Y)$ του λήμματος 7.1.2 (β). Οδηγούμαστε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.1.4 Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ χώροι πιθανότητας. Ένα *σχέδιο μεταφοράς* από το μ στο ν, είναι ένα μέτρο πιθανότητας $\pi \in \mathbb{P}(X \times Y)$ τ.ω.

$$\pi(A \times Y) = \mu(A), \qquad \pi(X \times B) = \nu(B), \tag{7.9}$$

για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και κάθε $B \in \mathcal{N}$. Το σύνολο όλων των σχεδίων μεταφοράς από το μ στο ν θα συμβολίζεται με $\Pi(\mu,\nu)$.

Γενικότερα, έστω $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$, $i=1,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$ μετρήσιμοι χώροι και $\pi \in \mathbb{P}(X_1 \times \ldots \times X_n)$. Τα μέτρα $p^i_*\pi$, $i=1,\ldots,n$, όπου $p^i : X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow X_i$ είναι οι προβολές, λέγονται οι περιθώριες κατανομές του π. Ένα μέτρο $\pi \in \mathbb{P}(X_1 \times \ldots \times X_n)$ θα λέγεται πολλαπλό σχέδιο με περιθώριες κατανομές μ_i αν $p^i_*\pi = \mu_i$ για κάθε $i=1,\ldots,n$. Το σύνολο όλων των πολλαπλών σχεδίων με περιθώριες κατανομές $\mu_1,\ldots,\mu_n$ συμβολίζεται με $\Pi(\mu_1,\ldots,\mu_n)$.

Μέσω της έννοιας των σχεδίων μεταφοράς οδηγούμαστε σε μία περαιτέρω χαλάρωση του προβλήματος βέλτιστης μεταφοράς. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ χώροι πιθανότητας και $c : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ συνάρτηση κόστους. Να ελαχιστοποιηθεί το συναρτησοειδές $\mathcal{I}(\mu,\nu;\cdot) : \Pi(\mu,\nu) \longrightarrow [0,\infty]$, με τύπο

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\pi) = \int_{X\times Y} c d\pi.$$

Φυσικά, η ποσότητα $\mathcal{I}_c(\mu,\nu;\pi)$ παριστά το συνολικό κόστος κατά τη μεταφορά με βάση το σχέδιο μεταφοράς π. Το σύνολο όλων των c-βέλτιστων σχεδίων μεταφοράς θα συμβολίζεται με $\Pi_c(\mu,\nu)$.

Παρατηρήσεις

1. Όπως θα δούμε στην πρώτη παράγραφο του επόμενου κεφαλαίου, αν τα μ,ν είναι σφικτά μέτρα σε (πλήρεις) μετρικούς χώρους, τότε κάθε σχέδιο μεταφοράς παριστάνεται μονοσήμαντα από κάποιο μ-σ.π. ορισμένο σχήμα μεταφοράς. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, οι διατυπώσεις του προβλήματος βέλτιστης μεταφοράς με σχήματα και σχέδια μεταφοράς είναι ισοδύναμες.

2. Οι συνθήκες (7.9) είναι ισοδύναμες με κάθε μία από τις ακόλουθες:

(α) $p^1_*\pi = \mu$ και $p^2_*\pi = \nu$, όπου $p^1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p^2 X \times Y \longrightarrow Y$ είναι οι προβολές.

(β) Για κάθε φραγμένες και μετρήσιμες συναρτήσεις $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{X\times Y} \big(\phi(x) + \psi(y)\big) d\pi(x,y) = \int_X \phi(x) d\mu(x) + \int_Y \phi(x) d\nu(x)$$

Επιπλέον, στην περίπτωση όπου οι X, Y είναι μετρικοί χώροι και τα μ, ν Borel μέτρα στους X, Y αντίστοιχα, τότε οι παραπάνω ισοδυναμίες παραμένουν αληθείς και αν απαιτήσουμε από τις συναρτήσεις δοκιμής ϕ, ψ του (β) να ανήκουν στο σύνολο όλων των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

3. Έστω X, Y μετρικοί χώροι και μ, ν σφικτά μέτρα πιθανότητας στους X, U αντίστοιχα. Τότε, για κάθε σχέδιο μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ έχουμε ότι

$$\pi(\mathrm{supp}\mu \times \mathrm{supp}\nu) = \pi\big((\mathrm{supp}\mu \times Y) \cap (X \times \mathrm{supp}\nu)\big) = 1,$$

αφού από την (7.9), τα σύνολα $\mathrm{supp}\mu \times Y$ και $X \times \mathrm{supp}\nu$ στηρίζουν το π. Συνεπώς, κάθε σχέδιο μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ στηρίζεται από το σύνολο $\mathrm{supp}\mu \times \mathrm{supp}\nu$. Όμως το $\mathrm{supp}\mu\times\mathrm{supp}\nu$ είναι διαχωρίσιμο και κλειστο αφού τα $\mathrm{supp}\mu$ και $\mathrm{supp}\nu$ είναι διαχωρίσιμα και κλειστά ως φορείς σφικτών μέτρων και άρα ο φορέας κάθε σχεδίου μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ υπάρχει και

$$\mathrm{supp}\pi \subseteq \mathrm{supp}\mu \times \mathrm{supp}\nu.$$

Συνεπώς, $\Pi(\mu,\nu) \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{supp}\mu\times\mathrm{supp}\nu)$ και άρα η ασθενής τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη στο $\Pi(\mu,\nu)$.

4. Τα σύνολα $\mathcal{T}(\mu,\nu) \subseteq \Gamma(\mu,\nu) \subseteq \Pi(\mu,\nu)$ και $\mathcal{T}_c(\mu,\nu) \subseteq \Gamma_c(\mu,\nu) \subseteq \Pi_c(\mu,\nu)$ είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathcal{M}(X \times Y)$.

5. Έστω $\pi \in \mathbb{P}(X \times Y)$. Αν οι περιθώριες κατανομές του έχουν πεπερασμένη r-οστή κεντρική ροπή, τότε $\pi \in \mathbb{P}_r(X \times Y)$. Ειδικότερα, αν $\mu, \nu \in \mathbb{P}_r X$, τότε $\Pi(\mu,\nu) \subseteq \mathbb{P}_r(X \times Y)$. Αυτό έπεται εύκολα από την παρατήρηση 2 και την τριγωνική ανισότητα.

Μέσω της έννοιας των σχεδίων μεταφοράς και της παρατήρησης 1 μπορούμε έυκολα να δούμε ότι το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς (μ,ν,c), στη διατύπωση του Kantorovich έχει πάντα λύση, αρκεί τα μ,ν να είναι σφικτά και η συνάρτηση κόστους c κάτω ημισυνεχής.

Πρόταση 7.1.1 *Έστω μ,ν σφικτά μέτρα στους μετρικούς χώρους X, Y αντίστοιχα και έστω $c : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Τότε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς*

$$\inf\big\{\mathcal{I}(\mu,\nu;\pi)\big|\pi \in \Pi(\mu,\nu)\big\}$$

του μ στο ν πιάνεται για κάποιο σχέδιο μεταφοράς $\pi_0 \in \Pi(\mu,\nu)$.

Απόδειξη Η βασική παρατήρηση είναι ότι το σύνολο $\Pi(\mu,\nu)$ είναι συμπαγές ως προς την ασθενή τοπολογία. Αφού τα μ,ν είναι σφικτά, κάθε σχέδιο μεταφοράς στο $\Pi(\mu,\nu)$ στηρίζεται από το διαχωρίσιμο σύνολο $\mathrm{supp}(\mu\otimes\nu)$ και έτσι από το θεώρημα του Prokhorov αρκεί να δείξουμε ότι το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι σφικτό και κλειστό. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφου τα μ,ν είναι σφικτά, υπάρχουν συμπαγή σύνολα $K \subseteq X$, $L \subseteq Y$ τ.ω.

$$\mu(X \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \nu(Y \setminus L) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \pi\big((X \times Y) \setminus (K \times L)\big) &\leq \pi\big(X \times (Y \setminus L)\big) + \pi\big((X \setminus K) \times Y\big) \\ &= \nu(Y \setminus L) + \mu(X \setminus K) = \varepsilon, \end{aligned}$$

και άρα το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι σφικτό. Επιπλέον, το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι κλειστό ως προς την ασθενή σύγκλιση, αφού αν η $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία στο $\Pi(\mu,\nu)$ τ.ω. $\pi_n \longrightarrow \pi \in \mathbb{P}(X \times Y)$ και

$p^1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p^2 : X \times Y \longrightarrow Y$ είναι οι προβολές, τότε

$$p^1_* \pi = p^1_* \lim_n \pi_n = \lim_n p^1_* \pi_n = \lim_n \mu = \mu$$

και ομοίως $p^2_* \pi = \nu$, δηλαδή $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

Από τη συμπάγεια του $\Pi(\mu, \nu)$ υπάρχει ακολουθία $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ στο $\Pi(\mu, \nu)$, τ.ω. $\pi_n \xrightarrow{n} \pi \in \Pi(\mu, \nu)$ και $\mathcal{I}(\mu, \nu; \pi_n) \xrightarrow{n} \mathcal{I}(\mu, \nu)$. Τότε, από την κάτω ημισυνέχεια της c και το θεώρημα portmanteau, έχουμε ότι

$$\mathcal{I}(\mu, \nu; \pi) = \int c d\pi \leq \liminf_n \int c d\pi_n = \lim_n \mathcal{I}(\mu, \nu; \pi_n) = \mathcal{I}(\mu, \nu)$$

όπως ζητούσαμε. □

Η συμπάγεια του $\Pi(\mu, \nu)$ όταν τα μ και ν είναι σφικτά είναι αρκετά χρήσιμη. Σύμφωνα με το ακόλουθο κριτήριο, αυτή η ιδιότητα ισχύει και για πολλαπλά σχέδια. Δηλαδή το $\Pi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ είναι συμπαγές στην ασθενή τοπολογία αν τα μ_i είναι σφικτά, $i = 1, \ldots, n$.

Λήμμα 7.1.3 *Έστω $X, X_2, X_3, \ldots, X_n$ μετρικοί χώροι και $p^i : X \longrightarrow X_i$ συνεχείς απεικονίσεις τ.ω. η διαγώνια απεικόνιση $p := (p^1, \ldots, p^n) : X \longrightarrow X_1 \times \ldots \times X_n$, να είναι γνήσια. Τότε το $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ είναι σφικτό ανν το $\mathcal{K}_i := p^i_*(\mathcal{K})$ είναι σφικτό για κάθε $i = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη Είναι προφανές ότι αν το $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}X$ είναι σφικτό, τότε και τα $\mathcal{K}_i$ είναι σφικτά. Αποδεικνύουμε λοιπόν το αντίστροφο. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\mu \in \mathbb{P}X$ θέτουμε $\mu_i \in \mathbb{P}X_i$ το μέτρο $p^i_* \mu$. Από την υπόθεση, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_i \subseteq X_i$ τ.ω.

$$\mu_i(X_i \setminus K_i) \leq \frac{\varepsilon}{n}, \quad \forall \mu \in \mathcal{K}.$$

Θέτουμε $K = \prod_{i=1}^n K_i$. Επειδή η $p = (p^1, \ldots, p^n)$ είναι γνήσια, το σύνολο $p^{-1}(K) = \bigcap_{i=1}^n K_i$ είναι συμπαγές, και για κάθε $\mu \in \mathcal{K}$ έχουμε ότι

$$\mu(X \setminus K) \leq \sum_{i=1}^n \mu(X_i \setminus K_i) \leq \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει τη σφικτότητα του $\mathcal{K}$. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα εξετάζοντας προσεκτικότερα την κανονικοποιημένη διακριτή περίπτωση του προβλήματος βέλτιστης μεταφοράς. Σύμφωνα με την πρόταση που ακολουθεί, ένα πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς της μορφής $(\sum_{i=1}^n \delta_{y_i}, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, c)$ ανάγεται στο να βρεθεί μία βέλτιστη αντιστοίχιση των x_i με τα y_i. Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς έχει λύση, ακόμη και στη διατύπωση του Monge.

Πρόταση 7.1.2 *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$, $\nu\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{y_i}$ μέτρα πιθανότητας στους μετρήσιμους χώρους X, Y αντίστοιχα. Έστω $c : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ συνάρτηση κόστους. Υπάρχει τότε μετάθεση $\sigma \in S(n)$ τ.ω.*

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_{\sigma(i)}). \tag{7.10}$$

Ειδικότερα, αν τα σημεία x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε υπάρχει βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς για το (μ,ν,c), το οποίο επάγεται από κάποια απεικόνιση μεταφοράς $T : X \longrightarrow Y$.

Απόδειξη Κάθε σχέδιο μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ στηρίζεται στο σύνολο $\{(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{n}$. Συνεπώς η απεικόνιση

$$\Pi(\mu,\nu) \ni \pi \mapsto (\pi_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{B}_n,$$

όπου $\pi_{ij} := n\pi\{(x_i,y_j)\}$, $i,j = 1,\ldots,n$ ορίζει μία αμφιμινοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\Pi(\mu,\nu)$ και του συνόλου $\mathfrak{B}_n$ όλων των διπλά στοχαστικών $n \times n$ πραγματικών πινάκων. Συνεπώς, το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς (μ,ν,c) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\inf\left\{\sum_{i,j=1}^{n} c(x_i,y_j)\pi_{ij} \mid \pi \in \mathfrak{B}_n\right\}.$$

Θα δείξουμε ότι αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει ελάχιστο, το οποίο πιάνεται σε κάποιο πίνακα μετάθεσης $P \in \mathcal{B}_n$. Φυσικά, αυτό συναπάγεται την (7.10), όπου $\sigma \in S(n)$ είναι η μετάθεση που αντιστοιχεί στο $i \in \{1,\ldots,n\}$, το δείκτη της μοναδικής στήλης του P με μη-μηδενική i-οστή συνιστώσα. Με τη σειρά του, αυτό συνεπάγεται και το δεύτερο ισχυρισμό, αφού αν τα x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους, η απεικόνιση $T : X \longrightarrow Y$, που ορίζεται στο φορεά του μ από τον τύπο $T(x_i) = y_{\sigma(i)}$ (οι τιμές της έξω από το $\mathrm{supp}\mu$ δεν έχουν σημασία), είναι βέλτιστη απεικόνιση μεταφοράς από το μ στο ν. Τώρα, από το θεώρημα του Birkhoff (θεώρημα 4.8 στο [1]) γνωρίζουμε ότι οι πίνακες μεταθέσεις είναι ακριβώς τα ακραία σημεία του $\mathfrak{B}_n$. Έτσι, αφού αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποιήσης είναι γραμμικό με συμπαγή και κυρτό πεδίο ορισμού, επιδέχεται ελαχιστοποιητή ο οποίος είναι ακραίο σημείο του πεδίου ορισμού του. Πράγματι, από το θεώρημα του Καραθεοδωρή (σελ. 37 στο [1]), κάθε $B \in \mathfrak{B}_n$ είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ n^2+1 ακραίων σημείων του $\mathfrak{B}_n$. Συνεπώς, αν γράψουμε κάποιο σημείο ελαχίστου $B \in \mathcal{B}_n$ ως

$$B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i,$$

για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, κάποια $\lambda_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$, και κάποια ακραία σημεία P_i του $\mathfrak{B}_n$, έπεται ότι κάποιο από τα P_i πρέπει να είναι σημείο ελαχίστου. □

7.2 Δυισμός του Kantorovich

Το κύριο αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι να δούμε την απόδειξη ενός σημαντικού θεωρήματος του Kantorovich το οποίο συσχετίζει το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς με το κατάλληλο πρόβλημα μεγιστοποίησης, το δυικό του. Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το θεώρημα του Kantorovich, θα διατυπώσουμε το εν λόγω πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Έστω X, Y μετρήσιμοι χώροι και έστω $c : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ συνάρτηση κόστους. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ και $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, θέτουμε $\phi \oplus \psi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ τη συνάρτηση με τύπο

$$\phi \oplus \psi(x, y) = \phi(x) + \psi(y).$$

Ένα ζευγάρι (ϕ, ψ) πραγματικών συναρτήσεων, ορισμένες στους X, Y αντίστοιχα, θα λέγεται c-αποδεκτό αν $\phi \oplus \psi \leq c$. Έστω $\mu \in \mathbb{P}X$, $\nu \in \mathbb{P}Y$ μέτρα πιθανότητας. Θέτουμε $\Phi_c(\mu, \nu)$ το σύνολο όλων των ζευγών c-αποδεκτών ζευγών $(\phi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ και ορίζουμε το συναρτησοειδές $\mathcal{J}_{\mu,\nu} : \Phi_c(\mu, \nu) :\longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi, \psi) = \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} \phi \oplus \psi d\pi.$$

Όπως θα δούμε, σύμφωνα με το θεώρημα του Kantorovich, υπό τις κατάλληλες προυποθέσεις, το ελάχιστο κόστος μεταφοράς $\mathcal{I}_c(\mu, \nu)$ του μ στο ν, ισούται με

$$\mathcal{J}_c(\mu, \nu) := \sup\{\mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi, \psi) \,|\, (\phi, \psi) \in \Phi_c(\mu, \nu)\}. \tag{7.11}$$

Καταρχάς, είναι προφανές ότι η ανισότητα $\mathcal{J}_c(\mu, \nu) \leq \mathcal{I}_c(\mu, \nu)$ ισχύει πάντοτε, χωρίς καμία υπόθεση για τα μ, ν. Πράγματι, για κάθε $(\phi, \psi) \in \Phi_c(\mu, \nu)$ και κάθε σχέδιο μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ από το μ στο ν, έχουμε ότι

$$\mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi, \psi) = \int_{X \times Y} \phi \oplus \psi d\pi \leq \int_{X \times Y} c d\pi = \mathcal{I}_c(\mu, \nu),$$

από όπου έπεται το ζητούμενο παίρνοντας πρώτα infimum πάνω από όλα τα σχέδια $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ και έπειτα το supremum πάνω από όλα τα ζεύγη $(\phi, \psi) \in \Phi_c(\mu, \nu)$. Η απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας είναι δυσκολότερη. Ξεκινάμε με κάποια προκαταρκτικά στοιχεία: ένα γενικό θεώρημα δυισμού της κυρτής ανάλυσης, μία χρήσιμη ιδιότητα του περιορισμού σχεδίων μεταφοράς και της έννοιας των c-κοίλων συναρτήσεων.

Πρόταση 7.2.1 (Δυισμός Fenchel-Rockafellar) *Έστω E χώρος με νόρμα και έστω $\Theta, \Xi : E \longrightarrow (-\infty, \infty]$ δύο κανονικά, δηλαδή όχι ταυτοτικά ίσα με $+\infty$, κυρτά συναρτησοειδή. Έστω $\Theta^*, \Xi^* : E^* \longrightarrow (-\infty, \infty)$ οι μετασχηματισμοί Legendre-Fenchel των Θ, Ξ αντίστοιχα, δηλαδή*

$$\Theta^*(z^*) = \sup_{z \in E} \Big\{ z^*(z) - \Theta(z) \Big\}, \quad z^* \in E^*.$$

Αν υπάρχει $z_0 \in E$ τ.ω. η Θ να είναι συνεχής στο z_0 και $\Theta(z_0), \Xi(z_0) < \infty$, τότε

$$\inf_{z \in E} \Big\{ \Theta(z) + \Xi(z) \Big\} = \max_{z^* \in E^*} \Big\{ -\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*) \Big\} \tag{7.12}$$

Απόδειξη Αφού $\Theta(z_0) + \Xi(z_0) < \infty$, είναι προφανές ότι $\alpha := \inf_E \big\{\Theta + \Xi\big\} < \infty$. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in E$,

$$\begin{aligned} \sup_{z^* \in E^*} \Big\{ -\Theta^*(z^*) - \Xi^*(z^*) \Big\} &= \sup_{z^* \in E^*} \inf_{x, y \in E} \Big\{ \Theta(x) + \Xi(y) + z^*(x - y) \Big\} \qquad (7.13) \\ &\leq \Theta(z) + \Xi(z), \end{aligned}$$

και άρα παίρνοντας το infimum πάνω από όλα τα $z \in E$, βλέπουμε ότι η ανισότητα $\geq$ στην (7.12) ισχύει. Αυτό που πρέπει, λοιπόν, να αποδείξουμε είναι η αντίστροφη ανισότητα και το ότι το supremum στη δεξιά πλευρά της (7.12) είναι maximum. Παρατηρήστε ότι αν αποδείξουμε ότι υπάρχει $z^* \in E^*$ τ.ω.

$$\Theta(x) + \Xi(y) + z^*(x-y) \geq \alpha, \quad \forall\, x, y \in E, \tag{7.14}$$

τότε από την (7.13) έπονται και οι δύο αυτοί ισχυρισμοί. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $z^* \in E^*$ τ.ω. να ικανοποιείται η (7.14), ορίζουμε τα σύνολα

$$C := \{(x, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R} \mid \lambda > \Theta(x)\},$$

$$K := \{(y, \mu) \in E \oplus \mathbb{R} \mid \mu \leq \alpha - \Xi(y)\}.$$

Παρατηρούμε ότι $C \cap K = \emptyset$. Πράγματι, αν $(x, \lambda) \in C \cap K$, τότε $\Theta(x) < \lambda \leq \alpha - \Xi(x)$, το οποίο αντιφάσκει με τον ορισμό του α. Επιπλέον, αφού οι συναρτήσεις Θ και Ξ είναι κυρτές, τα C, K είναι κυρτά. Πράγματι το ότι το C είναι κυρτό αποδεικνύεται όπως το ότι το επιγράφημα μίας κυρτής συνάρτησης είναι κυρτό, και αν $(y, \mu), (y', \mu') \in K$ και $0 \leq t \leq 1$, τότε

$$(1-t)\mu + t\mu' \leq \alpha - (1-t)\Xi(y) - t\Xi(y') \leq \alpha - \Xi\big((1-t)y + ty'\big),$$

δηλαδή $(1-t)(y, \mu) + t(y', \mu') \in K$, και άρα και το K είναι κυρτό. Τέλος, αφού η Θ είναι συνεχής στο z_0 και $\Theta(z_0) < \infty$, έπεται ότι $(z_0, \Theta(z_0) + 1) \in \operatorname{int}(C) \neq \emptyset$. Από το θεώρημα Hahn-Banach έπεται ότι υπάρχει μη-μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $\ell \in (E \oplus \mathbb{R})^*$ τ.ω.

$$\sup_{(y,\mu) \in K} \ell(y, \mu) \leq \inf_{(x,\lambda) \in C} \ell(x, \lambda). \tag{7.15}$$

Το γραμμικό συναρτησοειδές $\ell \in (E \oplus \mathbb{R})^*$ είναι υποχρεωτικά της μορφής

$$\ell(x, \lambda) = w^*(x) + k\lambda, \quad (x, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R},$$

για κάποιο $w^* \in E^*$ και κάποιο $k \in \mathbb{R}$, $(w^*, k) \neq (0, 0)$. Συνεπώς από την (7.15), έχουμε ότι

$$w^*(y) + k\mu \leq w^*(x) + k\lambda, \tag{7.16}$$

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \Theta(x)$ και $\mu \leq \alpha - \Xi(y)$.

Αν αποδείξουμε ότι $k > 0$, τότε από την (7.16), έπεται ότι θέτοντας $z^* := \frac{1}{k} w^*$ έχουμε ότι

$$z^*(y) + \mu \leq z^*(x) + \lambda,$$

για κάθε $x, y \in E$ και κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \Theta(x)$ και $\mu \leq \alpha - \Xi(y)$. Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι

$$z^*(y) + \alpha - \Xi(y) \leq z^*(x) + \lambda,$$

για κάθε $y \in E$ και κάθε $(x, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R}$ με $\lambda > \Theta(x)$. Όμως από τη συνέχεια της ποσότητας $z^*(x) + \lambda$ ως προς το λ αυτό συνεπάγεται ότι με τη σειρά του ότι

$$z^*(y) + \alpha - \Xi(y) \leq z^*(x) + \Theta(x),$$

για κάθε $x, y \in E$ όπως θέλουμε. Ο αναγνώστης μπορεί τώρα εύκολα να ολοκληρώσει την απόδειξη δείχνοντας ότι πράγματι $k > 0$. $\square$

Μία χρήσιμη ιδιότητα των βέλτιστων σχεδίων μεταφοράς είναι ότι ο περιορισμός ενός βέλτιστου σχεδίου μεταφοράς (σε κάποιο σύνολο θετικού μέτρου) είναι βέλτιστο σχέδιο μεταξύ των περιθώριων κατανομών του. Αυτό έπεται από το ακόλουθο γενικότερο λήμμα.

Λήμμα 7.2.1 *Έστω (X, μ), (Y, ν) χώροι πιθανότητας, $c : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ συνάρτηση κόστους και έστω $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ c-βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς του μ στο ν. Τότε, για κάθε μέτρο $0 \neq \pi_0 \in \mathcal{M}_+(X \times Y)$ με $\pi_0 \leq \pi$, το μέτρο πιθανότητας*

$$\widetilde{\pi_0} := \frac{1}{\pi_0(X \times Y)} \cdot \pi_0$$

είναι c-βέλτιστο σχέδιο μεταξύ των περιθώριων κατανομών του.

Απόδειξη Έστω $p : X \times Y \longrightarrow X$, $q : X \times Y \longrightarrow Y$ οι φυσικές προβολές. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι το $\widetilde{\pi_0}$ δεν είναι βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς μεταξύ των περιθώριων κατανομών του $\widetilde{\mu_0} := p_* \widetilde{\pi_0}$ και $\widetilde{\nu_0} := q_* \widetilde{\pi_0}$. Υπάρχει τότε σχέδιο $\widetilde{\pi_0}' \in \Pi(\widetilde{\mu_0}, \widetilde{\nu_0})$ τ.ω.

$$\int_{X \times Y} c d\widetilde{\pi_0}' < \int_{X \times Y} c d\widetilde{\pi_0} \tag{7.17}$$

Όμως τότε το μέτρο

$$\pi' := (\pi - \pi_0) + \pi_0(X \times Y) \cdot \widetilde{\pi_0}' = \pi - \pi_0(X \times Y) \cdot (\widetilde{\pi_0} - \widetilde{\pi_0}')$$

είναι σχέδιο μεταφοράς από το μ στο ν με κόστος μεταφοράς γνήσια μικρότερο από αυτό του π, το οποίο είναι άτοπο, αφού το π είναι c-βέλτιστο. $\square$

Η τελευταία έννοια που θα χρειαστούμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Kantorovich είναι η έννοια του c-μετασχηματισμού, η οποία μας επιτρέπει να βελτιώνουμε, ως προς το πρόβλημα μεγιστοποίησης (7.11), c-αποδεκτά ζεύγη συναρτήσεων. Έστω $c : X \times Y :\longrightarrow [0, \infty]$ συνάρτηση κόστους και έστω $\phi : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ απεικόνιση όχι ταυτοτικά ίση με $-\infty$. Τότε, κάθε απεικόνιση $\psi : Y \longrightarrow [-\infty, \infty]$ τ.ω. το ζεύγος να είναι (ϕ, ψ) c-αποδεκτό, πρέπει να ικανοποεί την $\psi(y) \leq c(x, y) - \phi(x)$, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, και άρα

$$\psi(y) \leq \bar{\psi}(y) := \inf_{x \in X} \big\{ c(x, y) - \phi(x) \big\},$$

για κάθε $y \in Y$. Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $(\phi, \bar{\psi})$ είναι c-αποδεκτό, και έτσι η $\bar{\psi}$ είναι η μέγιστη συνάρτηση $\upsilon : Y \longrightarrow [-\infty, \infty)$ για την οποία το ζεύγος (ϕ, υ) είναι c-αποδεκτό. Με το ίδιο επιχείρημα έπεται ότι

$$\phi(x) \leq \bar{\phi}(x) := \inf_{y \in Y} \big\{ c(x, y) - \bar{\psi}(x) \big\}$$

και ότι η $\bar{\phi}$ είναι η μέγιστη συνάρτηση $u : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ τ.ω. το ζεύγος $(u, \bar{\psi})$ να είναι c-αποδεκτό. Κατ' αυτό τον τρόπο, από το ζεύγος (ϕ, ψ) κατασκευάσαμε ένα καινούργιο c-αποδεικτό ζεύγος $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ τ.ω.

$$\phi \oplus \psi \leq \bar{\phi} \oplus \bar{\psi}.$$

Αφήνοντας για λίγο στην άκρη ζητήματα μετρησιμότητας, έπεται ότι αν τα μ, ν είναι μέτρα πιθανότητας στους X, Y αντίστοιχα, τότε

$$\mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi, \psi) \leq \mathcal{J}_{\mu,\nu}(\bar{\phi}, \bar{\psi}),$$

και, συνεπώς, μέσω αυτής της κατασκευής, το αρχικό ζεύγος (ϕ, ψ) έχει βελτιωθεί ως προς το πρόβλημα μεγιστοποίησης (7.11). Παρατηρούμε ωστόσο, ότι αφού η $\bar{\psi}$ είναι η μέγιστη συνάρτηση υ για την οποία το ζεύγος (ϕ, υ) είναι c-αποδεκτό, $\phi \leq \bar{\phi}$ και το $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ είναι c-αποδεκτό, το αρχικό ζεύγος δεν γίνεται να βελτιωθεί περαιτέρω κατ' αυτόν τον τρόπο. Οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 7.2.1 Έστω $c : X \times Y \longrightarrow (-\infty, \infty]$ συνάρτηση. Ο c-μετασχηματισμός μίας συνάρτησης $\phi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ είναι η συνάρτηση $\phi^c : Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$\phi^c(y) = \inf_{x \in X} \big\{c(x, y) - \phi(x)\big\},$$

με τη σύμβαση ότι το άθροισμα είναι ∞ όποτε $c(x, y) = \infty$ και $\phi(x) = \infty$. Ανάλογα, ο c-μετασχηματισμός μίας συνάρτησης $\psi : Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ είναι η συνάρτηση $\psi^c : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$\psi^c(x) = \inf_{y \in Y} \big\{c(x, y) - \psi(y)\big\},$$

με την ίδια σύμβαση όποτε το άθροισμα είναι απροσδιόριστη μορφή.

Μία απεικόνιση $\phi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ θα λέγεται c-κοίλη αν είναι ο c-μετασχηματισμός κάποιας συνάρτησης $\psi : Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Ανάλογα, μία συνάρτηση $\psi : Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ λέγεται c-κοίλη αν $\psi = \phi^c$ για κάποια συνάρτηση $\phi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος έπεται άμεσα από τη συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού του c-μετασχηματισμού.

Λήμμα 7.2.2 *Έστω $c : X \times Y \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $\phi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ και $\psi : Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ συναρτήσεις. Τότε,*

(α) *$\phi^{ccc} = \phi^c$· συνεπώς η ϕ είναι c-κοίλη ανν $\phi^{cc} = \phi$. Ο ανάλογος ισχυρισμός ισχύει και για την ψ.*

(β) *Αν το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι c-αποδεκτό, τότε*

$$(\phi^{cc}, \phi^c) = (\psi^c, \phi^c) = (\psi^c, \psi^{cc}).$$

Το ακόλουθο λήμμα που εξασφαλίζει τη μετρησιμότητα των c-μετασχηματισμών υπό κατάλληλες προυποθέσεις, επαρκεί για τις ανάγκες μας.

Λήμμα 7.2.3 *Έστω X, Y μετρικοί χώροι και έστω $c : X \times Y \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις..*

(α) *Αν η c είναι άνω ημισυνεχής, τότε ο c-μετασχηματισμός της ϕ είναι άνω ημισυνεχής.*

(β) *Αν η c είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε ο c-μετασχηματισμός της ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(γ) *Αν η* $c_x := c(x, \cdot\,) : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι* Lipschitz *συνεχής για κάθε* $x \in X$ *και* $L := \sup_{x\in X} \mathrm{Lip}(c_x) < \infty$, *τότε η* ϕ^c *είναι* Lipschitz *συνεχής με σταθερά* Lipschitz $\leq L$.

(δ) *Αν η* c *και* ϕ *είναι φραγμένες, τότε* $\|\phi^c\|_u \leq \|c\|_u + \|\phi\|_u < \infty$.

Απόδειξη(α) Έστω $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\phi^c(y)$ υπάρχει $x_y \in X$ τ.ω.

$$\phi^c(y) \geq c(x_y, y) - \phi(x_y) - \varepsilon.$$

Από την άνω ημισυνέχεια της c, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $c(x', y') - c(x_y, y) < \varepsilon$, όπου $d(x_y, x') \vee d(y, y') < \delta$. Συνεπώς, για κάθε $y' \in D(y, \delta)$ έχουμε ότι

$$\phi^c(y') - \phi^c(y) \leq c(x_y, y') - \phi(x_y) - c(x_y, y) + \phi(x_y) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ϕ^c, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x_y \in X$ τ.ω.

$$\phi^c(y) \geq c(x_y, y) - \phi(x_y) - \varepsilon,$$

και από την ομοιόμορφη συνέχεια συνέχεια της c υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $|c(x, y) - c(x', y')| < \varepsilon$, όποτε $d(x, x') \vee d(y, y') < \delta$. Συνεπώς, αν $y, y' \in Y$ και $d(y, y') < \delta$, τότε

$$\phi^c(y') - \phi^c(y) \leq c(x_y, y') - \phi(x_y) - c(x_y, y) + \phi(x_y) + \varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

και άρα η ϕ^c είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(γ) Έστω $y, y' \in Y$. Πρέπει να δείξουμε ότι $|\phi^c(y) - \phi^c(y')| \leq Ld(y, y')$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $x_y \in X$ τ.ω. $\phi(y) \geq c(x_y, y) - \phi(x_y) - \varepsilon$. Τότε

$$\phi^c(y') - \phi(y) \leq c(x_y, y') - c(x_y, y) + \varepsilon \leq Ld(y, y') + \varepsilon,$$

από όπου αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έπεται ότι $\phi^c(y') - \phi^c(y) \leq Ld(y', y)$. Συνεπώς η ϕ^c είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά Lipschitz $\leq L$.
(δ) Είναι προφανές. $\square$

Θεώρημα 7.2.1 *Έστω* X, Y *πλήρεις μετρικοί χώροι και έστω* $\mu \in \mathbb{P}^T X$, $\nu \in \mathbb{P}^T Y$ *σφικτά μέτρα. Έστω* $c : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ *κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Θέτουμε* Φ_c^{BC} *το σύνολο όλων* c*-αποδεκτών ζευγών* $(\phi, \psi) \in BC(X) \times BC(Y)$ *φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων. Έστω* $\mathcal{J} : \Phi_c^{BC} \longrightarrow \mathbb{R}$ *το συναρτησοειδές με τύπο*

$$\mathcal{J}(\phi, \psi) = \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Το βέλτιστο κόστος $\mathcal{I}_c(\mu, \nu)$ *μεταφοράς του* μ *στο* ν *ισούται με*

$$\mathcal{J}_c := \sup\{\mathcal{J}(\phi, \psi) \,|\, (\phi, \psi) \in \Phi_c^{BC}\}.$$

Απόδειξη Από την παρατήρηση που ακολούθησε τη διατύπωση του προβλήματος μεγιστοποίησης (7.11), έχουμε ότι

$$\sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_c^{BC}} \mathcal{J}(\phi, \psi) \leq \sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_c} \mathcal{J}(\phi, \psi) \leq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \mathcal{I}_c(\mu, \nu\,; \pi).$$

Θα αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα σε τρία βήματα, κατά αύξουσα σειρά γενικότητας. Το θεώρησμα δυισμού των Fenchel-Rockafellar θα χρησιμοποιηθεί στο πρώτο βήμα, στο οποίο υποθέτουμε ότι οι X και Y είναι συμπαγής και η c συνεχής. Όλη η υπόλοιπη απόδειξη, συνίσταται στην απόδειξη της γενικής περίπτωσης από αυτή την ειδική περίπτωση, μέσω επιχειρημάτων προσέγγισης.

Βήμα 1: Σ' αυτό το αρχικό στάδιο της απόδειξης, υποθέτουμε ότι οι X, Y είναι συμπαγείς και η c συνεχής στο $X \times Y$. Για να είναι ο συμβολισμός μας συνεπής με το θεώρημα δυισμού των Fenchel-Rockafellar, θέτουμε

$$E := BC(X \times Y)$$

το γραμμικό χώρο των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων εφοδιασμένων με την ομοιόμορφη νόρμα $\| \cdot \|_u$. Αφού ο $X \times Y$ είναι συμπαγής, ο δυικός του E είναι ο χώρος όλων των πεπερασμένων φορτίων στο $X \times Y$ με τη νόρμα της ολικής κύμανσης, δηλαδή

$$E^* = \mathcal{M}(X \times Y).$$

Επιπλέον, ο χώρος όλων των θετικών γραμμικών μορφών στο E, δηλαδή των γραμμικών συναρτησοειδών $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $I(u) \geq 0$, για κάθε $u \geq 0$, είναι ισομετρικός με τον $\mathcal{M}_+(X \times Y)$.

Έπειτα, ορίζουμε τα συναρτησοειδή στα οποία θα εφαρμόσουμε το θεώρημα των Fenchel-Rockafellar. Ορίζουμε την $\Theta : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ από τον τύπο

$$\Theta(u) = \begin{cases} 0, & \text{αν } u \geq -c, \\ +\infty, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

και την $\Xi : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ από τον τύπο

$$\Xi(u) = \begin{cases} \mathcal{J}(\phi, \psi), & \text{αν } u = \phi \oplus \psi, \text{ για κάποιο } (\phi, \psi) \in BC(X) \times BC(Y), \\ +\infty, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η Ξ είναι καλώς ορισμένη: πράγματι, αν $u = \phi \oplus \psi = f \oplus g$ για κάποια ζεύγη (ϕ, ψ), $(f, g) \in BC(X) \times BC(Y)$, τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\phi, \psi) &= \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} (\phi \oplus \psi) d\mu \otimes \nu \\ &= \int_{X \times Y} (f \oplus g) d\mu \otimes \nu = \int_X f d\mu + \int_Y g d\nu = \mathcal{J}(f, g). \end{aligned}$$

Θα ελέγξουμε τώρα ότι τα συναρτησοειδή Θ, Ξ ικανοποιούν το θεώρημα δυισμού των Fenchel-Rockafellar. Η Θ είναι προφανώς κυρτή, αφού το σύνολο στο οποίο παίρνει τη μοναδική πεπερασμένη τιμή της είναι κυρτό. Έστω τώρα $u, v \in BC(X \times Y)$ συναρτήσεις στο ουσιώδες πεδίο ορισμού $\mathrm{dom}\Xi$ της Ξ. Τότε $u = \phi \oplus \psi$ και $v = f \oplus g$ για κάποιες $\phi, f \in BC(X)$ και $\psi, g \in BC(Y)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(1-t)u + tv \in \mathrm{dom}\Xi$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Αυτό έπεται εύκολα από τις ταυτότητες

$$t(\phi \oplus \psi) = (t\phi) \oplus (t\psi), \quad (\phi \oplus \psi) + (f \oplus g) = (\phi + f) \oplus (\psi + g),$$

οι οποίες ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε $\phi, f \in BC(X)$, $\psi, g \in BC(Y)$. Οι ίδιες ταυτότητες, μαζί με τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος, δίνουν την κυρτότητα της Ξ. Τέλος, η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1} \in BC(X \times Y)$ ανήκει στα ουσιώδη πεδία ορισμού των Θ και Ξ και είναι σημείο συνέχειας της Θ. Έτσι, οι υποθέσεις του θεωρήματος των Fenchel-Rockafellar ικανοποιούνται από τα συναρτησοειδή Θ και Ξ άρα και η ισότητα (7.12) του συμπεράσματος του θεωρήματος ισχύει.

Έπειτα υπολογίζουμε τις δύο πλευρές της ισότητας (7.12). Προφανώς η αριστερή πλευρά είναι

$$\begin{aligned}\inf_{u\in E}\Big\{\Theta(u)+\Xi(u)\Big\} &= \inf\Big\{\mathcal{J}(\phi,\psi)\,\Big|\,\phi\oplus\psi\geq -c,\ (\phi,\psi)\in BC(X)\times BC(Y)\Big\}\\ &= \inf\Big\{-\mathcal{J}(\phi,\psi)\,\Big|\,\phi\oplus\psi\leq c,\ (\phi,\psi)\in BC(X)\times BC(Y)\Big\}\\ &= -\sup\Big\{\mathcal{J}(\phi,\psi)\,\Big|\,(\phi,\psi)\in\Phi_C^{BC}\Big\}. \qquad (7.18)\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τη δεξιά πλευρά, υπολογίζουμε πρώτα τους μετασχηματισμούς Legendre-Fenchel των Θ και Ξ. Καταρχάς, για κάθε $\pi \in \mathcal{M}(X \times Y)$ έχουμε ότι

$$\Theta^*(-\pi)=\sup_{u\in E}\Big\{-\int_{X\times Y}ud\pi\,\Big|\,u\geq -c\Big\}=\sup_{u\in E}\Big\{\int_{X\times Y}ud\pi\,\Big|\,u\leq c\Big\}.$$

Τώρα, αν το π δεν είναι θετικό μέτρο, από την κανονικότητα του π υπάρχει θετική συνάρτηση $v \in E$ τ.ω. $\int_{X\times Y} v d\pi > 0$. Όμως, τότε, $\lambda v \leq 0 \leq c$ για κάθε $\lambda > 0$, το οποίο δείχνει ότι το supremum είναι $+\infty$. Από την άλλη, αν το π είναι μη-αρνητικό μέτρο, τότε προφανώς το supremum είναι $\int_{X\times Y} c d\pi$. Συνεπώς

$$\Theta^*(-\pi)=\begin{cases}\int_{X\times Y}cd\pi, & \text{αν } \pi\in\mathcal{M}_+(X\times Y),\\ +\infty, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε το Ξ^*, παρατηρούμε καταρχάς ότι για κάθε $\pi \in E^*\mathcal{M}(X \times Y)$ έχουμε

$$\Xi^*(\pi)=\sup_{\phi\in BC(X),\psi\in BC(Y)}\Big\{\int_{X\times Y}\phi\oplus\psi d\pi-\int_{X\times Y}\phi\oplus\psi d\mu\otimes\nu\Big\}.$$

Τώρα, αν $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ προφανώς $\Xi^*(\pi) = 0$. Από την άλλη, αν $\pi \notin \Pi(\mu, \nu)$, τότε για κάθε $(\phi, \psi) \in BC(X) \times BC(Y)$ έχουμε ότι

$$\int_{X\times Y}\phi\oplus\psi d\pi-\int_{X\times Y}\phi\oplus\psi d\mu\otimes\nu = \int_X\phi d(p^1_*\pi-\mu)+\int_Y\psi d(p^2_*\pi-\nu).$$

Απο την κανονικότητα, όμως, των φορτίων $p^1_*\pi-\mu$ και $p^2_*\pi-\nu$, η ποσότητα αυτή γίνεται όσο μεγάλη θέλουμε, καθώς το (ϕ, ψ) μεταβάλλεται μέσα στον $BC(X) \times BC(Y)$. Συνεπώς,

$$\Xi^*(\pi)=\begin{cases}0, & \text{αν } \pi\in\Pi(\mu,\nu),\\ +\infty, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Από τους τύπους των Θ^* και Ξ^*, έπεται άμεσα ότι η δεξιά πλευρά της (7.12) είναι

$$\begin{aligned}\max_{\pi\in E^*}\Big\{-\Theta^*(-\pi)-\Xi^*(\pi)\Big\} &= \max\Big\{-\int_{X\times Y}cd\pi\,\Big|\,\pi\in\Pi(\mu,\nu)\Big\}\\ &= -\min\Big\{\int_{X\times Y}cd\pi\,\Big|\,\pi\in\Pi(\mu,\nu)\Big\}. \qquad (7.19)\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις ισότητες (7.18) και (7.19) με την ισότητα (7.12) ολοκληρώνεται το πρώτο βήμα της απόδειξης.

Βήμα 2: Σ' αυτό το βήμα υποθέτουμε ότι η c είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής και θα ξεφορτωθούμε την υπόθεση της συμπάγειας χρησιμοποιώντας τη σφικτότητα των μ και μ. Έστω $\delta \in (0,1)$. Αφού τα μ και ν είναι σφικτά, υπάρχουν συμπαγή σύνολα $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ τ.ω.

$$\mu(X \setminus X_0) \leq \frac{\delta}{2(2\|c\|_u + 1)}, \quad \nu(Y \setminus Y_0) \leq \frac{\delta}{2(2\|c\|_u + 1)}.$$

Συνεπώς, για κάθε σχέδιο μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ έχουμε ότι

$$\pi\big((X \times Y) \setminus (X_0 \times Y_0)\big) \leq \frac{\delta}{2\|c\|_u + 1} \leq \delta.$$

Έστω $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς για το πρόβλημα (μ,ν,c). Από το λήμμα 7.2.1 έπεται ότι το μέτρο πιθανότητας

$$\pi_0 := \frac{1}{\pi(X_0 \times Y_0)} \cdot \pi|_{(X_0 \times Y_0)} \in \mathbb{P}(X_0 \times Y_0) \subseteq \mathbb{P}(X \times Y),$$

είναι βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς μεταξύ των περιθώριων κατανομών του $\mu_0 \in \mathbb{P}X_0 \subseteq \mathbb{P}X$ και $\nu_0 \in \mathbb{P}Y_0 \subseteq \mathbb{P}Y$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_c(\mu,\nu) &= \int_{X \times Y} c d\pi = \int_{X \times Y} c d(\pi|_{(X_0 \times Y_0)} + \pi|_{(X_0 \times Y_0)^C}) \\
&= \pi(X_0 \times Y_0) \int_{X \times Y} c d\pi_0 + \int_{(X_0 \times Y_0)^C} c d\pi \\
&\leq \pi(X_0 \times Y_0)\mathcal{I}_c(\mu_0,\nu_0) + \pi\big((X_0 \times Y_0)^C\big)\|c\|_u \leq \mathcal{I}_c(\mu_0,\nu_0) + \delta.
\end{aligned}$$

Έστω c_0 ο περιορισμός της c στο $X_0 \times Y_0$. Θέτουμε $\mathcal{J}_0 := \mathcal{J}_{\mu_0,\nu_0}$. Από το βήμα 1 της απόδειξης, υπάρχει c_0-αποδεκτό ζεύγος (ϕ_0, ψ_0) φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο $X_0 \times Y_0$ τ.ω.

$$\mathcal{J}_0(\phi_0,\psi_0) \geq \mathcal{I}_c(\mu_0,\nu_0) - \delta.$$

Αφού $\mathcal{I}_c(\mu_0,\nu_0) \geq 0$, έχουμε ότι

$$\int_{X \times Y} \phi_0 \oplus \psi_0 d\mu_0 \otimes \nu_0 = \mathcal{J}_0(\phi_0,\psi_0) \geq -\delta \geq -1,$$

το οποίο αφού τα μ_0 και ν_0 στηρίζονται από τα X_0 και Y_0 αντίστοιχα, συνεπάγεται ότι υπάρχει $(x_0,y_0) \in X_0 \times Y_0$ τ.ω. $\phi_0(x_0) + \psi_0(y_0) \geq -1$. Κάθε ζεύγος της μορφής $(\phi_0 + s, \psi_0 - s)$, $s \in \mathbb{R}$, είναι c_0-αποδεκτό, και το συναρτησοειδές $\mathcal{J}_0$ παίρνει την ίδια τιμη $\mathcal{J}_0(\phi_0,\psi_0)$ σε κάθε ζεύγος. Συνεπώς, αντικαθιστώντας το ζεύγος (ϕ_0,ψ_0) με το ζεύγος $(\phi_0 + s, \psi_0 - s)$ για $s = -\phi_0(x_0) - \frac{1}{2}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi_0(x_0) \wedge \psi_0(y_0) \geq -\frac{1}{2}$. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $(x,y) \in X_0 \times Y_0$,

$$\phi_0(x) \leq c(x,y_0) - \psi_0(y_0) \leq c(x,y_0) + \frac{1}{2}, \tag{7.20}$$

και

$$\psi_0(y) \leq c(x_0, y) - \phi_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}. \tag{7.21}$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του c-μετασχηματισμού για να κατασκευάσουμε από το (ϕ_0, ψ_0) ένα ζεύγος (ϕ, ψ), όπου οι ϕ, ψ ορίζονται στους X, Y, αντίστοιχα. Πρώτα, ορίζουμε τη $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ από τον τύπο

$$\phi(x) = \inf_{y \in Y_0} \big\{ c(x, y) - \psi_0(y) \big\}.$$

Αφού η c είναι ομοιόμορφα συνεχής, έπεται ότι η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επιπλέον, από τις ανισότητες (7.20) και (7.21), έπεται ότι για κάθε $x \in X$,

$$\phi(x) \leq c(x, y_0) - \psi_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2} \leq \|c\|_u + \frac{1}{2}, \tag{7.22}$$

και

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \inf_{y \in Y_0} \big\{ c(x, y) - \psi_0(y) \big\} \geq \inf_{y \in Y_0} \big\{ c(x, y) - c(x_0, y) \big\} - \frac{1}{2} \\ &\geq \inf_{y \in Y_0} \big\{ - c(x_0, y) \big\} - \frac{1}{2} \geq -\|c\|_u - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η ϕ είναι φραγμένη, με $\|\phi\|_u \leq \|c\|_u + \frac{1}{2}$. Τέλος, $\phi|_{X_0} = \psi_0^{c_0} \geq \phi_0$ και άρα η $\phi|_{X_0}$ είναι αποτελεσματικότερη από την ϕ_0 στη μεγιστοποίηση του $\mathcal{J}_0$. Έπειτα θέτουμε $\psi = \phi^c : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Προφανώς το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι c-αποδεκτό. Πάλι, αφού η c είναι ομοιόμορφα συνεχής, η ψ είναι συνεχής. Επίσης είναι φραγμένη, αφού από τις ανισότητες (7.21) και (7.22) έπεται ότι για κάθε $y \in Y$,

$$\psi(y) \leq c(x_0, y) - \phi(x_0) \leq c(x_0, y) - \phi_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2} \leq \|c\|_u + \frac{1}{2},$$

και

$$\psi(y) = \inf_{x \in X} \big\{ c(x, y) - \phi(x) \big\} \geq \inf_{x \in X} \big\{ c(x, y) - c(x, y_0) \big\} - \frac{1}{2} \geq -\|c\|_u - \frac{1}{2}.$$

Τέλος, $\psi|_{Y_0} \geq \psi_0$, αφού για κάθε $y \in Y_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \inf_{x \in X} \big\{ c(x, y_0) - \phi(x) \big\} = \inf_{x \in X} \Big\{ c(x, y) - \inf_{y' \in Y_0} \big\{ c(x, y') - \psi_0(y') \big\} \Big\} \\ &\geq \inf_{x \in X} \big\{ c(x, y) - \big(c(x, y) - \psi_0(y) \big) \big\} = \psi_0(y). \end{aligned}$$

Συνοψιζόντας, κατασκευάσαμε από το (ϕ_0, ψ_0) ένα c-αποδεκτό ζεύγος (ϕ, ψ) φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στους X, Y αντίστοιχα, τ.ω. $\mathcal{J}_0(\phi|_{X_0}, \psi|_{Y_0}) \geq \mathcal{J}_0(\phi_0, \psi)$.

Έστω τώρα π το βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς του προβλήματος μεταφοράς (μ, ν, c) που επιλέξαμε στην αρχή του βήματος 2 της απόδειξης. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi, \psi) &= \int_{X \times Y} \phi \oplus \psi d\pi \\ &= \pi(X_0 \times Y_0) \int_{X_0 \times Y_0} \phi \oplus \psi d\pi_0 + \int_{(X_0 \times Y_0)^c} \phi \oplus \psi d\pi \\ &\geq (1 - \delta) \mathcal{J}_0(\phi|_{X_0}, \psi|_{Y_0}) - (2\|c\|_u + 1) \pi\big((X_0 \times Y_0)^c\big) \\ &\geq (1 - \delta) \mathcal{J}_0(\phi_0, \psi_0) - \delta \geq (1 - \delta)(\mathcal{I}_c(\mu_0, \nu_0) - \delta) - \delta \\ &\geq (1 - \delta)\big(\mathcal{I}_c(\mu, \nu) - 2\delta\big) - \delta. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\mathcal{J}_c(\mu,\nu) \geq (1-\delta)\big(\mathcal{I}_c(\mu,\nu)-2\delta\big)-\delta$, και αφού αυτό ισχύει για κάθε $\delta \in (0,1)$, ισχύει επίσης και για $\delta = 0$, όπως ζητούσαμε.

Βήμα 3: Ερχόμαστε τώρα στη γενική περίπτωση. Αφού η c είναι κάτω ημισυνεχής, υπάρχει ακολουθία (c_n) φραγμένων Lipschitz συναρτήσεων, η οποία αυξάνει κατά σημείο στη c. Από το δεύτερο βήμα της απόδειξης ξέρουμε ότι

$$\mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu\,;\pi) = \sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_{c_n}^{BC}} \mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi,\psi),$$

όπου $\mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu\,;\cdot)$ είναι το συναρτησοειδές κόστους του προβλήματος μεταφοράς (μ,ν,c_n). Αφού η (c_n) αυξάνει κατά σημείο στη c, έπεται ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_{c_n}^{BC}} \mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi,\psi) \leq \sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_{c}^{BC}} \mathcal{J}_{\mu,\nu}(\phi,\psi). \tag{7.23}$$

Συνεπώς, αν δείξουμε ότι

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu),$$

τότε η απόδειξη ολοκληρώνεται παίρνοντας το supremum πάνω από όλους τους φυσικούς $n \in \mathbb{N}$ στην (7.23). Αφού η (c_n) είναι αύξουσα, η ακολουθία $\big(\mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu\,;\cdot)\big)$ είναι αύξουσα ακολουθία συναρτησοειδών που ορίζονται στο $\Pi(\mu,\nu)$, φραγμένη από πανω από $\mathcal{I}_c(\mu,\nu\,;\cdot)$, και άρα η ακολουθία $\big(\mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu)\big)$ είναι επίσης αύξουσα και φραγμένη από πάνω από $\big(\mathcal{I}_c(\mu,\nu)\big)$. Συνεπώς, αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu) \geq \mathcal{I}_c(\mu,\nu). \tag{7.24}$$

Έστω $\pi_n \in \Pi(\mu,\nu)$ βέλτιστο σχέδιο για το πρόβλημα μεταφοράς (μ,ν,c_n) για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αφού τα μ,ν είναι σφικτά, το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{P}(X\times Y)$ και συνεπώς υπάρχει υπακολουθία (π_{n_k}) της (π_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$. Για κάθε $n \geq m$, έχουμε ότι $\mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu) = \mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu\,;\pi_n) \geq \mathcal{I}_{c_m}(\mu,\nu\,;\pi_n)$ και, άρα, από τη συνέχεια της $\mathcal{I}_m$ έπεται ότι για κάθε $m\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n(\mu,\nu) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathcal{I}_{c_m}(\mu,\nu\,;\pi_n) \geq \mathcal{I}_{c_m}(\mu,\nu\,;\pi_*).$$

Όμως, τότε, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δίνει ότι,

$$\mathcal{I}_c(\mu,\nu) = \mathcal{I}_c(\mu,\nu\,;\pi_*) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{c_m}(\mu,\nu\,;\pi_*) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{c_n}(\mu,\nu),$$

δηλαδή την (7.24), και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση

1. Έστω $c : X\times Y \longrightarrow [0,\infty]$ συνεχής συνάρτηση κόστους τ.ω.

$$\int_{X\times Y} c d\mu\otimes\nu < \infty. \tag{7.25}$$

Τότε το θεώρημα του Kantorovich ισχύει αν αντικαταστήσουμε τη συλλογή Φ_c^{BC} με τη συλλογή όλων των ζευγών $(\phi,\psi) \in \Phi_c(\mu,\nu)$ της μορφής $(\phi,\psi) = (u^{cc},u^c)$, για κάποια συνάρτηση $u \in BC(X)$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα του Kantorovich ξέρουμε ότι η ποσότητα $\mathcal{J}(u,\upsilon)$ μπορεί να έρθει οσοδήποτε κοντά θέλουμε στην $\mathcal{J}_c(\mu,\nu)$, καθώς το (u,υ) μεταβάλλεται μέσα στην Φ_c^{BC} και ότι για κάθε $(u,\upsilon) \in \Phi_c^{BC}$ έχουμε $c \geq u^{cc} \oplus u^c \geq u \oplus \upsilon$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι για κάθε $u \in BC(X)$ έχουμε $(u^{cc}, u^c) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$. Καταρχάς, η μετρησιμότητα των u^c και u^{cc} έπεται από το λήμμα 7.2.3 (α). Θα αποδείξουμε ότι η u^c είναι ν-ολοκληρώσιμη. Από τον ορισμό της u^c, έχουμε ότι

$$-\|u\|_u \leq u^c(y) \leq c(x,y) - u(x),$$

για κάθε $(x,y) \in X \times Y$. Όμως από την (7.25) και το θεώρημα του Tonelli, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in X$ τ.ω. η συνάρτηση $Y \ni y \mapsto c(x,y) - u(x)$ να είναι ν-ολοκληρώσιμη, και, συνεπώς, η u^c είναι ν-ολοκληρώσιμη, αφού είναι φραγμένη και από πάνω και από κάτω από κάποια ν-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η μ-ολοκληρωσιμότητα της u^{cc} αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Συγκεκριμένα, από τον ορισμό του c-μετασχηματισμού, έχουμε ότι

$$-u^c(y) \leq u^{cc}(x) \leq c(x,y) - u^c(y),$$

για κάθε $(x,y) \in X \times Y$. Τώρα, αφού η u^c είναι ν-ολοκληρώσιμη, υπάρχει σύνολο $F_1 \subseteq Y$ που στηρίζει το ν τ.ω. $-\infty < -u^c(y)$ για κάθε $y \in F_1$, και από την (7.25), η συνάρτησση $X \ni x \mapsto c(x,y)$ είναι μ-ολοκληρώσιμη για κάθε $y \in F_2$, όπου το $F_2 \subseteq Y$ είναι κάποιο κατάλληλο σύνολο που στηρίζει το ν. Τότε, όμως, το σύνολο $F_1 \cap F_2$ στηρίζει το ν και, άρα, είναι μη-κενό. Συνεπώς η u^{cc} είναι μ-ολοκληρώσιμη, αφού αν επιλέξουμε $y \in F_1 \cap F_2$, τότε η u^{cc} είναι φραγμένη από κάτω, από τον πραγματικό αριθμό $-u^c(y)$ και από πάνω, από την μ-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $X \ni x \mapsto c(x,y) - u^c(y)$.

Κεφάλαιο 8

Οι Μετρικές του Wasserstein

8.1 Το Θεώρημα Διάσπασης

Όπως έχουμε ισχυριστεί, σε ένα πλήρη μετρικό χώρο, κάθε σχέδιο μεταφοράς μεταξύ σφικτών μέτρων μπορεί να παρασταθεί ως σχήμα μεταφοράς. Αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος διάσπασης, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράζουμε ολοκληρώματα ως προς μέτρα σε χώρουσ-γινόμενο, ως διαδοχικά ολοκληρώματα ακόμη και αν τα μέτρα αυτά δεν είναι μέτρα-γινόμενο. Συγκεκριμένα, έστω X, Y πλήρεις μετρικοί χώροι και $\pi \in \mathbb{P}(X \times Y)$ σφικτό μέτρο με περιθώριες κατανομές $\mu \in \mathbb{P}X$ και $\nu \in \mathbb{P}Y$, υπάρχουν μετρήσιμες συναρτήσεις $X \ni x \mapsto \pi_x \in \mathbb{P}Y$ και $Y \ni y \mapsto \pi^y \in \mathbb{P}X$ ορισμένες μ-σ.π. και ν-σ.π. αντίστοιχα, τ.ω.

$$\int_{X\times Y} f d\pi = \int_X \int_Y f(x,y) d\pi_x(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) d\pi^y(x) d\nu(y)$$

για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Μάλιστα, χωρίς ουσιαστικά περισσότερο κόπο, το θεώρημα διάσπασης αποδεικνύεται στην ακόλουθη γενικότερη μορφή.

Θεώρημα 8.1.1 (Το Θεώρημα Διάσπασης) *Έστω $\widetilde{X}, X$ πλήρεις μετρικοί χώροι και $\pi \in \mathbb{P}\widetilde{X}$ σφικτό μέτρο. Έστω $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ Borel μετρήσιμη απεικόνιση. Θέτουμε $\mu := p_*\pi$. Υπάρχει τότε μία μ-σ.π. μονοσήμαντα ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση $X \ni x \mapsto \pi_x \in \mathbb{P}\widetilde{X}$ τ.ω.*

$$\pi_x(\widetilde{X} \setminus p^{-1}(x)) = 0 \tag{8.1}$$

μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$, και

$$\int_{\widetilde{X}} f(\widetilde{x}) d\pi(\widetilde{x}) = \int_X \left(\int_{p^{-1}(x)} f(\widetilde{x}) d\pi_x(\widetilde{x}) \right) d\mu(x) \tag{8.2}$$

για κάθε π-ολοκληρώσιμη απεικόνιση $f : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$

Το κυρίως θέμα αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος. Προφανώς, το θεώρημα διάσπασης στην περίπτωση-γινόμενο, έπεται εφαρμόζοντας το γενικό θεώρημα διάσπασης στην περίπτωση όπου $\widetilde{X} = X \times Y$ και $\pi \in \Pi(\mu, \nu) \subseteq \mathbb{P}(X \times Y)$, για τις προβολές $p : X \times Y \longrightarrow X$, $q : X \times Y \longrightarrow Y$ και ταυτίζοντας τις ίνες $p^{-1}(x)$, $q^{-1}(y)$ με τις φέτες $\{x\} \times Y$, $X \times \{y\}$ αντίστοιχα. Η ύπαρξη της μετρήσιμης οικογένειας $\{\pi_x\}_{\{x\in X\}} \subseteq \mathbb{P}\widetilde{X}$, σχετίζεται με την ύπαρξη δεσμευμένων κατανομών. Ξεκινάμε, λοιπόν, με κάποια προκαταρκτικά στοιχεία για δεσμευμένες μέσες τιμές και δεσμευμένες κατανομές. Σε όσα ακολουθούν, ο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ θα είναι ένας σταθερός χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 8.1.1 Η δεσμευμένη μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ως προς μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ είναι η P-σ.π μοναδική $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση Y τ.ω.

$$\int_A Y dP = \int_A X dP$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Θα συμβολίζεται $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.

Προφανώς, αν η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ μίας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει, τότε η X θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι ολοκληρώσιμη. Έτσι η συνθήκη $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ στον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι αναγκαία για την ύπαρξη της δεσμευμένης μέσης τιμής της X ως προς κάποια σ-άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Από την άλλη, αν $X \in \mathcal{L}^1$, τότε ο τύπος

$$\mu(A) = \int_A X dP, \ A \in \mathcal{A}$$

ορίζει ένα σ-πεπερασμένο φορτίο στην $\mathcal{A}$, απολύτως συνεχές ως προς το $P|_{\mathcal{A}}$, και άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει μοναδική $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ τ.ω. για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \int_A Y dP|_{\mathcal{A}} = \int_A Y dP.$$

Συνεπώς η δεσμευμένη μέση τιμή είναι καλά ορισμένη.

Παραδείγματα

1. Αν $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}X$.

2. Αν $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X$.

3. Αν $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, όπου $A \in \mathcal{F}$ και $0 < P(A) < 1$, τότε

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \frac{1}{P(A)}\left(\int_A X dP\right)\mathbb{1}_A + \frac{1}{P(A^c)}\left(\int_{A^c} X dP\right)\mathbb{1}_{A^c}.$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες της δευσμευμένης μέσης τιμής έπονται άμεσα από τον ορισμό.

Πρόταση 8.1.1 *Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ και έστω $\mathcal{A}$ υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$. Τότε,*

(α) *Αν $X = Y$-σ.β., τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{A})$.*

(β) *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{A}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + b\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.*

(γ) *Αν $X \leq Y$ σ.β,. τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{A})$.*

(δ) *Αν η $\mathcal{B}$ είναι υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$, τότε $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})|\mathcal{B}\big)$. Ειδικότερα, για $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ έχουμε ότι $\mathbb{E}\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}X$.*

Σύμφωνα με το (α), η συνάρτηση $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow L^1(\Omega, \mathcal{A}, P|_{\mathcal{A}})$ επάγει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow L^1(\Omega, \mathcal{A}, P|_{\mathcal{A}})$. Όπως θα δούμε, το θεώρημα διάσπασης βασίζεται στην ερμηνεία του τύπου $\mathbb{E}\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}X$ ως ενός τύπου διαδοχικής ολοκλήρωσης.

Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι τα βασικά θεωρήματα σύγκλισης ισχύουν και για τη δεσμευμένη μέση τιμή.

Πρόταση 8.1.2 *Έστω $X_n, X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $\mathcal{A}$ μία υπό-σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$. Τότε*

(α) Θεώρημα μονότονης σύγκλισης: *Αν $X_n \nearrow X$ σ.Β., τότε $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ σ.β.*

(β) Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: *Αν $|X_n| \leq Y \in \mathcal{L}^1$ και $X_n \longrightarrow X$ σ.β., τότε $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ σ.β.*

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δεσμευμένη μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής X δεδομένης μίας τυχαίας μεταβλητής Y, η οποία ορίζεται ως η δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς τη μικρότερη σ-άλγεβρα στον Y για την οποία είναι μετρήσιμη. Συγκεκριμένα, έστω $(\Omega', \mathcal{F}')$ μετρήσιμος χώρος και $Y : \Omega \longrightarrow \Omega'$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X|Y)$ μίας τυχαίας μεταβλητής $X \in L^1(\Omega)$, δεδομένης της Y, δίνεται από τον τύπο

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}\big(X|\sigma(Y)\big),$$

όπου με $\sigma(Y) \subseteq \mathcal{F}$ συμβολίζουμε τη μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ στον Ω ως προς την οποία η Y είναι $(\mathcal{G}, \mathcal{F}')$-μετρήσιμη, δηλαδή $\sigma(Y) = Y^{-1}[\mathcal{F}'] := \{Y^{-1}(F') \,|\, F' \in \mathcal{F}'\}$.

Η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής δεδομένης μίας υπο-σ-άλγεβρας της $\mathcal{F}$, η οποία φαίνεται με μια πρώτη ματιά γενικότερη από αυτή της δεσμευμένης μέσης τιμής δεδομένης μίας τυχαίας μεταβλητής, στην πραγματικότητα δεν είναι γενικότερη. Πράγματι, αν η $\mathcal{A}$ είναι κάποια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$, τότε από τους ορισμούς έχουμε ότι $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(X|Y)$ $P|\mathcal{A}$-σ.β., όπου $Y = id_\Omega : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του Ω.

Πρόταση 8.1.3 *Έστω $Y : \Omega \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ μία συνάρτηση από ένα σύνολο Ω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega', \mathcal{F}')$ και έστω $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) *Η f είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη,*

(β) *Η f είναι της μορφής $f = g \circ Y$, για κάποια $\mathcal{F}'$-μετρήσιμη συνάρτηση $g : \Omega' \longrightarrow f(\Omega)$.*

Επιπλέον, αν ο $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας, το ολοκλήρωμα της f ορίζεται και η Y είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-μετρήσιμη, τότε η συνάρτηση g του (β) είναι Y_*P-σ.π. μονοσήμαντα ορισμένη.

Απόδειξη Η συνεπαγωγή (β)$\Longrightarrow$(α) είναι προφανής.
(β)$\Longrightarrow$(α) Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου η f είναι $\sigma(Y)$-απλή συνάρτηση, ας πούμε $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i \in \sigma(Y)$. Τότε $A_i = Y^{-1}(B_i)$ για κάποιο $B_i \in \mathcal{F}'$, και άρα

$$f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y^{-1}(B_i)} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}\right) \circ Y,$$

όπως θέλουμε. Ως συνήθως, η περίπτωση όπου η f είναι θετική συνάρτηση έπεται προσεγγίζοντας τη f από κάτω, με απλές συναρτήσεις, και η γενική περίπτωση αναλύοντας την f στο θετικό και το αρνητικό της μέρος.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, απομένει να δείξουμε ότι αν ο $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας, το $\int_\Omega f dP$ υπάρχει και η Y είναι $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-μετρήσιμη, τότε η g είναι Y_*P-μονοσήμαντα καθορισμένη. Έστω, λοιπόν, $g, h : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τ.ω. $f = g \circ Y = h \circ Y$. Από το βασικό θεώρημα για την ολοκλήρωση ως προς μέτρα εικόνες, αφού το ολοκλήρωμα $\int_\Omega f dP$ υπάρχει, έπεται ότι και τα ολοκληρώματα $\int_{\Omega'} g dY_*P$ και $\int_{\Omega'} h dY_*P$ υπάρχουν και ότι $\int_B g dY_*P = \int_B h dY_*P$ για κάθε $B \in \mathcal{F}'$. Έτσι από το θεώρημα Radon-Nikodym έπεται ότι $g = h$, Y_*P-σχεδόν βεβαίως. $\square$

Παρατηρούμε ότι η g είναι επίσης μονοσήμαντα καθορισμένη στο $Y(\Omega)$. Συνδυάζοντας αυτή την πρόταση με το ότι η $\mathbb{E}(X|\,Y)$ είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη, παίρνουμε την ακόλουθη.

Πρόταση 8.1.4 *Έστω $(\Omega', \mathcal{F}', P)$ χώρος μέτρου και $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $Y : \Omega \longrightarrow \Omega'$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X|Y)$ της X, δεδομένης της Y, επάγει μία Y_*P-μονοσήμαντα καθορισμένη συνάρτηση $\widetilde{\mathbb{E}}(X|Y) : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. $\mathbb{E}(X|Y) = \widetilde{\mathbb{E}}(X|Y) \circ Y$. Επιπλέον, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ανν $\widetilde{\mathbb{E}}(X|Y) \in L^1(\Omega', \mathcal{F}', Y_*P)$, και*

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega \mathbb{E}(X|Y)(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega'} \widetilde{\mathbb{E}}(X|Y)(\omega') dY_*P(\omega').$$

Η πρόταση αυτή είναι το πρώτο βήμα προς την ερμηνεία του τύπου $\mathbb{E}\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}X$ ως ένα τύπο διαδοχικής ολοκλήρωσης. Το δεύτερο και δυσκολότερο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι Y_*P-σχεδόν για κάθε $\omega' \in \Omega'$, ο αριθμός $\widetilde{\mathbb{E}}(X|\,Y)(\omega')$ είναι στην πραγματικότητα το ολοκλήρωμα της X, ως προς κάποιο μέτρο $P_{\omega'} \in \mathbb{P}\Omega$. Π.χ. αν $P(Y^{-1}(\omega')) > 0$, τότε ο $\mathbb{E}(X|Y)(\omega')$ είναι η μέση τιμή της X δεδομένου του ενδεχομένου $Y^{-1}(\omega')$, δηλαδή η μέση τιμή της ως προς το μέτρο $P_{Y^{-1}(\omega')}$ στην $\mathcal{F}$ με τύπο

$$P_{Y^{-1}(\omega')}(F) = \frac{P(Y^{-1}(\omega') \cap F)}{P(Y^{-1}(\omega'))}.$$

Θα λέμε την απεικόνιση $\widetilde{\mathbb{E}}(X|Y) : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ δεσμευμένη μέση τιμή-πηλίκο της X δεδομένης της Y, και τον αριθμό $\widetilde{\mathbb{E}}(X|Y)(\omega')$, η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι η Y ισούται με $\omega' \in \Omega'$. Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, οι βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής ισχύουν και για τη δεσμευμένη μέση τιμή-πηλίκο.

Πρόταση 8.1.5 *Έστω Y τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με τιμές στο μετρήσιμο χώρο $(\Omega', \mathcal{F}')$ και έστω $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών στον Ω.*

(α) *Αν $X_1 \equiv c \in \mathbb{R}$ P-σ.β. τότε $\widetilde{\mathbb{E}}(X_1|Y) \equiv c$, Y_*P-σ.β.*

(β) Γραμμικότητα: *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, έχουμε*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(aX_1 + bX_2|Y) = a\widetilde{\mathbb{E}}(X_1|Y) + b\widetilde{\mathbb{E}}(X_2|Y), \quad Y_*P - \sigma.\beta.$$

(γ) Μονοτονικότητα: *Αν $X_1 \leq X_2$ P-σ.β. τότε $\widetilde{\mathbb{E}}(X_1|Y) \leq \widetilde{\mathbb{E}}(X_2|Y)$, Y_*P-σ.β.*

(δ) Θεώρημα μονότονης σύγκλισης: *Αν* $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ *P-σ.β. τότε*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{E}}(X_n|Y) = \widetilde{\mathbb{E}}(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n|Y), \quad Y_*P - \sigma.\beta.$$

(ε) Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: *Αν* $|X_n| \leq Z \in \mathcal{L}^1$ *και* $X_n \longrightarrow X$ *σ.β. τότε* $\widetilde{\mathbb{E}}(X_n|Y) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}(X|Y)$, Y_*P*-σ.β.*

Απόδειξη (α) Από την πρόταση 8.1.4, η $\widetilde{\mathbb{E}}(X|Y)$ καθορίζεται Y_*P-μονοσήμαντα από την ισότητα $\mathbb{E}(X|Y) = \widetilde{\mathbb{E}}(X|Y) \circ Y$. Συνεπώς, αφού $c \circ Y = c = \mathbb{E}(X_1|Y)$, έπεται ότι $\widetilde{\mathbb{E}}(X_1|Y) = c$, Y_*P-σ.β. Ομοίως, το (β) έπεται από την πρόταση 8.1.4 και το ότι $\big(a\widetilde{\mathbb{E}}(X_1|Y) + b\widetilde{\mathbb{E}}(X_2|Y)\big) \circ Y = \mathbb{E}(aX_1 + bX_2|Y)$.
(γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν οι $g, h : (\Omega', \mathcal{F}') \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις τ.ω. $g \circ Y \leq h \circ Y$, τότε $g \leq h$ Y_*P-σ.β. Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή ότι $Y_*P(\{\omega' \in \Omega' |\, g(\omega') - h(\omega') > 0\}) > 0$. Τότε $\int_{\{g-h>0\}} (g-h)dY_*P > 0$ και άρα

$$\int_{\{g-h>0\}} g \circ Y dP = \int_{\{g-h>0\}} g dY_*P > \int_{\{g-h>0\}} h dY_*P = \int_{\{g-h>0\}} h \circ Y dP,$$

το οποίο αντιφάσκει με το ότι $g \circ Y \leq h \circ Y$.
(δ) Έχουμε ότι

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{E}}(X_n|Y)\right) \circ Y = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\widetilde{\mathbb{E}}(X_n|Y) \circ Y\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n|Y) = \mathbb{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n|\,Y),$$

και άρα από την πρόταση 8.1.4, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{E}}(X_n|Y) = \widetilde{\mathbb{E}}(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n|Y)$, Y_*P-σ.β.
(ε) Θέτουμε $\zeta_n := \inf_{k\geq n} X_n$ και $Z_n := \sup_{k\geq n} X_n$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$-Z \leq \zeta_n \leq X_n \leq Z_n \leq Z. \tag{8.3}$$

Επιπλέον, οι $\{Z + \zeta_n\}$ και $\{Z - Z_n\}$ είναι αύξουσες ακολουθίες μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, και αφού $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, έχουμε ότι $\sup{(Z + \zeta_n)} = Z + X$ και $\sup{(Z - Z_n)} = Z - X$. Συνεπώς, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και τη γραμμικότητα για τη δεσμευμένη μέση τιμή-πηλικό έπεται ότι $\lim \widetilde{\mathbb{E}}(\zeta_n|Y) = \lim \widetilde{\mathbb{E}}(Z_n|Y) = \widetilde{\mathbb{E}}(X|Y)$. Όμως από την (8.3) και τη μονοτονικότητα, έπεται ότι

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\zeta_n|Y) \leq \widetilde{\mathbb{E}}(X_n|Y) \leq \widetilde{\mathbb{E}}(Z_n|Y),$$

και παίρνοντας όριο καθώς $n \to \infty$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Ορισμός 8.1.2 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(T, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι. Ένας πυρήνας Markov από τον $(\Omega, \mathcal{F})$ στον $(T, \mathcal{B})$ είναι μία συνάρτηση $K : \mathcal{B} \times \Omega \longrightarrow [0, 1]$ τ.ω.

(α) Η απεικόνιση $\Omega \ni \omega \mapsto K(\omega, B)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και

(β) Η απεικόνιση $\mathcal{B} \ni B \mapsto K(\omega, B)$ είναι μέτρο πιθανότητας στη $\mathcal{B}$, για κάθε $\omega \in \Omega$.

Αν ο $(\Omega, \mathcal{F}) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας, τότε ένας P-σ.π. ορισμένος πυρήνας Markov από τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον $(T, \mathcal{B})$ είναι ένας πυρήνας Markov από τον $(\Omega_0, \mathcal{F}|_{\Omega_0})$ στον $(T, \mathcal{B})$, όπου το $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ είναι κάποιο σύνολο που στηρίζει το P.

Ομοίως, λέμε ότι δύο πυρήνες Markov K, K' από τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον $(T, \mathcal{B})$ είναι P-σ.π. ίσοι, αν υπάρχει σύνολο $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ που στηρίζει το P τ.ω. $K(B, \omega) = K'(B, \omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega_0$ και κάθε $B \in \mathcal{B}$.

Κάθε P-σ.π. ορισμένος πυρήνας Markov K από τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον $(T, \mathcal{B})$ επάγει την P-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση $\Omega \ni \omega \mapsto K(\cdot, \omega) \in \mathbb{P}T$ και κάθε P-σ.π. ορισμένη μετρήσιμη συνάρτηση $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}T$ επάγει τον P-σ.π. ορισμένο πυρήνα Markov K_π από τον $(\Omega, \mathcal{F})$ στον $(T, \mathcal{B})$ με τύπο $K_\pi(B, \omega) = \pi_\omega(B)$. Σύμφωνα με τους ορισμούς, δύο πυρήνες Markov K, K', είναι P-σ.π. ίσοι ανν οι επαγόμενες απεικονίσεις $\Omega \ni \omega \mapsto K(\cdot, \omega) \in \mathbb{P}T$ και $\Omega \ni \omega \mapsto K'(\cdot, \omega) \in \mathbb{P}T$ είναι P-σ.π. ίσες.

Ορισμός 8.1.3 Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (T, \mathcal{B})$ τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με τιμές στο μετρήσιμο χώρο $(T, \mathcal{B})$ και έστω $\mathcal{A}$ υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$. Ένας $P|_{\mathcal{A}}$-σ.π. ορισμένος πυρήνας Markov $P_{X|\mathcal{A}}$, τ.ω. για κάθε $B \in \mathcal{B}$,

$$P_{X|\mathcal{A}}(B, \cdot) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|\mathcal{A}) \quad P|_{\mathcal{A}} - \sigma.\pi.,$$

θα λέγεται δεσμευμένη κατανομή $P_{X|\mathcal{A}}$ της X δεδομένης της $\mathcal{A}$.

Έστω $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$. Μία δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $\mathcal{A}$ θα λέγεται δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της Y, και θα τη συμβολίζουμε με $P_{X|Y}$ αντί $P_{X|\mathcal{A}}$. Επιπλέον, σ' αυτή την περίπτωση, ένας Y_*P-σ.π. ορισμένος πυρήνας Markov $\widetilde{P}_{X|Y} : \mathcal{B} \times \Omega' \longrightarrow [0, 1]$ θα λέγεται δεσμευμένη κατανομή-πηλίκο της X δεδομένης της Y, αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$,

$$\widetilde{P}_{X|Y}(B, \cdot) = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y) \quad Y_*P - \sigma.\pi.$$

<u>Παραδείγματα</u>

4. Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (T, \mathcal{B})$ τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με τιμές στο μετρήσιμο χώρο $(T, \mathcal{B})$. Αν $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$, τότε η συνάρτηση $P_{X|\mathcal{A}} : \Omega \times \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$P_{X|\mathcal{A}}(\omega, B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|\mathcal{A})(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}) = X_*P(B),$$

είναι δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $\mathcal{A}$. Η επαγόμενη απεικόνιση $\Omega \longrightarrow \mathbb{P}T$, είναι η σταθερή απεικόνιση $\omega \mapsto X_*P$.

5. Αν $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, τότε η συνάρτηση $P_{X|\mathcal{F}} : \Omega \times \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$P_{X|\mathcal{F}}(\omega, B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|\mathcal{A})(\omega) = \mathbb{1}_{X^{-1}(B)}(\omega) = \delta_{X(\omega)}(B),$$

είναι δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $\mathcal{F}$. Η επαγόμενη απεικόνιση $\Omega \longrightarrow \mathbb{P}T$ είναι η $\delta \circ X$.

6. Αν $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, X\}$, όπου $A \in \mathcal{F}$ και $0 < P(A) < 1$, τότε η συνάρτηση $P_{X|\mathcal{A}} : \Omega \times \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$P_{X|\mathcal{A}}(\omega, B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|\mathcal{A})(\omega) = X_*P_A(B)\mathbb{1}_A(\omega) + X_*P_{A^c}(B)\mathbb{1}_{A^c}(\omega),$$

είναι δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $\mathcal{A}$.

Ωστόσο, εν γένει, ορίζοντας $P_{X|\mathcal{A}}(B,\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|\mathcal{A})$, δεν προκύπτει δεσμευμένη κατανομή. Πράγματι, έστω $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_{X|\mathcal{A}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\omega) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)}|\mathcal{A})(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B_i)}|\mathcal{A})(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_{X|\mathcal{A}}(B_i,\omega) \end{aligned} \tag{8.4}$$

$P|_{\mathcal{A}}$-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$. Όμως το σύνολο των $\omega \in \Omega$ για τα οποία ισχύει αυτή η ισότητα, εν γένει εξαρτάται από την ακολουθία $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. Έτσι, αφού το σύνολο όλων των ξένων ακολουθιών $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B_i \in \mathcal{B}$ μπορεί κάλλιστα να είναι υπεραριθμήσιμο, το σύνολο των ω για το οποία ισχύει η (8.4), μπορεί να έχει μέτρο ως προς το $P|_{\mathcal{A}}$ γνήσια μικρότερο από 1. Όπως θα δούμε όμως, όταν ο $(T,\mathcal{B})$ είναι μετρήσιμος ο οποίος επάγεται από κάποιο πολωνικό χώρο T, τότε η δεσμευμένη κατανομή $P_{X|\mathcal{A}}$ της X δεδομένης της υπο-σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$ της $\mathcal{F}$ υπάρχει και είναι $P|_{\mathcal{A}}$-σ.π. μονοσήμαντα ορισμένη, με την έννοια ότι η επαγόμενη απεικόνιση $\Omega \ni \omega \mapsto P_{X|\mathcal{A}}(\cdot,\omega) \in \mathbb{P}T$ είναι $P|_{\mathcal{A}}$-σ.π. μοναδική.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των δεσμευμένων κατανομών-πηλίκο ως προς τυχαίες μεταβλητές. Πράγματι, έστω $X : (\Omega,\mathcal{F},P) \longrightarrow (T,\mathcal{B})$ τυχαία μεταβλητή τ.ω. να υπάρχει δεσμευμένη κατανομή-πηλίκο $\widetilde{P}_{X|Y}$ η οποία είναι μοναδική (με την έννοια ότι δύο οποιεσδήποτε τέτοιες δεσμευμένες κατανομέσ-πηλίκο ταυτίζονται Y_*P-σ.π. ως πυρήνες Markov) για κάθε τυχαία μεταβλητή $Y : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega',\mathcal{F}')$, και έστω $\mathcal{A}$ υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$. Έστω $Y = id_\Omega : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega,\mathcal{A})$. Τότε, από την υπόθεσή μας, υπάρχει $Y_*P = P|_{\mathcal{A}}$-μονοσήμαντα ορισμένη δεσμευμένη κατανομή πηλίκο $\widetilde{P}_{X|Y}$. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$, έχουμε ότι

$$\widetilde{P}_{X|Y}(B,\cdot) = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|\mathcal{A})$$

$P|\mathcal{A}$-σ.β., και άρα η $\widetilde{P}_{X|Y}$ είναι δεσμευμένη κατανομή της X, δεδομένης της $\mathcal{A}$ και είναι προφανώς $P|\mathcal{A}$-μονοσήμαντα ορισμένη.

Πριν αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των δεσμευμένων κατανομών-πηλίκο στην περίπτωση όπου το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι πολωνικός χώρος, θα δούμε πως από αυτό έπεται το θεώρημα της διάσπασης.

Πρόταση 8.1.6 *Έστω $X : (\Omega,\mathcal{F},P) \longrightarrow (T,\mathcal{B})$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο μετρήσιμο χώρο $(T,\mathcal{B})$ και έστω $Y : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega',\mathcal{F}')$ τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι υπάρχει δεσμευμένη κατανομή πηλίκο $\widetilde{P}_{X|\mathcal{A}} : \mathcal{B} \times \Omega' \longrightarrow [0,1]$ της X δεδομένης της Y. Τότε, για κάθε X_*P-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ έχουμε ότι*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(f \circ X|Y)(\omega') = \int_T f(t)\,d\widetilde{P}_{X|Y}(t,\omega'), \tag{8.5}$$

Y_*P-σχεδόν για κάθε $\omega' \in \Omega'$, και συνεπώς

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \int_{\Omega'} \int_T f(t)\,d\widetilde{P}_{X|Y}(t,\omega')\,dY_*P(\omega'). \tag{8.6}$$

Απόδειξη Προφανώς αν η $f = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{B}$ είναι δείκτρια συνάρτηση, τότε ο τύπος (8.5) ισχύει Y_*P-σ.β. Η γενική περίπτωση έπεται από αυτή την περίπτωση και τις ιδιότητες των δεσμευμένων κατανομών-πηλίκο της πρότασης 8.1.5. □

Έστω τώρα $\widetilde{X}$ πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\pi \in \mathbb{P}\widetilde{X}$ σφικτό μέτρο. Αφού το π είναι σφικτό, στηρίζεται από τον πολωνικό χώρο $\widetilde{X}_0 := \mathrm{supp}\pi$. Έστω $id_0 : \widetilde{X}_0 \longrightarrow \widetilde{X}_0$ η ταυτοτική απεικονίση και έστω $p_0 : \widetilde{X}_0 \longrightarrow X$ ο περιορισμός της p στο $\widetilde{X}_0$. Υπάρχει τότε μία $p_*\pi = \mu$-μονοσήμαντα καθορισμένη δεσμευμένη κατανομή $\widetilde{\pi}_{id_0|\,p_0} : \mathcal{B}(\widetilde{X}_0) \times X \longrightarrow [0,1]$ της id_0 δεδομένης της p_0. Για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$ θέτουμε π_x^0 το μέτρο $\mathcal{B}(\widetilde{X}_0) \ni B \mapsto \widetilde{\pi}_{id_0|\,p_0}(B,x)$. Τότε, από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι για κάθε π-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\widetilde{X}} f d\pi = \int_{\widetilde{X}_0} f d\pi = \int_X \int_{\widetilde{X}_0} f(\widetilde{x}) d\pi_x^0(\widetilde{x}) d\mu(x).$$

Αν θέσουμε $\pi_x := i_{0*}\pi_x^0$ για κάθε $x \in X$ για το οποίο ορίζεται το π_x^0, όπου $i_0 : \widetilde{X}_0 \hookrightarrow \widetilde{X}$ είναι η ένθεση, τότε

$$\int_{\widetilde{X}} f d\pi = \int_X \int_{\widetilde{X}} f(\widetilde{x}) d\pi_x(\widetilde{x}) d\mu(x), \tag{8.7}$$

για κάθε π-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. Επιπλέον, μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ το μέτρο π_x^0 στηρίζεται από το σύνολο $p_0^{-1}(x)$, μιας και μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$,

$$\pi_x^0(p_0^{-1}(x)) = \widetilde{\pi}_{id_0|\,p_0}(p_0^{-1}(x), x) = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{p_0^{-1}(x)}|p_0)(x) = \mathbb{1}_{p_0^{-1}(x)}(x),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω του ότι η $\mathbb{1}_{p_0^{-1}(x)}$ είναι $\sigma(p_0)$-μετρήσιμη. Συνεπώς $\mathrm{supp}\pi_x = i_0(p_0^{-1}(x)) \subseteq p^{-1}(x)$ όπως ζητούσαμε. Τώρα, η μοναδικότητα της δεσμευμένης κατανομής-πηλίκο μίας τυχαίας μεταβλητής X, δεδομένης μίας τυχαίας μεταβλητής Y, ισχύει μόνο αν το πεδίο τιμών της X είναι πολωνικός χώρος. Ωστόσο, αυτό αρκεί για να μας δώσει ότι η οικογένεια $\{\pi_x \in \mathbb{P}\widetilde{X} | x \in X\}$ του θεωρήματος διάσπασης είναι μ-σ.π. μονοσήμαντα ορισμένη, αφού για κάθε οικογένεια $\{\pi_x \in \mathbb{P}\widetilde{X} | x \in X\}$ που ικανοποιεί την (8.7) πρέπει υποχρεωτικά το μέτρο π_x να στηρίζεται από τον πολωνικό χώρο $\mathrm{supp}\pi$, μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Αποδεικνύουμε τέλος την ύπαρξη και μοναδικότητα δεσμευμένης κατανομής-πηλίκο μίας τυχαίας μεταβλητής X ως προς μία άλλη τυχαία μεταβλητή, στην περίπτωση που ο χώρος στον οποίο παίρνει τιμές η X είναι πολωνικός. Η απόδειξη και της ύπαρξης και της μοναδικότητας, βασίζονται στο ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ ενός πολωνικού χώρου T παράγεται από κάποια αριθμήσιμη άλγεβρα.

Θεώρημα 8.1.2 *Έστω $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (T, \mathcal{B})$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον πολωνικό χώρο T και έστω $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ τυχαία μεταβλητή. Τότε υπάρχει δεσμευμένη κατανομή πηλίκο $\widetilde{P}_{X|Y} : \mathcal{B}(T) \times \Omega' \longrightarrow [0,1]$ της X δεδομένης της Y και είναι Y_*P-μονοσήμαντα ορισμένη.*

Απόδειξη Δείχουμε πρώτα τη μοναδικότητα. Έστω, λοιπόν, P, P' δύο δεσμευμένες κατανομές-πηλίκο της X δεδομένης της Y. Όπως ξέρουμε, η $\mathcal{B}$ παράγεται από κάποια αριθμήσιμη άλγεβρα $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$. Αφού οι P, P' είναι δεσμευμένες κατανομές-πηλίκο, για κάθε $B \in \mathcal{R}$, υπάρχει σύνολο $\Omega'_B \in \mathcal{F}'$ που στηρίζει το Y_*P, τ.ω.

$$P(B, \omega') = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y)(\omega') = P'(B, \omega'),$$

για κάθε $\omega' \in \Omega_B$. Τότε, όμως, αφού η $\mathcal{R}$ είναι αριθμήσιμη, το σύνολο $\Omega'_0 := \bigcap_{B \in \mathcal{R}} \Omega'_B$ στηρίζει το Y_*P, και $P(B, \omega') = P'(B, \omega')$ για κάθε $(B, \omega') \in \mathcal{R} \times \Omega'_0$. Τώρα, για κάθε $\omega' \in \Omega'_0$, τα μέτρα πιθανότητας $P_{\omega'}$ και $P'_{\omega'}$ με τύπο $\mathcal{B} \ni B \mapsto P(B, \omega')$ και $\mathcal{B} \ni B \mapsto P'(B, \omega')$ αντίστοιχα, ταυτίζονται στην άλγεβρα $\mathcal{R}$ η οποία παράγει την $\mathcal{B}$, και συνεπώς ταυτίζονται σε όλη τη $\mathcal{B}$. Σύμφωνα με τους ορισμούς, αυτό σημαίνει ότι οι P και P' ταυτίζονται Y_*P-σ.π. ως πυρήνες Markov, όπως ζητούσαμε.

Έστω $\{R_i | i \in \mathbb{N}\}$ μία αρίθμηση της άλγεβρας $\mathcal{R}$. Η κατανομή $\mu := X_*P$ της X στον T είναι σφικτή, και άρα για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(K_{ij})_{j=1}^{\infty}$ συμπαγών υποσυνόλων του R_i τ.ω.

$$\mu(R_i) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu(K_{ij}). \tag{8.8}$$

Έστω $\mathcal{R}'$ η άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{R}$ και όλα τα σύνολα K_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$. Η άλγεβρα αυτή είναι, επίσης, αριθμήσιμη. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$, επιλέγουμε σύνολο $\Omega'_B \in \mathcal{F}$ το οποίο στηρίζει το Y_*P, τ.ω. η δεσμευμένη μέση τιμή-πηλίκο της $\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}$ δεδομένης της Y, να ορίζεται στο Ω'_B και ορίζουμε συνάρτηση $Q : \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \{B\} \times \Omega'_B \longrightarrow [0, 1]$ με τύπο $Q(B, \omega') = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y)(\omega')$. Από τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής-πηλίκο, για κάθε ξένη ακολουθία $\{B_i\}_{i=1}^{k}$ στην $\mathcal{B}$, έχουμε ότι

$$Q(\bigcup_{i=1}^{k} B_i, \omega') = \sum_{i=1}^{k} Q(B_i, \omega'), \tag{8.9}$$

Y_*P-σ.β. (όπου το σύνολο που στηρίζει το Y_*P στο οποίο ισχύει η (8.9), εν γένει εξαρτάται από την ακολουθία $\{B_i\}_{i=1}^{k}$.) Επιπλέον, για κάθε $t \in T \setminus \big(R_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\big)$, έχουμε ότι $\sup_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{K_{ij}}(t) = \mathbb{1}_{R_i}(t)$. Από την (8.8), $\mu\big(R_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\big) = 0$, και άρα $\sup_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{K_{ij}} = \mathbb{1}_{R_i}$ μ-σ.β. Συνεπως, $\sup_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{X^{-1}(K_{ij})} = \mathbb{1}_{X^{-1}(R_i)}$, P-σ.β. και άρα από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για τη δεσμευμένη μέση τιμή-πηλίκο, έχουμε ότι

$$Q(R_i, \omega') = \sup_{n \in \mathbb{N}} Q(K_{ij}, \omega'), \tag{8.10}$$

Y_*P-σ.π., για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τέλος, από την πρόταση (8.1.5) (α), έχουμε ότι

$$Q(T, \omega') = 1 \tag{8.11}$$

Y_*P-σχεδόν για κάθε $\omega' \in \Omega'$.

Τώρα, αφού το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών $\{B_i\}_{i=1}^{k}$ στην $\mathcal{R}'$ είναι αριθμήσιμο, έπεται από την (8.9) ότι υπάρχει $\Omega'_0 \in \mathcal{F}'$ που στηρίζει το Y_*P, τ.ω. το $\mathcal{R}' \ni B \overset{Q_{\omega'}}{\longmapsto} Q(B, \omega')$ να είναι περιεχόμενο (δηλαδή πεπερασμένα προσθετικό μέτρο) στην άλγεβρα $\mathcal{R}'$, για κάθε $\omega' \in \Omega'_0$ και τ.ω. οι (8.10) και (8.11) να ισχύουν για κάθε $\omega' \in \Omega'_0$. Θα δείξουμε ότι το περιεχόμενο $Q_{\omega'}$ είναι προμέτρο στην $\mathcal{R}$ για κάθε $\omega' \in \Omega'_0$. Έστω $\omega' \in \Omega'_0$. Αφού το $Q_{\omega'}$ είναι πεπερασμένο περιεχόμενο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι $\emptyset$-συνεχές στην $\mathcal{R}$, δηλαδή ότι για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ στην $\mathcal{R}$ τ.ω. $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ έχουμε ότι $\inf_{n\in\mathbb{N}} Q_{\omega'}(B_n) = 0$. Έστω, λοιπόν, $\{B_n\}$ τέτοια ακολουθία στην $\mathcal{R}$. Από τις ιδιότητες του συνόλου Ω_0', για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_n \subseteq B_n$ (πιο συγκεκριμένα κάποιο κατάλληλο K_{ij}) τ.ω.

$$Q_{\omega'}(B_n) - Q_{\omega'}(K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Αφού, όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ και αφού τα K_n είναι συμπαγή, έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $K_1 \cap \cdots \cap K_{n_0} = \emptyset$. Συνεπώς, $B_{n_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0}(B_i \setminus K_i)$. Αφού το $Q_{\omega'}$ είναι πεπερασμένο περιεχόμενο στην $\mathcal{R}'$, έχουμε ότι

$$Q_{\omega'}(B_{n_0}) \leq \sum_{i=1}^{n_0} Q_{\omega'}(B_i \setminus K_i) = \sum_{i=1}^{n_0} \big(Q_{\omega'}(B_i) - Q_{\omega'}(K_i)\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\inf_{n\in\mathbb{N}} Q_{\omega'}(B_n) = 0$, όπως ζητούσαμε.

Συνεπώς, για κάθε $\omega' \in \Omega_0'$, το προμέτρο $Q_{\omega'}$ επεκτείνεται σε μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P_{\omega'}$ στην $\mathcal{B}$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $P_{X|Y} : \mathcal{B} \times \Omega_0' \longrightarrow [0,1]$ με τύπο $P_{X|Y}(B, \omega') = P_{\omega'}(B)$ είναι Y_*P-σ.π. ορισμένη δεσμευμένη κατανομή-πηλίκο της X δεδομένης της Y. Για το σκοπό αυτό πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}$, (α) η συνάρτηση $\Omega_0' \ni \omega' \mapsto P_{X|Y}(B, \omega')$ είναι $\mathcal{F}_0'$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{F}_0' = \{\Omega_0' \cap F' \,|\, F' \in \mathcal{F}'\}$, και (β) $P_{X|Y}(B, \cdot) = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y)$, Y_*P-σ.β. Δείχνουμε πρώτα το (α). Έστω $\mathcal{B}_0$ η οικογένεια όλων των στοιχείων της $\mathcal{B}$ για τα οποία η $P_{X|Y}(B, \cdot)$ είναι $\mathcal{F}_0'$-μετρήσιμη. Από τον ορισμό της $P_{X|Y}$, για κάθε $B \in \mathcal{R}$, έχουμε ότι $P_{X|Y}(B, \cdot) = Q(B, \cdot) = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y)$, Y_*P-σ.β., και άρα $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}_0$. Από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής-πηλίκο, είναι άμεσο ότι η $\mathcal{B}_0$ είναι λ-σύστημα, (δηλαδή περιέχει τον T, και είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και ξένες αριθμήσιμες ενώσεις) και, άρα, από το π-λ θεώρημα του Dynkin έπεται ότι $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}_0$, όπως ζητούσαμε.

Αποδεικνύουμε τέλος το (β). Αφού για κάθε $B \in \mathcal{R}$, $P_{X|Y}(B, \cdot) = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y)$, Y_*P-σ.β., έπεται ότι για κάθε $B \in \mathcal{R}$ και κάθε $F' \in \mathcal{F}$,

$$\int_{F'} P_{X|Y}(B, \omega') dY_*P(\omega') = \int_{F'} \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y) dY_*P.$$

Όμως για κάθε $F' \in \mathcal{F}'$, οι συναρτήσεις $\mathcal{B} \ni B \overset{\mu_{F'}}{\longmapsto} \int_{F'} P_{X|Y}(B, \omega') dY_*P(\omega')$ και $\mathcal{B} \ni B \overset{\nu_{F'}}{\longmapsto} \int_{F'} \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y) dY_*P$ είναι πεπερασμένα μέτρα στην $\mathcal{B}$ και ταυτίζονται στην $\mathcal{R}$. Έτσι, αφού η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα, έπεται ότι $\mu_{F'} = \nu_{F'}$ $F' \in \mathcal{F}'$. Τότε τα μέτρα μ_B και ν_B στην $\mathcal{F}'$ με τύπο $\mathcal{F}' \ni F' \overset{\mu_B}{\longmapsto} \int_{F'} P_{X|Y}(B, \omega') dY_*P(\omega')$ και $\mathcal{F}' \ni F' \overset{\nu_B}{\longmapsto} \int_{F'} \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y) dY_*P$ επίσης ταυτίζονται για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Συνεπώς οι συναρτήσεις $P_{X|Y}(B, \cdot)$ και $\widetilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{X^{-1}(B)}|Y)$ ταυτίζονται Y_*P-σ.β. ως πυκνότητες του μέτρου $\mu_B = \nu_B$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

8.2 Σύνθεση Σχεδίων Μεταφοράς

Σε πολλές περιπτώσεις παρουσιάζεται η ανάγκη να συνθέσουμε σχέδια μεταφοράς. Έστω μ_1, μ_2 και μ_3 μέτρα πιθανότητας και $\pi^{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$, $\pi^{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$ σχέδια μεταφοράς. Η μεταφορά του μ_1 στο μ_2 σύμφωνα με το π^{12} και έπειτα του μ_2 στο μ_3 σύμφωνα με το

π^{23} θα πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα τρόπο μεταφοράς του μ_1 στο μ_3, ο οποίος λογικά θα πρέπει να αντιστοιχεί σε κάποιο σχέδιο μεταφοράς $\pi^{23} \circ \pi^{12}$.

Έστω $p^i : X_1 \times X_2 \times X_3 \longrightarrow X_i,\ i = 1, 2, 3$ και $p^{i,j} : X_1 \times X_2 \times X_3 \longrightarrow X_i \times X_j,\ i, j = 1, 2, 3,\ i < j$ οι προβολές. Όπως θα δούμε, η σύνθεση των π^{12} και π^{23} είναι της μορφής $p^{1,3}_* \pi$ για κάποιο $\pi \in \mathbb{P}(X_1 \times X_2 \times X_3)$ τ.ω. $p^{1,2}_* \pi = \pi^{12}$ και $p^{2,3}_* \pi = \pi^{23}$. Θέτουμε $\Pi(\pi^{12}, \pi^{23})$ το σύνολο όλων αυτών των μέτρων π για τα οποία $p^{1,2}_* \pi = \pi^{12}$ και $p^{2,3}_* \pi = \pi^{23}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\pi \in \Pi(\pi^{12}, \pi^{23})$ έχουμε $p^i_* \pi = \mu_i,\ i = 1, 2, 3$, και άρα $\Pi(\pi^{12}, \pi^{23}) \subseteq \Pi(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Ειδικότερα, μία αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\Pi(\pi^{12}, \pi^{23})$ μη-κενό είναι $p^2_{1,2_*} \pi^{12} = p^2_{2,3_*} \pi^{23}$ όπου $p^2_{1,2} : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$ και $p^2_{2,3} : X_2 \times X_3 \longrightarrow X_2$ είναι οι προβολές. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα μέτρο στο $\Pi(\pi^{12}, \pi^{23})$ με την υπόθεση ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται. Έτσι η συνθήκη αυτή είναι, επίσης, ικανή για να είναι το $\Pi(\pi^{12}, \pi^{23})$ μη-κενό.

Για να ορίσουμε τη σύνθεση σχεδίων μετραφοράς, θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση τους ως σχήματα μεταφοράς που μας δίνει το θεώρημα της διάσπασης. Γι' αυτό περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου τα μέτρα μ_i είναι σφικτά Borel μέτρα σε κάποιο (τοπολογικά) πλήρη μετρικό χώρο $X_i,\ i = 1, 2, 3$.

Ορισμός 8.2.1 Έστω (X_i, μ_i) χώροι πιθανότητας, $i = 1, 2, 3$ και έστω $\pi^{i(i+1)} : X_i \longrightarrow \mathbb{P}X_{i+1}$ μ_i-σ.π. ορισμένο σχήμα μεταφοράς του μ_i στο $\mu_{i+1},\ i = 1, 2$. Η μ_1-σ.π. ορισμένη απεικόνιση $\pi^{23} \circ \pi^{12} : X_1 \longrightarrow \mathbb{P}X_3$ με τύπο

$$(\pi^{23} \circ \pi^{12})_{x_1}(E) = \int_{X_2} \pi^{23}_{x_2}(E) d\pi^{12}_{x_1}(x_2),$$

λέγεται σύνθεση του π^{12} με το π^{23}.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Το $(\pi^{23} \circ \pi^{12})_{x_1}$ είναι πράγματι μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{P}X_3$ από το λήμμα 7.1.2 μ_1-σχεδόν για κάθε $x_1 \in X_1$.

2. Η σύνθεση $\pi^{23} \circ \pi^{12} : X_1 \longrightarrow \mathbb{P}X_3$ του $\pi^{12} : X_1 \longrightarrow \mathbb{P}X_2$ με το $\pi^{23} : X_2 \longrightarrow \mathbb{P}X_3$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω $E \in \mathcal{B}(X_3)$. Αφού η $\pi^{23} : X_2 \longrightarrow \mathbb{P}X_3$ είναι μετρήσιμη, η απεικόνιση $X_2 \ni x_2 \mapsto \pi^{23}_{x_2}(E) \in [0, 1]$ είναι μετρήσιμη. Τότε, όμως, αφού και η $\pi^{12} : X_1 \longrightarrow X_2$ είναι μετρήσιμη, έπεται από το λήμμα 7.1.2 ότι η απεικόνιση

$$X_1 \ni x_1 \mapsto \int_{X_2} \pi^{23}_{x_2}(E) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) \in [0, 1]$$

είναι μετρήσιμη. Συνεπώς η $\pi^{23} \circ \pi^{12} : X_1 \longrightarrow \mathbb{P}X_3$ είναι μετρήσιμη.

3. Η $\pi^{23} \circ \pi^{12}$ μεταφέρει το μ_1 στο μ_3.

Απόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του X_3. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{X_1} (\pi^{23} \circ \pi^{12})_{x_1}(E) d\mu_1(x_1) = \mu_3(E).$$

Αυτό, όμως, πράγματι ισχύει αφού

$$\begin{aligned}\int_{X_1} (\pi^{23} \circ \pi^{12})_{x_1}(E) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_1} \int_{X_2} \pi^{23}_{x_2}(E) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \pi^{23}_{x_2}(E) d\mu_2(x_2) = \mu_3(E).\end{aligned}$$

4. Από τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις έπεται ότι η σύνθεση $\pi^{23} \circ \pi^{12}$ δύο σχημάτων μεταφοράς $\pi^{12} \in \Gamma(\mu_1, \mu_2)$ και $\pi^{23} \in \Gamma(\mu_2, \mu_3)$ είναι σχήμα μεταφοράς από το μ_1 στο μ_3.

5. Έστω $\pi^{12} \in \Gamma(\mu_1, \mu_2)$ και $\pi^{23} \in \Gamma(\mu_2, \mu_3)$ τα σχήματα μεταφοράς που επάγονται από τις απεικονίσεις μεταφοράς $T^{12} : X_1 \longrightarrow X_2$ και $T^{23} X_2 \longrightarrow X_3$, δηλαδή $\pi^{12} = \delta \circ T^{12}$ και $\pi^{23} = \delta \circ T^{23}$. Τότε η σύνθεσή τους επάγεται από τη σύνθεση των T^{23} και T^{12}, δηλαδή

$$(\delta \circ T^{23}) \circ (\delta \circ T^{12}) = \delta \circ (T^{23} \circ T^{12}).$$

Απόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του X_3. Πράγματι, μ_1-σχεδόν για κάθε $x_1 \in X_1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\big((\delta \circ T^{23}) \circ (\delta \circ T^{12})\big)_{x_1}(E) &= \int_{X_2} (\delta \circ T^{23})_{x_2}(E) d(\delta \circ T^{12})_{x_1}(x_2) \\ &= \int_{X_2} \mathbb{1}_E\big(T^{23}(x_2)\big) d\delta_{T^{12}(x_1)}(x_2) \\ &= \mathbb{1}_E(T^{23} \circ T^{12}(x_1)) = \big(\delta \circ (T^{23} \circ T^{12})\big)_{x_1}(E).\end{aligned}$$

6. Έστω $\pi^{12} \in \Gamma(\mu_1, \mu_2)$, $\pi^{23} \in \Gamma(\mu_2, \mu_3)$ σχήματα μεταφοράς. Το σχέδιο μεταφοράς από το μ_1 στο μ_3 που επάγεται από τη σύνθεσή τους, το οποίο συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με $\pi^{23} \circ \pi^{12}$, χαρακτηρίζεται από την

$$\int_{X_1 \times X_3} f d\pi^{23} \circ \pi^{12} = \int_{X_1} \int_{X_2} \int_{X_3} f(x_1, x_3) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1), \ \forall f \in B(X_1 \times X_3).$$

Μέσω της σύνθεσης σχημάτων μεταφοράς και του θεώρηματος διάσπασης ορίζεται η σύνθεση σχεδιών μεταφοράς μεταξύ σφικτών μέτρων σε πλήρεις μετρικούς χώρους.

Ορισμός 8.2.2 Έστω μ_i, $i = 1, 2, 3$ σφικτά μετρα στους πλήρεις μετρικούς χώρους X_i, $i = 1, 2, 3$ και έστω $\pi^{i(i+1)} \in \Pi(\mu_i, \mu_{i+1})$ σχέδιο μεταφοράς από το μ_i στο μ_{i+1}. Η σύνθεση $\pi^{23} \circ \pi^{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_3)$ του π^{12} με το π^{23} είναι το σχέδιο μεταφοράς που επάγεται από τη σύνθεση των σχημάτων μεταφοράς που αντιστοιχούν στα σχέδια π^{12} και π^{23}.

Το μέτρο $\pi^{23} \widetilde{\circ} \pi^{12} \in \Pi(\pi^{12}, \pi^{23}) \subseteq \Pi(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, με τύπο

$$\pi^{23} \widetilde{\circ} \pi^{12}(E) = \int_{X_1} \int_{X_2} \int_{X_3} \mathbb{1}_E(x_1, x_2, x_3) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1)$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$, λέγεται η συγκόλληση του π^{12} με το π^{23} κατά μήκος της κοινής κατανομής τους.

Λήμμα 8.2.1 *Έστω μ_i, $i = 1, 2, 3$ σφικτά μέτρα στους πλήρεις μετρικούς χώρους X_i, $i = 1, 2, 3$ και έστω $\pi^{i(i+1)} \in \Pi(\mu_i, \mu_{i+1})$ σχέδιο μεταφοράς από το μ_i στο μ_{i+1}. Η συγκόλληση $\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12} \in \Pi(\pi^{12}, \pi^{23})$ του π^{12} με το π^{23} είναι πράγματι μέτρο, και χαρακτηρίζεται από την ισχύ της*

$$\int_{X_1\times X_2\times X_3} f d\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12} = \int_{X_1}\int_{X_2}\int_{X_3} f(x_1, x_2, x_3) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1) \quad (8.12)$$

για κάθε $f \in B(X_1 \times X_2 \times X_3)$. Επιπλέον, ικανοποιεί τις

$$\text{(a) } p^{1,2}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right) = \pi^{12}, \quad \text{(b) } p^{2,3}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right) = \pi^{23}$$

και

$$\text{(c) } p^{1,3}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right) = \pi^{23} \circ \pi^{12}$$

Απόδειξη Το ότι το $\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}$ είναι πράγματι μέτρο και χαρακτηρίζεται από την (8.12) αποδεικνύεται όμοια με το λήμμα 7.1.2. Αποδεικνύουμε, λοιπόν, τα (a), (b) και (c).
(a) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $X_1 \times X_2$. Τότε

$$\begin{aligned}
p^{1,2}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right)(E) &= \int_{X_1\times X_2} \mathbb{1}_E dp^{1,2}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right) \\
&= \int_{X_1}\int_{X_2}\int_{X_3} \mathbb{1}_E \circ p^{1,2}(x_1, x_2, x_3) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1}\int_{X_2}\int_{X_3} \mathbb{1}_E(x_1, x_2) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1}\int_{X_2} \mathbb{1}_E(x_1, x_2) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1) = \pi^{12}(E)
\end{aligned}$$

(b) Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X_2 \times X_3$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
p^{2,3}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right)(E) &= \int_{X_2\times X_3} \mathbb{1}_E dp^{2,3}_*\left(\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12}\right) \\
&= \int_{X_1}\int_{X_2}\int_{X_3} \mathbb{1}_E \circ p^{2,3}(x_1, x_2, x_3) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_2}\int_{X_3} \mathbb{1}_E(x_2, x_3) d\pi^{23}_{x_2}(x_3) d\mu_2(x_2) = \pi^{23}(E)
\end{aligned}$$

Τέλος, το (c) είναι άμεσο από τους ορισμούς. □

<u>Παράδειγμα</u>

1. Έστω μ_i σφικτά μέτρα στους πλήρεις μετρικούς χώρους X_i και έστω $\pi^{12} = \mu_1 \otimes \mu_2$, $\pi^{23} = \mu_2 \otimes \mu_3$ σχέδια μεταφοράς. Τότε

$$\pi^{23}\tilde{\circ}\pi^{12} = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$$

και συνεπώς $\pi^{23} \circ \pi^{12} = \mu_1 \otimes \mu_3$.

Απόδειξη. Είναι προφανές, αφού $\pi^{12}_{x_1} = \mu_2$ για κάθε $x_1 \in X_1$ και $\pi^{23}_{x_2} = \mu_3$ για κάθε $x_2 \in X_2$.

Η σύνθεση σχεδίων μεταφοράς γενικεύεται και για πεπερασμένο το πλήθος αριθμό σχεδίων μεταφοράς. Έστω μ_i, $i = 1, \ldots, n$ σφικτό μέτρο στον πλήρη μετρικό χώρο X_i, $i = 1, \ldots, n$ και έστω $\pi^{i(i+1)} \in \Pi(\mu_i, \mu_{i+1})$ σχέδιο μεταφοράς από το μ_i στο μ_{i+1}. Αφού η σύνθεση σχεδίων μεταφοράς είναι σχέδιο μεταφοράς, η σύνθεση $\pi^{n,n+1} \circ \cdots \circ \pi^{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_n)$ ορίζεται επαγωγικά και δίνεται από τον τύπο

$$\pi^{n,n+1} \circ \cdots \circ \pi^{12}(E) = \int_{X_1} \int_{X_2} \cdots \int_{X_n} \mathbb{1}_E(x_1, x_n) d\pi^{n-1,n}_{x_{n-1}}(x_n) \ldots d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1),$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq X_1 \times X_n$. Όσον αφορά τη συγκόλληση, μπορεί κανείς να αποδείξει άμεσα ότι ο τύπος

$$\pi^{n-1,n} \widetilde{\circ} \ldots \widetilde{\circ}\, \pi^{12}(E) = \int_{X_1} \int_{X_2} \cdots \int_{X_n} \mathbb{1}_E(x_1, \ldots, x_n) d\pi^{n-1,n}_{x_{n-1}}(x_n) \ldots d\pi^{12}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1),$$

ορίζει ένα μέτρο $\widetilde{\Pi} := \pi^{n-1,n} \widetilde{\circ} \ldots \widetilde{\circ}\, \pi^{12} \in \Pi(\mu_1, \ldots, \mu_n) \subseteq \mathbb{P}^T(X_1 \times \ldots \times X_n)$, τ.ω.

$$(p^1, p^n)_* \widetilde{\Pi} = \pi^{n,n+1} \circ \cdots \circ \pi^{12}, \tag{8.13}$$

$$(p^i, p^{i+1})_* \widetilde{\Pi} = \pi^{i,i+1} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n-1, \tag{8.14}$$

$$(\mathop{\Delta}_{i=1}^{k} p^i)_* \widetilde{\Pi} = \pi^{k-1,k} \widetilde{\circ} \ldots \widetilde{\circ}\, \pi^{12}, \qquad 1 \leq k \leq n. \tag{8.15}$$

όπου $p^i : X_1 \times \ldots X_n \longrightarrow X_i$ είναι η προβολή για κάθε i. Συχνά χρειάζεται να συγκολλούμε και πολλαπλά σχέδια και, έτσι, θα ορίσουμε τη συγκόλληση πεπερασμένου αριθμού σχεδίων επαγωγικά, μέσω της συγκόλλησης πολλαπλών σχεδίων. Πριν δώσουμε τον ορισμό, υπενθυμίζουμε ότι δεδομένης μίας οικογένειας απεικονίσεων $f_i : X \longrightarrow X_i$, $i \in I$, η διαγώνια απεικόνιση που ορίζεται από αυτήν, είναι η απεικόνιση $\Delta_{i \in I} f_i : X \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$, που ορίζεται από τον τύπο $\mathop{\Delta}_{i \in I} f_i(x) = (f_i(x))_{i \in I}$.

Ορισμός 8.2.3 Έστω $X_1, \ldots, X_n$ πλήρεις μετρικοί χώροι και έστω $\mu_i \in \mathbb{P}^T X_i$ σφικτά μέτρα. Έστω $\pi^{1 \rightsquigarrow k} \in \Pi(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $\pi^{k \rightsquigarrow n} \in \Pi(\mu_k, \ldots, \mu_n)$ πολλαπλά σχέδια, $1 < k < n$. Το μέτρο $\pi^{k \rightsquigarrow n} \widetilde{\circ} \pi^{1 \rightsquigarrow k} \in \Pi(\mu_1, \ldots \mu_n)$ με τύπο

$$\pi^{k \rightsquigarrow n} \widetilde{\circ} \pi^{1 \rightsquigarrow k}(E) = \int_{\prod\limits_{i=1}^{k} X_i} \int_{\prod\limits_{i=k+1}^{n} X_i} \mathbb{1}_E(x_1, \ldots, x_n) d\pi^{k \rightsquigarrow n}_{x_k}(x_{k+1}, \ldots, x_n) d\pi^{1 \rightsquigarrow k}(x_1, \ldots x_k),$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq X_1 \times \ldots X_n$, όπου $(\pi^{k \rightsquigarrow n}_{x_k})_{x_k \in X_k} \subseteq \mathbb{P}(X_{k+1} \times \ldots \times X_n)$ είναι η διάσπαση του $\pi^{k \rightsquigarrow n}$ ως προς την πρώτη μεταβλητή του $x_k \in X_k$, λέγεται η συγκόλληση του $\pi^{1 \rightsquigarrow k}$ με το $\pi^{k \rightsquigarrow n}$ κατά μήκος της κοινής κατανομής τους.

Θέτοντας $X_1^k := \prod_{i=1}^k X_i$ και $X_{k+1}^n := \prod_{i=k+1}^n X_i$, ο τύπος του $\pi^{k \rightsquigarrow n} * \pi^{1 \rightsquigarrow k}$ συντομεύεται στον

$$\begin{aligned} \pi^{k \rightsquigarrow n} \widetilde{\circ} \pi^{1 \rightsquigarrow k}(E) &= \int_{X_1^k} \int_{X_{k+1}^n} \mathbb{1}_E(x_1^k, x_{k+1}^n) d\pi^{k \rightsquigarrow n}_{x_k}(x_{k+1}^n) d\pi^{1 \rightsquigarrow k}(x_1^k) \\ &= \int_{X_1^k} \int_{X_{k+1}^n} \mathbb{1}_E d\pi^{k \rightsquigarrow n}_{x_k} d\pi^{1 \rightsquigarrow k}. \end{aligned}$$

Καταρχάς παρατηρούμε ότι από το λήμμα 7.1.3, το μέτρο $\pi^{k\rightsquigarrow n}$ είναι σφικτό και άρα η διάσπασή του ως προς την πρώτη του μεταβλητή είναι μ_k-σ.π. καλά ορισμένη. Επειδή $p^k_*\pi^{1\rightsquigarrow k} = \mu_k$, έπεται ότι ορίζεται και $\pi^{1\rightsquigarrow k}$-σ.π. και άρα η συγκόλληση του $\pi^{1\rightsquigarrow k}$ με το $\pi^{k\rightsquigarrow n}$ είναι καλά ορισμένο μέτρο. Ελέγχουμε, επίσης, ότι πράγματι $\pi^{k\rightsquigarrow n} * \pi^{1\rightsquigarrow k} \in \Pi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Η περίπτωση $1 \leq i \leq k$ είναι προφανής. Έστω λοιπόν $k < i \leq n$. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $E_i \subseteq X_i$, έχουμε ότι

$$p^i_*(\pi^{k\rightsquigarrow n}\widetilde{\circ}\pi^{1\rightsquigarrow k})(E_i) = \int_{X_1^k}\int_{X_{k+1}^n}(\mathbb{1}_{E_i}\circ p^i)d\pi^{k\rightsquigarrow n}_{x_k}d\pi^{1\rightsquigarrow k}.$$

Η συνάρτηση

$$X_1^k \ni x_1^k = (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \int_{X_1^k}\int_{X_{k+1}^n}(\mathbb{1}_{E_i}\circ p^i)(x_1^k, x_{k+1}^n)d\pi_{x_k}(x_{k+1}^n),$$

όμως, εξαρτάται μόνο από την πρώτη της μεταβλητή $x_k \in X_k$, και συνεπώς, αφού $p^k_*\pi^{1\rightsquigarrow k} = \mu_k$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} p^i_*(\pi^{k\rightsquigarrow n}\widetilde{\circ}\pi^{1\rightsquigarrow k})(E_i) &= \int_{X_k}\int_{X_{k+1}^n}(\mathbb{1}_{E_i}\circ p^i)d\pi^{k\rightsquigarrow n}_{x_k}d\mu_k \\ &= \int_{X_k^n}(\mathbb{1}_{E_i}\circ p^i)d\pi^{k\rightsquigarrow n} = \mu_i(E_i). \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ορισμός της συγκόλλησης όπως έχει δοθεί είναι σωστός. Όπως και στην περίπτωση σχεδίων μεταφοράς, ο τύπος του ορισμού της συγκόλλησης ισχύει γενικότερα για κάθε $f \in B(X_1 \times \ldots \times X_n)$. Επιπλέον,

$$(\mathop{\Delta}_{i=1}^{k} p^i)_*(\pi^{k\rightsquigarrow n}\widetilde{\circ}\pi^{1\rightsquigarrow k}) = \pi^{1\rightsquigarrow k}, \quad (\mathop{\Delta}_{i=k}^{n} p^i)_*(\pi^{k\rightsquigarrow n}\widetilde{\circ}\pi^{1\rightsquigarrow k}) = \pi^{k\rightsquigarrow n}, \tag{8.16}$$

όπου $p^i : X_1 \times \ldots X_n \longrightarrow X_i$ είναι οι προβολές. Ελέγχουμε π.χ. την πρώτη ισότητα. Για κάθε Borel σύνολο $E_1^k \subseteq X_1^k$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (\mathop{\Delta}_{i=1}^{k} p^i)_*(\pi^{k\rightsquigarrow n}\widetilde{\circ}\pi^{1\rightsquigarrow k})(E_1^k) &= \int_{X_1^k}\int_{X_{k+1}^n}\left(\mathbb{1}_{E_1^k}\circ \mathop{\Delta}_{i=1}^{k} p^i\right)d\pi^{k\rightsquigarrow n}_{x_k}d\pi^{1\rightsquigarrow k} \\ &= \int_{X_1^k}\mathbb{1}_{E_1^k}d\pi^{1\rightsquigarrow k} = \pi^{1\rightsquigarrow k}(E_1^k). \end{aligned}$$

Μέσω της συγκόλλησης πολλαπλών σχεδίων ορίζεται επαγωγικά η συγκόλληση πεπερασμένων το πλήθος σχεδίων μεταφοράς. Όπως μπορεί να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης, η συγκόλληση είναι προσεταιριστική σε κάθε τριάδα διαδοχικών σχεδίων μεταφοράς, και έτσι ο ορισμός αυτός είναι σαφής ως έχει. Έστω $\pi^{i(i+1)} \in \Pi(\mu_i, \mu_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία διαδοχικών σχεδίων μεταφοράς μεταξύ σφικτών μέτρων σε πλήρεις μετρικούς χώρους. Η συγκόλληση τους συμβολίζεται με $\widetilde{\circ}_{i=1}^{n-1}\pi^{i,i+1}$ και χαρακτηρίζεται από την

$$\int_{X_1^n} f d\widetilde{\circ}_{i=1}^{n-1}\pi^{i,i+1} = \int_{X_1}\int_{X_2}\cdots\int_{X_n} f d\pi^{n-1,n}_{x_{n-1}}\ldots d\pi^{12}_{x_1}d\mu_1,$$

για κάθε $f \in B(X_1^n)$, και προφανώς ικανοποιεί τις (8.13) έως (8.15).

Ορισμός 8.2.4 Έστω X, Y πλήρεις μετρικοί χώροι, $\mu \in \mathbb{P}X$, $\nu \in \mathbb{P}Y$ σφικτά μέτρα και $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ σχέδιο μεταφοράς. Το αντίστροφο σχέδιο μεταφοράς του π είναι το μέτρο $\pi^{-1} := A_*\pi \in \Pi(\nu,\mu)$, όπου $A : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ είναι η απεικόνιση με τύπο $A(x,y) = (y,x)$.

Το σχέδιο $(Id_X, Id_X)_*\mu \in \Pi(\mu,\mu)$ λέγεται το ταυτοτικό σχέδιο από το μ στον εαυτό του και συμβολίζεται Id_μ.

Μέσω του ακόλουθου λήμματος, το οποίο γενικεύει τη σύνθεση σχεδίων μεταφοράς σε αριθμήσιμο πλήθος σχεδίων, θα δούμε στην επόμενη παράγραφο μία εύκολη απόδειξη του ότι οι μετρικές του Wasserstein στον $\mathbb{P}_r^T X$ είναι πλήρεις ανν ο X είναι πλήρης. Για κάθε ακολουθία μετρικών χώρων $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα θεωρούμε τον $\mathbf{X}_\infty := \Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.

Λήμμα 8.2.2 *Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία πλήρων μετρικών χώρων, $\mu_n \in \mathbb{P}^T X_n$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία σφικτών μέτρων και $\pi_n := \pi^{n,n+1} \in \Pi(\mu_n,\mu_{n+1}) \subseteq \mathbb{P}(X_n \times X_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία διαδοχικών σχεδίων μεταφοράς. Υπάρχει τότε Borel μέτρο $\pi_\infty \in \mathbb{P}\mathbf{X}_\infty$, τ.ω.*

$$p_*^{n,n+1}\pi_\infty = \pi^{n,n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{8.17}$$

όπου $p^F : \mathbf{X}_\infty \longrightarrow \prod_{i\in F} X_i$ είναι η φυσική προβολή για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$.

Απόδειξη Θέτουμε $Y_n := \mathrm{supp}\mu_n$, μ'_n τον περιορισμό του μ_n στον Y_n και π'_n τον περιορισμό του $\pi_n = \pi^{n-1,n}$ στον $Y_{n-1} \times Y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε επίσης $\Pi'_n := \widetilde{\circ}_{i=1}^{n}\pi'_i$ και θέτουμε $r^n : \mathbf{Y}_\infty \longrightarrow X_n$ και $q^n : \mathbf{Y}_\infty \longrightarrow Y_n$ τους περιορισμούς των προβολών p^n στον $\mathbf{Y}_\infty := \prod_{i=1}^\infty Y_i$. Παρατηρούμε ότι αν $i^n : Y_n \hookrightarrow X_n$ είναι η ένθεση, τότε $r^n = i^n \circ q^n$ και $\pi_n = (i^{n-1} \times i^n)_*\pi'_n$. Επίσης, θέτουμε $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και για κάθε $H \subseteq F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ θέτουμε $q_F^H : \prod_{i\in F} Y_i \longrightarrow \prod_{i\in H} Y_i$ τη φυσική προβολή. Από τις ιδιότητες της συγκόλλησης, ξέρουμε ότι $(\Delta_{i=1}^{n-1} q^i)_*\Pi'_n = \Pi'_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι η οικογένεια

$$\left\{ (q^F_{\{1,\ldots,\max F\}})_*\Pi'_{\max F} \,\middle|\, F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

είναι προβολική και, άρα, από το θεώρημα του Kolmogorov (δείτε παραδείγματος χάριν τα [5] ή [2]) έπεται ότι υπάρχει $\pi'_\infty \in \mathbb{P}\mathbf{Y}_\infty$ τ.ω.

$$(q^F)_*\pi'_\infty = (q^F_{\{1,\ldots,\max F\}})_*\Pi'_{\max F},$$

για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \mathbb{N}$, όπου $q^F := \mathbf{Y}_\infty \longrightarrow \prod_{i\in F} Y_i$ είναι η φυσική προβολή. Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$q_*^{n,n+1}\pi'_\infty = \left(q^{\{n,n+1\}}_{\{1,\ldots,n+1\}}\right)_*\Pi'_{n+1} = \pi'_{n+1}.$$

Προφανώς αν $i^\infty : \mathbf{Y}_\infty \hookrightarrow \mathbf{X}_\infty$ είναι η φυσική ένθεση, τότε το μέτρο $\pi_\infty = i_*^\infty\pi'_\infty$ ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα, αφού $(i^n \times i^{n+1}) \circ q^{n,n+1} = p^{n,n+1} \circ i^\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα

$$p_*^{n,n+1}\pi_\infty = p_*^{n,n+1}(i_*^\infty\pi'_\infty) = (i^n \times i^{n+1})_*(q_*^{n,n+1}\pi'_\infty) = (i^n \times i^{n+1})_*\pi'_n = \pi_n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

8.3 Οι Μετρικές του Wasserstein

Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $p^i : X \times X \longrightarrow X$, $i = 1, 2$ οι φυσικές προβολές. Σ' αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι για κάθε $1 \leq r < \infty$, η συνάρτηση $W_r : \mathbb{P}X \times \mathbb{P}X \longrightarrow [0, \infty)$ με τύπο

$$\begin{aligned} W_r(\mu,\nu) &= \mathcal{I}_{d^r}(\mu,\nu)^{\frac{1}{r}} = \inf\left\{\int_{X\times X} d(x,y)^r d\pi(x,y) \big| \, \pi \in \Pi(\mu,\nu)\right\}^{\frac{1}{r}} \qquad (8.18) \\ &= \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \|d\|_{L^r(\pi)} = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} d_{L^r(\pi;X)}(p^1,p^2), \end{aligned}$$

ορίζει μετρική στο σύνολο όλων των σφικτών Borel μέτρων πιθανότητας με πεπερασμένη κεντρική r-οστή ροπή στον X και θα μελετήσουμε τις βασικές τοπολογικές ιδιότητες των μετρικών W_r.

Πρόταση 8.3.1 *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος. Για κάθε $r \in [1, \infty)$, η συνάρτηση W_r που ορίζεται από την (8.18) είναι μετρική στο $\mathbb{P}_r^T X$.*

Απόδειξη Έστω $1 \leq r < \infty$. Προφανώς η W_r είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη. Επίσης, ο περιορισμός της στο $\mathbb{P}_r X$ παίρνει πεπερασμένες τιμές, αφού αν $\mu, \nu \in \mathbb{P}_r X$ και $x_0 \in X$, τότε για κάθε $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_r^r(\mu,\nu) &= \int_{X\times X} d(x,y)^r d\pi(x,y) \leq 2^{r-1}\int_{X\times X} \big(d(x,x_0)^r + d(x_0,y)^r\big) d\pi(x,y) \\ &= 2^{r-1}\int_X d(x,x_0)^r d\mu(x) + 2^{r-1}\int_X d(x_0,x)^r d\nu(x) < \infty \end{aligned}$$

Έστω, τώρα, $\mu \in \mathbb{P}_r X$ και έστω $\pi := (id, id)_*\mu \in \Pi(\mu, \mu)$ το ταυτοτικό σχέδιο μεταφοράς. Τότε

$$\int_{X\times X} d(x,y)^r d\pi(x,y) = \int_X d(x,x)^r d\mu(x) = 0,$$

και άρα $W_r(\mu, \mu) = 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{P}_r X$. Δείχουμε τώρα ότι η W_r ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Έστω, λοιπόν, $\mu, \rho, \nu \in \mathbb{P}_r X$. Από την πρόταση 7.1.1 υπάρχουν βέλτιστα σχέδια μεταφοράς $\pi \in \Pi_{d^r}(\mu, \rho)$ και $\tau \in \Pi_{d^r}(\rho, \nu)$. Έστω $\tau \widetilde{\circ} \pi$ η συγκόλληση των π και τ κατά μήκος της κοινής κατανομής τους ρ. Τότε

$$\begin{aligned} W_r(\mu,\nu) &\leq \|d\|_{L^r(\tau\circ\pi)} = \|d\circ p^{1,3}\|_{L^r(\tau\widetilde{\circ}\pi)} \leq \|d\circ p^{1,2} + d\circ p^{2,3}\|_{L^r(\tau\widetilde{\circ}\pi)} \\ &\leq \|d\circ p^{1,2}\|_{L^r(\tau\widetilde{\circ}\pi)} + \|d\circ p^{2,3}\|_{L^r(\tau\widetilde{\circ}\pi)} \\ &= \|d\|_{L^r(\pi)} + \|d\|_{L^r(\tau)} = W_r(\mu,\rho) + W_r(\rho,\nu). \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε, τέλος, ότι αν $W_r(\mu, \nu) = 0$, τότε $\mu = \nu$. Έστω, λοιπόν, $\mu, \nu \in \mathbb{P}_r X$ τ.ω. $W_r(\mu, \nu) = 0$ και έστω $\pi \in \Pi_{d^r}(\mu, \nu)$ βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς. Τότε $d = 0$ π-σ.π. και άρα $\mathrm{supp}\pi \subseteq \Delta := \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$. Όμως τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι

$$\mu(A) = \pi(A\times X) = \pi\big((A\times X)\cap\Delta\big) = \pi\big((X\times A)\cap\Delta\big) = \pi(X\times A) = \nu(A),$$

και άρα $\mu = \nu$ όπως θέλαμε. □

Σημειώνουμε ότι η ένθεση $\delta : X \longrightarrow \mathbb{P}_r X$ του Dirac είναι ισομετρική ένθεση για κάθε $1 \leq r < \infty$. Στην επόμενη πρόταση εξετάζουμε τη συμπεριφορά των μετρικών W_r καθώς το r μεταβάλεται στο $[1, \infty)$.

Πρόταση 8.3.2 *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος. Τότε για κάθε $1 \leq r \leq s < \infty$ έχουμε ότι $W_r \leq W_s$. Αν επιπλέον η d είναι φραγμένη, τότε $W_s^s \leq W_r^r \mathrm{diam}(X)^{s-r}$. Ειδικότερα, όταν ο X είναι φραγμένος, όλες οι μετρικές του* Wasserstein *ορίζουν την ίδια τοπολογία στο $\mathbb{P}_r^T X = \mathbb{P}^T X$.*

Απόδειξη Για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{P}_r X$ και κάθε $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ έχουμε ότι $W_r(\mu, \nu) \leq \|d\|_{L^r(\pi)} \leq \|d\|_{L^s(\pi)}$. Παίρνοντας infimum πάνω από όλα τα $\Pi(\mu, \nu)$ αποδεικνύεται η πρώτη ανισότητα. Αν τώρα η d είναι επιπλέον φραγμένη, έπεται εύκολα ότι

$$d^s(x, y) \leq \mathrm{diam}(X)^{s-r} d^r(x, y),$$

για κάθε $x, y \in X$. Συνεπώς για κάθε $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ έχουμε ότι

$$W_s^s(\mu, \nu) \leq \int d^s(x, y) d\pi(x, y) \leq \mathrm{diam}(X)^{s-r} \int d^r(x, y) d\pi(x, y).$$

Παίρνοντας infimum πάνω από όλα τα σχέδια μεταφοράς $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. □

Λίγο παρακάτω σε αυτή την παράγραφο, θα δούμε ότι όταν η d είναι φραγμένη, η τοπολογία που ορίζουν οι μετρικές του Wasserstein στο $\mathbb{P}^T X$ είναι η ασθενής τοπολογία. Ειδικότερα, η ασθενής τοπολογία στον $\mathbb{P}^T X$ είναι μετρικοποιήσιμη όταν ο X είναι πλήρης.

Το θεώρημα δυισμού του Kantorovich μας δίνει την ακόλουθη έκφραση της μετρικής του Wasserstein W_1, από την οποία έπεται ότι η W_1 επάγεται από νόρμα στον $\mathcal{M}_1^T(X)$.

Θεώρημα 8.3.1 (Kantorovich-Rubinstein) *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\mu, \nu \in \mathbb{P}_1^T X$. Τότε*

$$W_1(\mu, \nu) = \sup\left\{ \int_X \phi d(\mu - \nu) \,\Big|\, \mathrm{Lip}(\phi) \leq 1 \right\}. \tag{8.19}$$

Επιπλέον, η τιμή του παραπάνω supremum δεν αλλάζει αν απαιτήσουμε από τις συναρτήσεις ϕ πάνω από τις οποίες παίρνουμε το supremum να είναι φραγμένες.

Απόδειξη Για απλότητα στο συμβολισμό, θέτουμε $R_1(\mu, \nu)$ το supremum στην (8.19) και θέτουμε

$$R_0(\mu, \nu) := \sup\left\{ \int_X \phi d(\mu - \nu) \,\Big|\, \phi \in B(X),\ \mathrm{Lip}(\phi) < 1 \right\}.$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $W_1(\mu, \nu) \geq R_1(\mu, \nu)$. Έστω $\mathrm{Lip}_1(X)$ το σύνολο όλων των Lipschitz συναρτήσεων $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\mathrm{Lip}(\phi) \leq 1$. Αφού $\mu, \nu \in \mathbb{P}_1^T X$, για κάθε $\phi \in \mathrm{Lip}_1(X)$ και κάθε σχέδιο $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, έχουμε ότι $\phi \oplus (-\phi) \in L^1(\pi)$ και

$$\begin{aligned} \int_X \phi d(\mu - \nu) &= \int_X \phi d\mu - \int_X \phi d\nu = \int_{X \times X} (\phi(x) - \phi(y)) d\pi(x, y) \\ &\leq \int_{X \times X} \rho(x, y) d\pi(x, y). \end{aligned}$$

Παίρνοντας πρώτα το infimum πάνω από όλα τα σχέδια $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ και έπειτα το supremum πάνω από όλες τις $\phi \in \mathrm{Lip}_1(X)$, παίρνουμε ότι

$$R_0(\mu,\nu) \leq R_1(\mu,\nu) \leq W_1(\mu,\nu).$$

Δείχνουμε τώρα ότι αρκεί να δείξουμε την ανισότητα $W_1(\mu,\nu) \leq R_0(\mu,\nu)$ στην περίπτωση όπου η d είναι φραγμένη. Θεωρούμε την ακολουθία $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τύπο

$$d_n = \frac{d}{1+n^{-1}d} = \frac{nd}{n+d} \leq n.$$

Προφανώς η (d_n) αυξάνει κατά σημείο στη d. Επιπλέον, κάθε d_n είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τη d. Αφού $d_n \leq d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\mathrm{Lip}_{d_n,1}(X)$ όλων των d_n-Lipschitz συναρτήσεων $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\mathrm{Lip}_{d_n}(\phi) \leq 1$ περιέχεται στο $\mathrm{Lip}_1(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} R_0^n(\mu,\nu) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup \left\{ \int_X \phi d(\mu-\nu) \,\Big|\, \phi \in B(X),\ \mathrm{Lip_{d_n}}(\phi) \leq 1 \right\} \leq R_0(\mu,\nu).$$

Όμως, όπως στο τρίτο βήμα της απόδειξης του θεωρήματος δυισμού του Kantorovich, έπεται ότι $W_1(\mu,\nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{d_n}(\mu,\nu)$, και συνεπώς αν δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τις d_n, δηλαδή ότι $\mathcal{I}_{d_n}(\mu,\nu) \leq R_0^n(\mu,\nu)$, τότε έπεται ότι

$$W_1(\mu,\nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{d_n}(\mu,\nu) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} R_0^n(\mu,\nu) \leq R_0(\mu,\nu),$$

όπως θέλουμε. Συνεπώς, στο υπόλοιπο της απόδειξης μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι η d είναι επιπλέον φραγμένη.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Kantorovich, αυτό που έχουμε να αποδείξουμε είναι ότι

$$\sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_d(\mu,\nu)} \mathcal{J}(\phi,\psi) \leq R_0(\mu,\nu).$$

Αυτό όμως έπεται εύκολα συνδυάζοντας την παρατήρηση 7.2.1 με το ότι η d είναι φραγμένη, οι συναρτήσεις $d(x,\,\cdot\,), d(\,\cdot\,,y)$, $(x,y) \in X\times Y$ είναι 1-Lipschitz και το λήμμα 7.2.3.$\square$

Το θεώρημα Kantorovich-Rubinstein μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι η μετρική W_r μετρικοποιεί την r-οστή τοπολογία του Wasserstein w_r στον $\mathbb{P}_r^T X$ για κάθε $1 \leq r < \infty$.

Θεώρημα 8.3.2 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Η μετρική του Wasserstein W_r, μετρικοποιεί την r-οστή τοπλογία του Wasserstein στο $\mathbb{P}_r^T X$, για κάθε $1 \leq r < \infty$.*

Απόδειξη Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η σύγκλιση ως προς τη μετρική του Wasserstein συνεπάγεται τη σύγκλιση ως προς την r-οστή τοπολογία του Wasserstein. Έστω (μ_n) ακολουθία στον $\mathbb{P}_r^T X$ και έστω $\mu \in \mathbb{P}_r^T X$. Σύμφωνα με το θεώρημα 6.4.1, για να δείξουμε ότι η (μ_n) συγκλίνει στο μ ως προς την r-οστή τοπολογία του Wasserstein, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς και ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X d^r(x,x_0)d\mu_n(x) \leq \int_X d^r(x,x_0)d\mu(x). \tag{8.20}$$

Η ασθενής σύγκλιση της (μ_n) αποδεικνύεται εύκολα. Πράγματι, αφού $W_1 \leq W_r$ για κάθε $1 \leq r < \infty$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η σύγκλιση ως προς τη W_1 συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση. Όμως από το θεώρημα Kantorovich-Rubinstein έπεται ότι αν $W_1(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$, τότε $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$ για κάθε $f \in BL(X)$ και, όπως ξέρουμε, η ασθενής τοπολογία στο $\mathbb{P}X$ συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία που επάγεται από την $BL(X)$. Συνεπώς $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς. Για την απόδειξη της (8.20), χρησιμοποιούμε την ακόλουθη στοιχειώδη ανισότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C_\varepsilon = C_{\varepsilon,r} > 0$ τ.ω.

$$(a+b)^r \leq (1+\varepsilon)a^r + C_\varepsilon b^r,$$

για κάθε $a, b \geq 0$. Συνδυάζοντας αυτό με την τριγωνική ανισότητα βλέπουμε ότι

$$d^r(x_0, x) \leq (1+\varepsilon)d^r(x_0, y) + C_\varepsilon d^r(x, y),$$

για κάθε $x_0, x, y \in X$, $\varepsilon > 0$. Έστω $\pi_n \in \Pi_r(\mu_n, \mu)$ σχέδιο μεταφοράς. Από τις ιδιότητες προβολής ων σχεδίων π_n, αυτή η ανισότητα μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\int_X d^r(x, x_0) d\mu_n(x) &= \int_X d^r(x, x_0) d\pi_n(x) \\
&\leq (1+\varepsilon) \int_X d^r(x_0, y) d\mu(x) + C_\varepsilon \int_X d^r(x, y) d\pi_n(x) \\
&= (1+\varepsilon) \int_X d^r(x_0, y) d\mu(x) + C_\varepsilon W_r^r(\mu_n, \mu).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X d^r(x, x_0) d\mu_n(x) \leq (1+\varepsilon) \int_X d^r(x, x_0) d\mu(x),$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο αυτό μας δίνει την (8.20).

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η σύγκλιση ως προς την r-οστή τοπολογία του Wasserstein συνεπάγεται σύγκλιση ως προς την r-οστή μετρική του Wasserstein. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να το αποδείξουμε αυτό με την επιπλέον υπόθεση ότι η d είναι φραγμένη. Πράγματι, έστω ότι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο για φραγμένες μετρικές και έστω (μ_n) ακολουθία στον $\mathbb{P}_r X$ που συγκλίνει στο $\mu \in \mathbb{P}_r X$ ως προς την r-οστή τοπολογία του Wasserstein. Θεωρούμε στον X τη μετρική $\widetilde{d} := d \wedge 1$. Αφού ο ισχυρισμός ισχύει για φραγμένες μετρικές, ισχύει για τη μετρική $\widetilde{W}_r$ που επάγεται στον $\mathbb{P}_r X$ από τη $\widetilde{d}$. Για την απόδειξη του ότι $W_r(\mu_n, \nu) \longrightarrow 0$, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλοθη ανισότητα: για κάθε $R > 0$ και κάθε $x, y, x_0 \in X$,

$$d(x,y) \leq d(x,y) \wedge R + 2d(x, x_0)\mathbb{1}_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})}(x) + 2d(y, x_0)\mathbb{1}_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})}(y), \qquad (8.21)$$

και το εξής πόρισμα της: υπάρχει σταθερά $C_r > 0$, π.χ. $C_r = 2^{3r-2}$, η οποία εξαρτάται μόνο από το r, τ.ω.

$$d^r(x,y) \leq C_r \Big(d^r(x,y) \wedge R^r + d^r(x, x_0)\mathbb{1}_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})}(x) + d^r(y, x_0)\mathbb{1}_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})}(y) \Big),$$

για κάθε $R \geq 1$ και κάθε $x, y, x_0 \in X$.

Έστω $\pi_n \in \Pi_{d^r}(\mu_n, \mu)$ βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς ως προς τη συνάρτηση κόστους d^r. Από την προηγούμενη ανισότητα, για κάθε $R \geq 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_r^r(\mu_n, \mu) &= \int d(x,y)\pi(x,y) \\ &\leq C_r \int d^r(x,y) \wedge R^r d\pi_n(x,y) + C_r \int_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})} d^r(x, x_0) d\pi_n(x,y) \\ &\quad + C_r \int_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})} d^r(x_0, y) d\pi_n(x,y) \\ &\leq C_r R^r \widetilde{W}_r^r(\mu_n, \mu) + C_r \int_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})} d^r(x, x_0) d\mu_n(x) \\ &\quad + C_r \int_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})} d^r(x_0, y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Συνεπώς, αφού ο ισχυρισμός ισχύει για φραγμένες μετρικές, αφήνοντας το $n \longrightarrow \infty$, παίρνουμε ότι για κάθε $R \geq 1$,

$$\limsup_{n \to \infty} W_r^r(\mu_n, \mu) \overset{C_r}{\lessapprox} \limsup_{n \to \infty} \int_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})} d^r(x, x_0) d\mu_n(x) + \int_{X \setminus D(x_0, \frac{R}{2})} d^r(x_0, y) d\mu(y).$$

Αφού $\mu_n \longrightarrow \mu$ ως προς την r-οστή τοπολογία του Wasserstein, η (μ_n) έχει ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη r-οστή ροπή και, συνεπώς, αφήνοντας το $R \longrightarrow \infty$, βλέπουμε ότι $W_r^r(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$, όπως θέλαμε. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι η d είναι επιπλέον φραγμένη, ας πούμε $d \leq 1$.

Επειδή, τώρα, η d είναι φραγμένη, όλες οι μετρικές του Wasserstein είναι ισοδυνάμες στο $\mathbb{P}_r X = \mathbb{P} X$, και άρα από το θεώρημα Kantorovich-Rubinstein βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sup_{\mathrm{Lip}(\phi) \leq 1} \int \phi d(\mu_n - \mu) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8.22}$$

Έστω x_0 τυχόν σημείο του X και έστω $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)$ το σύνολο όλων των Lipschitz συναρτήσεων ϕ στον X με $\mathrm{Lip}(\phi) \leq 1$ και $\phi(x_0) = 0$. Προφανώς, για να αποδείξουμε την (8.22), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sup_{\phi \in \mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)} \int \phi d(\mu_n - \mu) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8.23}$$

Αφού $\mu_n \overset{w_r}{\longrightarrow} \mu$, έπεται ότι $\mu_n \longrightarrow \mu$ ασθενώς. Συνεπώς, από το θεώρημα του Prokhorov, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων του X τ.ω.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(X \setminus K_m) \leq \frac{1}{m} \quad \text{και} \quad \mu(X \setminus K_m) \leq \frac{1}{m},$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, τα μέτρα μ, μ_n, $n \in \mathbb{N}$, στηρίζονται όλα από το σ-συμπαγές σύνολο $K_\infty := \bigcup_{m=1}^\infty K_m$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 \in K_1$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$\big\{ \phi|_{K_m} \,\big|\, \phi \in \mathrm{Lip}_{1;x_0}(X) \big\},$$

είναι υποσύνολο του $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_m)$. Το σύνολο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_m)$ όμως είναι ομοιόμορφα 1-Lipschitz ως προς φραγμένη μετρική, και άρα από το θεώρημα του Ascoli το σύνολο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_m)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(K_m)$, (ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης), για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, κάθε ακολουθία στο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_m)$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_m)$. Με ένα διαγώνιο επιχείρημα θα αποδείξουμε το εξής: Κάθε ακολουθία (ϕ_n) στο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)$ έχει υπακολουθία, η οποία συγκλίνει σε κάποια Lipschitz συνάρτηση ϕ ορισμένη στον X, ομοιόμορφα σε κάθε K_m.

Έστω, λοιπόν, (ϕ_n) ακολουθία στο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)$. Θέτουμε $\Phi_m^n := \phi_n|_{K_m}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(\Phi_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $(\Phi_1^{(1,n)})_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $\Phi_1 \in \mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_1)$. Η ακολουθία $(\Phi_2^{(1,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ με τη σειρά της, έχει περαιτέρω υπακολουθία $(\Phi_2^{(2,n)})_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει σε κάποια $\Phi_2 \in \mathrm{Lip}_{1;x_0}(K_2)$. Παρατηρούμε ότι υποχρεωτικά $\Phi_2|_{K_1} = \Phi_1$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπακολουθία $(\Phi_m^{(m,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ της (Φ_m^n) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_m σε κάποια 1-Lipschitz φραγμένη συνάρτηση Φ_m, έτσι ώστε η $\{(m,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι υπακολουθία της $\{(m-1,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\Phi_m|_{K_{m-1}} = \Phi_{m-1}$. Αφού η Φ_m επεκτείνει την Φ_{m-1} στο K_m για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση $\phi_\infty : K_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi_\infty(x) = \Phi_m(x), \quad \text{αν} \quad x \in K_m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{N},$$

είναι καλά ορισμένη. Θα αποδείξουμε ότι η υπακολουθία $(\phi_{(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ της (ϕ_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην ϕ_∞ στο K_m, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αφού η $\big(\phi_{(n,n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα 1-Lipschitz ως προς την $d \le 1$, αυτό συνεπάγεται ότι η ϕ_∞ είναι επίσης 1-Lipschitz και φραγμένη από το 1.

Έστω, λοιπόν, $m \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $(\phi_{(n,n)}|_{K_m})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην Φ_m. Για κάθε $n \ge m$, έχουμε ότι $K_m \subseteq K_n$, και άρα

$$\phi_{(n,n)}|_{K_m} = \big(\phi_{(n,n)}|_{K_n}\big)|_{K_m} = \Phi_n^{(n,n)}|_{K_m}.$$

Όμως η $\{\Phi_n^{(n,n)}\}_{n=m}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\Phi_m^{(m,n)}$, και έτσι από τους ορισμούς,

$$\Phi_m^{(m,n)}|_{K_m} = \Phi_m^{(m,n)} \longrightarrow \Phi_m,$$

ομοιόμορφα στο K_m. Ως τώρα έχουμε κατασκευάσει υπακολουθία $(\phi_{(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\phi_\infty : K_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$, σε κάθε K_m. Το ότι η $(\phi_{(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μία 1-Lipschitz συνάρτηση που ορίζεται σε όλον τον X, ομοιόμορφα σε κάθε K_m, έπεται από το γεγονός ότι κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου X, επεκτείνεται σε 1-Lipschitz συνάρτηση $\widetilde{f}$ σε όλον τον X. Π.χ. στην $\widetilde{f}(x) = \inf_{y\in S}\big(f(y) + d(x,y)\big)$. Αν επεκτείνουμε λοιπόν την ϕ_∞ στην $\widetilde{\phi}_\infty$ στον X σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, έπεται ότι η υπακολουθία που κατασκευάσαμε συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε K_m, σε μία 1-Lipschitz συνάρτηση που ορίζεται σε όλον τον X. Τέλος, αφού οι ϕ_∞ και d είναι φραγμένες, η $\widetilde{\phi}_\infty$ είναι επίσης φραγμένη, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Τώρα, παρατηρούμε ότι για να αποδείξουμε την (8.23), αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της (μ_n), την οποία θα εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με (μ_n), έχει περαιτέρω υπακολουθία $(\mu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, τ.ω.

$$\sup_{\phi\in \mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)} \int \phi d(\mu_{k_n}-\mu) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8.24}$$

Έστω, λοιπόν, (μ_n) τυχούσα υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας μας. Επιλέγουμε ακολουθία (ϕ_n) στο $\mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)$, τ.ω.

$$\sup_{\phi\in \mathrm{Lip}_{1;x_0}(X)} \int \phi d(\mu_n-\mu) \leq \int \phi_n d(\mu_n-\mu) + \frac{1}{n},$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό μας στην (ϕ_n), βρίσκουμε υπακολουθία (ϕ_{k_n}) της (ϕ_n), η οποία συγκλίνει σε κάποια 1-Lipschitz συνάρτηση $\phi_\infty : X \longrightarrow \mathbb{R}$, ομοιόμορφα σε κάθε K_m. Θα δείξουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $(\mu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την (8.23), και γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\int \phi_{k_n} d(\mu_{k_n}-\mu) \longrightarrow 0$ καθώς $n\to\infty$. Έστω $\varepsilon>0$. Για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_X \phi_{k_n} d(\mu_{k_n}-\mu)\right| \;&\leq\; \left|\int_{K_m} (\phi_{k_n}-\phi_\infty) d(\mu_{k_n}-\mu)\right| + \left|\int_{K_m^c} (\phi_{k_n}-\phi_\infty) d(\mu_{k_n}-\mu)\right| \\ &\quad + \left|\int_X \phi_\infty d(\mu_{k_n}-\mu)\right|. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Αφού οι ϕ_n και η ϕ_∞ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, ας πούμε από κάποιον $C>0$, για κάθε σταθερό $m\in\mathbb{N}$, έπεται ότι ο δεύτερος όρος της δεξιάς πλευράς της παραπάνω ανισότητας είναι φραγμένος από τον $C\big(\mu_n(X\setminus K_m)+\mu(X\setminus K_m)\big)\leq 2C/m$. Επιπλέον, ο τρίτος όρος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο 0 καθώς $n\to\infty$, αφού $\mu_{k_n}\longrightarrow\mu$ ασθενώς. Τέλος, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ ξεχωριστά, ο πρώτος όρος συγκλίνει στο 0 καθώς $n\to\infty$, αφού η ϕ_{k_n} συγκλίνει ομοιόμορφα στην ϕ_∞ στο K_m. Συνεπώς, επιλέγοντας $m_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $2C/m_0<\varepsilon$, και αφήνοντας το $n\to\infty$ στην (8.25), για $m=m_0$, παίρνουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_X \phi_{k_n} d(\mu_{k_n}-\mu)\right| \leq \varepsilon,$$

το οποίο, αφού το ε ήταν τυχαίο, αποδεικνύει ότι $W_1(\mu_n,\mu)\longrightarrow 0$ και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 8.3.1 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Τότε η ασθενής τοπολογία στο $\mathbb{P}^T X$ είναι μετρικοποιήσιμη.*

Απόδειξη Πράγματι, αφού η ασθενής τοπολογία στο $\mathbb{P}X$ εξαρτάται μόνο από την τοπολογία του X, και όχι από τη συγκεκριμένη μετρική d που την ορίζει, έπεται ότι οποιαδήποτε μετρική του Wasserstein που ορίζεται στον $\mathbb{P}^T X$ από τη μετρική $\widetilde{d} := d\wedge 1$, μετρικοποιεί την ασθενή τοπολογία. □

Πρόταση 8.3.3 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Τότε για κάθε $1\leq r<\infty$, ο $\mathbb{P}^T_r X$ είναι πλήρης ανν ο X πλήρης.*

Απόδειξη Από το πόρισμα 6.3.1 και το ότι η W_r μετρικοποιεί την r-οστή τοπολογία του Wasserstein έπεται ότι ο X είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{P}_r^T X$ για κάθε $1 \leq r < \infty$. Έτσι, αν ο $\mathbb{P}_r^T X$ είναι πλήρης τότε και ο X είναι πλήρης.

Έστω, αντίστροφα, (μ_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{P}_r^T X$. Προφανώς για να δείξουμε ότι η (μ_n) συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Μπορούμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_r(\mu_n, \mu_{n+1}) < \infty.$$

Έστω $\pi^{n,n+1} \in \Pi_{d^r}(\mu_n, \mu_{n+1})$ ακολουθία βέλτιστων σχεδίων μεταφοράς. Από το λήμμα 8.17, υπάρχει $\pi_\infty \in \mathbb{P}(X^{\mathbb{N}})$ τ.ω. $p_*^{n,n+1}\pi_\infty = \pi^{n,n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου φυσικά $p^{n,n+1} : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X \times X$ είναι η φυσική προβολή με τύπο $p^{n,n+1}\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) = (x_n, x_{n+1})$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{L^r(\pi_\infty;X)}(p^n, p^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{L^r(\pi^{n,n+1};X)}(p^n, p^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} W_r(\mu_n, \mu_{n+1}) < \infty,$$

όπου $p^n : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ είναι η προβολή στην n-οστή συντεταγμένη. Συνεπώς η ακολουθία (p^n) είναι ακολουθία Cauchy στον $L^r(\pi_\infty; X)$, ο οποίος είναι πλήρης χώρος, και άρα υπάρχει $p^\infty \in L^r(\pi_\infty; X)$ τ.ω. $p^n \longrightarrow p^\infty$ στον $L^r(\pi_\infty; X)$. Θα δείξουμε ότι $\mu_n \longrightarrow \mu := p_*^\infty \pi_\infty$ στον $\mathbb{P}_r^T X$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} W_r(\mu_n, \mu) &\leq \limsup_{n\to\infty} \|d\|_{L^r((p^n,p^\infty)_*\pi_\infty)} = \limsup_{n\to\infty} d_{L^r(\pi_\infty;X)}(p^n, p^\infty) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} d_{L^r(\pi_\infty;X)}(p^j, p^{j+1}) = 0,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από το ότι $p^n \longrightarrow p^\infty$ στον $L^r(\pi_\infty; X)$. □

Μία χρήσιμη ανισότητα που μας δίνει ένα άνω φράγμα για τη μετρική του Wasserstein από πάνω, δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.3.4 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $f, g : \Omega \longrightarrow X$* Borel *απεικονίσεις. Τότε,*

$$W_r(f_*P, g_*P) \leq d_{L^r(\Omega;X)}(f, g), \tag{8.26}$$

για κάθε $1 \leq r < \infty$.

Απόδειξη Προφανώς $(f,g)_*P \in \Pi(f_*P, g_*P)$ και συνεπώς για κάθε $1 \leq r < \infty$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
W_r^r(f_*P, g_*P) &\leq \int_{X\times Y} d^r(x,y)\, d(f,g)_*P(x,y) \\
&= \int_\Omega d^r(f(\omega), g(\omega))\, dP(\omega) = d^r_{L^r(\Omega;X)}(f,g).
\end{aligned}$$
□

8.4 Βασικές Γεωμετρικές Ιδιότητες των Μετρικών του Wasserstein

Αφού η μετρική του Wasserstein ορίζεται μέσω της ελαχιστοποίησης του κόστους ως προς κάποια συνάρτηση απόστασης d, είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι οι γεωδαισιακές της μετρικής του Wasserstein θα σχετίζονται με τις γεωδαισιακές της d.

Πρόταση 8.4.1 *Έστω X γεωδαισιακός χώρος και έστω $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{P}_r X$. Έστω ότι υπάρχει οικογένεια $(H_t)_{0\leq t\leq 1}$ Borel μετρήσιμων απεικονίσεων $H_t : X \times X \longrightarrow X$, τ.ω. για κάθε $x, y \in X$, η καμπύλη $(H_t(x,y))_{0\leq t\leq 1}$ να είναι γεωδαισιακή μεταξύ των $x, y \in X$. Τότε, για κάθε βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς $\pi \in \Pi_{d^r}(\mu_0, \mu_1)$, η καμπύλη $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}X$ με τύπο*

$$\gamma_t = (H_t)_* \pi,$$

είναι γεωδασιακή από το μ_0 στο μ_1 στον $\mathbb{P}_r X$, και για κάθε $0 \leq s \leq t \leq 1$, το σχέδιο μεταφοράς $(H_s, H_t)_*\pi \in \Pi(\gamma_s, \gamma_t)$ είναι d^r-βέλτιστο.

Απόδειξη Έστω $\pi \in \Pi_{d^r}(\mu, \nu)$ βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς και έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}_r X$ η καμπύλη με τύπο $\gamma(t) = H_{t*}(\pi)$. Αφού οι H_0, H_1 είναι οι φυσικές προβολές, προφανώς $\gamma_0 = \mu_0$, $\gamma_1 = \mu_1$. Ελέγχουμε πρώτα ότι η εικόνα της περιέχεται στον $\mathbb{P}_r X$. Για κάθε $0 \leq t \leq 1$, το $(p^1, H_t)_*\pi \in \Pi(\gamma_0, \gamma_t)$ είναι σχέδιο μεταφοράς του γ_0 στο γ_t, και συνεπώς,

$$\begin{aligned}
W_r^r(\gamma_0, \gamma_t) &= W_r^r(\gamma_0, H_{t*}\pi) \leq \int d^r(x,y) d(p^1, H_t)_*\pi(x,y) \\
&= \int_{X\times Y} d^r\big(x, H_t(x,y)\big) d\pi(x,y) \\
&= t^r \int_{X\times Y} d^r(x,y) d\pi(x,y) = t^r W_r^r(\mu_0, \mu_1) < \infty.
\end{aligned}$$

Το γ_t απέχει πεπερασμένη απόσταση από το $\mu_0 \in \mathbb{P}_r X$, και άρα απέχει πεπερασμένη απόσταση και από κάποιο μέτρο Dirac δ_{x_0}, $x_0 \in X$. Όμως $\Pi(\delta_{x_0}, \gamma_t) = \{\delta_{x_0} \otimes \gamma_t\}$, και, άρα, το γ_t έχει πεπερασμένη r-οστή κεντρική ροπή, αφού

$$\begin{aligned}
+\infty > W_r^r(\delta_{x_0}, \gamma_t) &= \int_X \int_X d^r(x,y) d\delta_{x_0}(y) \gamma_t(y) \\
&= \int_X d^r(x_0, x) d\gamma_t(x).
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η γ είναι γεωδαισιακή. Για κάθε $s, t \in [0,1]$, προφανώς $(H_s, H_t)_*\pi \in \Pi(\gamma_s, \gamma_t)$, και άρα

$$\begin{aligned}
W_r^r(\gamma_s, \gamma_t) &= W_r^r(H_{s*}\pi, H_{t*}\pi) \leq \int d^r(x,y) d(H_s, H_t)_*\pi(x,y) \\
&= \int_{X\times Y} d^r\big(H_t(x,y), H_s(x,y)\big) d\pi(x,y) \\
&= |t-s|^r \int_{X\times Y} d^r(x,y) d\pi(x,y) = |t-s|^r W_r^r(\mu_0, \mu_1),
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι η γ είναι γεωδαισιακή από το μ_0 στο μ_1. Τέλος, αφού όλες οι ανισότητες είναι ισότητες, έπεται ότι το $(H_s, H_t)_*\pi$ είναι d^r-βέλτιστο. $\square$

Παραδείγματα

1. Έστω X γεωδαισιακός χώρος τ.ω. να υπάρχει οικογένεια $(H_t)_{0\leq t\leq 1}$ Borel-μετρήσιμων απεικονίσεων $H_t : X \times X \longrightarrow X$, τ.ω. για κάθε $x, y \in X$ η καμπύλη $(H_t(x,y))_{0\leq t\leq 1}$ να είναι γεωδαισιακή από το $x \in X$ στο $y \in X$ και έστω $\mu_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \mu_1 = \sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \in \mathbb{P}_r X$. Από την πρόταση 7.1.2, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S(n)$ τ.ω. το σχέδιο $\Gamma := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_{\sigma(i)})} \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ να είναι βέλτιστο. Έτσι, από την παραπάνω πρόταση, αν $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow X$ είναι η γεωδαισιακή $\big(H_t(x_i, y_{\sigma(i)})\big)_{0\leq t\leq 1}$, $i = 1, \ldots, n$, τότε η καμπύλη $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}_r X$ με τύπο

$$\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta \circ \gamma_i,$$

είναι γεωδαισιακή στο $\mathbb{P}_r X$, από το μ_0 στο μ_1.

Φυσικά, το αντίστροφο της πρότασης 8.4.1 δεν ισχύει εν γένει, όπως δείχνει η περίπτωση $r = 1$. Πράγματι, επειδή η μετρική W_1 επάγεται από νόρμα, η καμπύλη $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)\delta_x + t\delta_y \in \mathbb{P}_1 X$ είναι γεωδαισιακή στον $\mathbb{P}_1 X$ από το x στο y, ενώ αν το αντίστροφο ήταν αληθές, τότε κάθε γεωδαισιακή που θα συνέδεε τα $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{P}_1 X$ θα ήταν της μορφής $\delta \circ \gamma$ για κάποια γεωδαισιακή στον X· και είναι προφανές ότι η $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)\delta_x + t\delta_y$ δεν μπορεί να είναι αυτής της μορφής. Αυτό δείχνει, επίσης, ότι το $X = \delta(X)$ δεν είναι ισχυρά κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{P}_1 X$, ακόμη και αν ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός. Ωστόσο, όπως θα δούμε, για $1 < r < \infty$, η r-οστή μετρική του Wasserstein σέβεται περισσότερο τη γεωμετρία του X. Π.χ. αν $1 < r < \infty$ και ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, τότε ο X είναι ισχυρά κυρτό υποσύνολο του X. Επίσης, με την επιπλέον υπόθεση ότι οι γεωδαισιακές του X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, μπορούμε να αποδείξουμε το αντίστροφο της πρότασης 8.4.1. Και τα δύο αυτά αποτελέσματα βασίζονται στο ακόλουθο λήμμα, του οποίου το πρώτο μέρος βρίσκεται στο [15].

Λήμμα 8.4.1 *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος, $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}_r X$, $1 < r < \infty$, γεωδαισιακή και $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ διαμέριση του $[0,1]$. Έστω*

$$\Gamma^{i,i+1} \in \Pi_{d^r}\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\big), \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

μία ακολουθία διαδοχικών βέλτιστων σχεδίων μεταφοράς. Θέτουμε $\widetilde{\Gamma} := *_{i=1}^{n-1} \Gamma^{i-1,i} \in \Pi(\gamma_{t_0}, \ldots, \gamma_{t_n})$. Τότε, για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$,

$$d(p^i, p^j) = |t_j - t_i| d(p^0, p^n), \quad \widetilde{\Gamma} - \sigma.\pi. \tag{8.27}$$

Ειδικότερα, για κάθε $i \neq j \in \{0, \ldots, n\}$, το σχέδιο $(p^i, p^j)_* \widetilde{\Gamma} \in \Pi(\gamma(t_i), \gamma(t_j))$ είναι d^r-βέλτιστο.

Αν, επιπλέον, ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός και οι γεωδαισιακές του εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, τότε

$$(H_{t_j})_* \Gamma = \gamma(t_j), \quad \forall\, j = 0, \ldots, n, \tag{8.28}$$

όπου $(H_t)_{0\leq t\leq 1}$ είναι η οικογένεια με τύπο $H_t(x,y) = [x,y](t)$.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $n = \mathrm{card}(\Delta) - 1$. Δείχνουμε πρώτα το ζητούμενο για $n = 2$. Έστω, λοιπόν, $t_0 = 0 < t_1 = t < t_2 = 1$ διαμέριση του $[0, 1]$. Για τη σαφέστερη παρουσίαση της απόδειξης, βολεύει να θεωρήσουμε τρία αντίτυπα του X με δείκτες $0, 1, 2$, και να θεωρούμε τα μέτρα $\gamma(0), \gamma(t), \gamma(1)$ ως μέτρα στους X_0, X_1, X_2, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον ορισμό της μετρικής του Wasserstein, τις ιδιότητες της συγκόλλησης μαζί με την τριγωνική ανισότητα της d, το ότι τα Γ^{01}, Γ^{12} είναι βέλτιστα και το ότι η γ είναι γεωδαισιακή, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} W_r(\gamma_0, \gamma_1) &\overset{(1)}{\leq} \left(\int d^r(p^0, p^2) d\,\Gamma \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int d^r(p^0, p^2) d\,\widetilde{\Gamma} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\overset{(2)}{\leq} \left(\int \left(d(p^0, p^1) + d(p^1, p^2) \right)^r d\,\widetilde{\Gamma} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\overset{(3)}{\leq} \left(\int d^r(p^0, p^1) d\,\Gamma^{01} \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int d^r(p^1, p^2) d\,\Gamma^{12} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= W_r(\gamma_0, \gamma_t) + W_r(\gamma_t, \gamma_1) = W_r(\gamma_0, \gamma_1). \end{aligned}$$

Συνεπώς όλες οι ανισότητες είναι ισότητες. Η ισότητα στην (1) δείχνει ότι το $\Gamma \in \Pi(\gamma_0, \gamma_1)$ είναι βέλτιστο. Από την ισότητα στη (2), έπεται ότι

$$d(p^0, p^2) = d(p^0, p^1) + d(p^1, p^2), \quad \widetilde{\Gamma} - \sigma.\pi.,$$

δηλαδή ότι το σύνολο όλων των τριάδων $(x_0, x_1, x_2) \in X_0 \times X_1 \times X_2$, για τις οποίες το x_1 δεν ανήκει σε *κάποια* γεωδαισιακή $[x_0, x_2]$ στον X, είναι $\widetilde{\Gamma}$-κενό σύνολο. Αφού $1 < r < \infty$, η L^r-νόρμα είναι αυστηρά κυρτή, και έτσι η ισότητα στην (3) συνεπάγεται ότι οι $d(p^0, p^1)$ και $d(p^1, p^2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στον $L^r(\widetilde{\Gamma})$. Υπάρχει, λοιπόν, $\lambda \geq 0$ τ.ω.

$$d(p^0, p^1) = \lambda d(p^1, p^2) = \frac{\lambda}{1+\lambda} d(p^0, p^2), \quad \widetilde{\Gamma} - \sigma.\pi.,$$

και αφού $W_r(\gamma_0, \gamma_t) = \|d(p^0, p^1)\|_{L^r(\widetilde{\Gamma})}$ $\|d(p^0, p^2)\|_{L^r(\widetilde{\Gamma})} = W_r(\gamma_0, \gamma_1)$, και η γ είναι γεωδαισιακή, έπεται εύκολα ότι $\frac{\lambda}{1+\lambda} = t$, όπως θέλουμε. Το επαγωγικό βήμα έπεται εύκολα από της ιδιότητες τις συγκόλλησης.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος του οποίου οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους. Έστω $t_i \in \Delta$. Εφαρμόζοντας την (8.27) για $i = 0, 1$ και $j = 1, \ldots, n$ και παίρνοντας υπόψιν ότι ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός, παίρνουμε ότι

$$d(p^0, p^j) = t_j d(p^0, p^n) = d(p^0, H_{t_j}(p^0, p^n)) \quad \widetilde{\Gamma} - \sigma.\pi.,$$

$$d(p^j, p^n) = (1 - t_j) d(p^0, p^n) = d(H_{t_j}(p^0, p^n) p^n), \quad \widetilde{\Gamma} - \sigma.\pi..$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$d_{L^r(\widetilde{\Gamma};\, X)}(p^0, p^j) = t_j d_{L^r(\widetilde{\Gamma};\, X)}(p^0, H_{t_j}(p^0, p^n)),$$
$$d_{L^r(\widetilde{\Gamma};\, X)}(p^j, p^n) = (1 - t_j) d_{L^r(\widetilde{\Gamma};\, X)}(H_{t_j}(p^0, p^n), p^n).$$

Όμως, αφου $1 < r < \infty$ και ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός του οποίου οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, ο $L^r(\widetilde{\Gamma}; X)$ είναι επίσης μονοσήμαντα γεωδαισιακός, και έτσι οι παραπάνω ισότητες συνεπάγονται ότι

$$p^j = H_{t_j}(p^0, p^n) \quad \text{στον } L^r(\widetilde{\Gamma}; X). \tag{8.29}$$

Συνεπώς, έπεται ότι

$$(H_{t_j})_*\Gamma = (H_{t_j})_*((p^0, p^n)_*\widetilde{\Gamma}) = H_{t_j}(p^0, p^n)_*\widetilde{\Gamma} = p^j_*\widetilde{\Gamma} = \gamma(t_j). \qquad \square$$

Πόρισμα 8.4.1 *Έστω X πλήρης μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος και $1 < r < \infty$. Η ένθεση $\delta : X \hookrightarrow \mathbb{P}_r X$ του Dirac είναι ολικά γεωδαισιακή εμβύθιση, δηλαδή το $X \equiv \delta(X)$ είναι ισχυρά κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{P}_r X$.*

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι αν οι γεωδαισιακές στον μονοσήμαντα γεωδαισιακό χώρο X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, τότε το αντίστροφο της πρότασης 8.4.1 ισχύει, δηλαδή ότι κάθε γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}_r X$ είναι της μορφής $\gamma_t = (H_t)_*\Gamma$, για κάποιο βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς $\Gamma \in \Pi(\gamma_0, \gamma_1)$. Το αποτέλεσμα αυτό έχει αποδειχθεί από τον McCann στο [11] στην περίπτωση $X = \mathbb{R}^n$ και στο [9] στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert.

Θεώρημα 8.4.1 *Έστω X μονοσήμαντα γεωδαισιακός χώρος του οποίου οι γεωδαισιακές εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους. Μία καμπύλη $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^T_r X$ είναι γεωδαισιακή ανν είναι της μορφής*

$$\gamma_t = (H_t)_*\Gamma,$$

για κάποιο βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς $\Gamma \in \Pi_{d^r}(\mu, \nu)$.

Απόδειξη Το ότι κάθε τέτοια καμπύλη είναι γεωδαισιακή έχει αποδειχθεί στην πρόταση 8.4.1. Αποδεικνύουμε, λοιπόν, το αντίστροφο. Έστω $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}_r X$ γεωδαισιακή. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $D_n := \{\frac{k}{2^n} \,|\, k = 0, \ldots, 2^n\}$, επιλέγουμε ακολουθία

$$\Gamma^{\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}} \in \Pi\left(\gamma\Big(\frac{k}{2^n}\Big), \gamma\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big)\right), \; k = 0, \ldots, 2^n - 1$$

διαδοχικών βέλτιστων σχεδίων μεταφοράς και θέτουμε

$$\Gamma_n := \Gamma^{\frac{2^n-1}{2^n}, 1} \circ \cdots \circ \Gamma^{0, \frac{1}{2^n}} \in \Pi(\gamma_0, \gamma_1).$$

Θέτουμε, επίσης, $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Από το προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι το Γ_n είναι βέλτιστο και ότι

$$(H_t)_*\Gamma_n = \gamma_t, \quad \forall\, t \in D_n.$$

Αφού όμως τα γ_0, γ_1 είναι σφικτά, το κλειστό σύνολο $\Pi_{d^r}(\gamma_0, \gamma_1)$ είναι σφικτό, και άρα υπάρχει υπακολουθία την οποία εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με Γ_n, η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\Gamma \in \Pi_{d^r}(\gamma_0, \gamma_1)$. Επειδή η H_t είναι συνεχής, είναι προφανές ότι $(H_t)_*\Gamma = \gamma_t$, για κάθε $t \in D$. Έτσι οι γεωδαισιακές $[0,1] \ni t \longrightarrow (H_t)_*\Gamma$ και γ συμπίπτουν στο πυκνό υποσύνολο D του $[0,1]$, και άρα ταυτίζονται. $\square$

Δείχνουμε, τέλος, ότι ο χώρος του Wasserstein που επάγεται από ένα πλήρη χώρο μήκους είναι πάντοτε χώρος μήκους.

Πρόταση 8.4.2 *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος. Αν ο X είναι χώρος μήκους, τότε και ο $\mathbb{P}_r^T X$ είναι χώρος μήκους.*

Απόδειξη Από την πρόταση 8.3.3 ο $\mathbb{P}_r^T X$ είναι πλήρης και, άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε ζευγάρι $\mu, \nu \in \mathbb{P}_r^T X$ έχει κάποιο ε-μέσο. Έστω, λοιπόν, $\mu, \nu \in \mathbb{P}_r^T X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού το σύνολο όλων των μέτρων της μορφής $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ είναι πυκνό στον $\mathbb{P}_r^T X$, υπάρχουν $\mu_0 = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}, \nu_0 = \sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \in \mathbb{P}_r X$, τ.ω.

$$W_r(\mu_0, \mu) \vee W_r(\nu_0, \nu) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επαναλαμβάνοντας κάποια σημεία στις αναπαραστάσεις των μ_0, ν_0, όπου χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = n = m \vee n$ και, έπειτα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι αρίθμηση των y_i είναι τέτοια ώστε

$$W_r^r(\mu_0, \nu_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^r(x_i, y_i).$$

Έστω $m_i \in X$ κάποιο $\varepsilon/3$-μέσο των x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$. Θα δείξουμε ότι το $m_0 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{m_i} \in \mathbb{P}_r X$ είναι ε-μέσο των μ, ν. Πράγματι,

$$\begin{aligned} W_r(\mu_0, m_0) &\le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^r(x_i, m_i)\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}d(x_i, y_i) + \frac{\varepsilon}{3}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^r(x_i, y_i)\right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\varepsilon}{3} \le \frac{1}{2}W_r(\mu_0, \nu_0) + \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι $W_r(\mu, m) \le \frac{1}{2}W_r(\mu, \nu) + \varepsilon$ και ομοίως $W_r(m, \nu) \le \frac{1}{2}W_r(\mu, \nu) + \varepsilon$. Συνεπώς ο $\mathbb{P}_r X$ είναι χώρος μήκους. □

Κεφάλαιο 9

Βαρύκεντρα σε $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρους

Έστω X χώρος Hilbert, (Ω, μ) χώρος μέτρου και $f \in L^1(\mu; X)$. Υπάρχει μοναδικό σημείο $\int f d\mu \in X$, το οποίο λέγεται το ολοκλήρωμα της f ως προς το μ, τ.ω.

$$\langle \int f d\mu, y\rangle = \int \langle f(x), y\rangle d\mu(x),$$

για κάθε $y \in X$. Πράγματι, το γραμμικό συναρτησοειδές $I_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $I_f(y) = \int \langle f(x), y\rangle d\mu(x)$ είναι προφανώς καλά ορισμένο, δηλαδή με πεπερασμένες τιμές. Επιπλέον είναι φραγμένο, αφού για κάθε $y \in X$, έχουμε ότι

$$|I_f(y)| = \left|\int \langle f(x), y\rangle d\mu(x)\right| \leq \int |\langle f(x), y\rangle| d\mu(x) \leq \left(\int |f| d\mu\right) |y|,$$

και άρα $\|I_f\| \leq \|f\|_1$. Συνεπώς, από το θεώρημα αναπράστασης του Riesz, το I_f παρίσταται από μοναδικό σημείο του X μέσω του ισομορφισμού $X \stackrel{iso}{=} X^*$, το οποίο συμβολίζουμε με $\int f d\mu$. Σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα, αυτή η έννοια διανυσματικής ολοκλήρωσης συμπεριφέρεται καλά ως προς τα μέτρα-εικόνα.

Πρόταση 9.0.3 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, $(\Omega', \mathcal{F}')$ μετρήσιμος χώρος, $T : \Omega \to \Omega'$ μετρήσιμη απεικόνιση και $f : \Omega' \longrightarrow X$ ισχυρά μετρήσιμη απεικόνιση με τιμές σε κάποιο χώρο* Hilbert. *Τότε $f \in L^1(T_*\mu)$ ανν $f \circ T \in L^1(\mu)$ και σ' αυτή την περίπτωση,*

$$\int f dT_*\mu = \int f \circ T d\mu.$$

Απόδειξη Εξ' ορισμού $f \in L^1(T_*\mu)$ ανν $\int |f| dT_*\mu < \infty$. Όμως $\int |f| dT_*\mu = \int |f \circ T| d\mu$ και άρα $f \in L^1(T_*\mu)$ ανν $f \circ T \in L^1(\mu)$. Επιπλέον, τα ολοκληρώματα $\int f dT_*\mu$ και $\int f \circ T d\mu$ είναι ίσα, αφού

$$\begin{aligned}\langle \int f dT_*\mu, y\rangle &= \int \langle f(\omega'), y\rangle dT_*\mu(\omega') \\ &= \int \langle f \circ T(\omega), y\rangle d\mu(\omega)\rangle = \langle \int f \circ T d\mu, y\rangle.\end{aligned}$$

για κάθε $y \in X$. □

Έστω μ μέτρο πιθανότητας και έστω $\phi \in L^2(\mu; X)$ (ισχυρά μετρήσιμη) τυχαία μεταβλητή. Η *μέση τιμή* $\mathbb{E}\phi$ της ϕ ορίζεται ως $\mathbb{E}\phi = \int \phi d\mu$. Όπως και στην περίπτωση πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, η μέση τιμή της ϕ χαρακτηρίζεται ως το σημείο για το οποίο πιάνεται η ελάχιστη L^2-απόσταση της ϕ από τον υπόχωρο του $L^2(\mu; X)$ που αποτελείται από τις σταθερές απεικονίσεις.

Πρόταση 9.0.4 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $\phi \in L^2(\Omega; X)$ ισχυρά μετρήσιμη απεικόνιση με τιμές στο χώρο* Hilbert *X. Τότε*

$$\mathbb{E}\|\phi - \mathbb{E}\phi\|^2 = \inf_{x \in X} \mathbb{E}\|\phi - x\|^2.$$

Απόδειξη Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}\|\phi - x\|^2 \geq \mathbb{E}\|\phi - \mathbb{E}\phi\|^2$ για κάθε $x \in X$. Έστω λοιπόν $x \in X$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\phi - x\|^2 - \mathbb{E}\|\phi - \mathbb{E}\phi\|^2 &= -2\mathbb{E}\langle \phi, x\rangle + \|x\|^2 + 2\mathbb{E}\langle \phi, \mathbb{E}\phi\rangle - \|\mathbb{E}\phi\|^2 \\
&= \|\mathbb{E}\phi\|^2 - 2\langle \mathbb{E}\phi, x\rangle + \|x\|^2 = \|\mathbb{E}\phi - x\|^2 \geq 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\phi \in L^1(\mu; X)$ ανν $\phi_*\mu \in \mathbb{P}_1^T X$ και ότι

$$\mathbb{E}\phi = \int_\Omega \phi d\mu = \int_X id_X d\phi_*\mu.$$

Επειδή θέλουμε η μέση τιμή $\mathbb{E}\phi$ μίας τυχαίας μεταβλητής $\phi : \Omega \longrightarrow X$ να ισούται με το βαρύκεντρο της κατανομής της $\phi_*\mu$, είναι φυσικό να ορίσουμε το *βαρύκεντρο* $b(p)$, ή αλλιώς $\mathbb{E}(p)$, του $p \in \mathbb{P}_1^T X$, ως

$$b(p) = \mathbb{E}(p) = \int_X id_X dp.$$

Πρόταση 9.0.5 *Η απεικόνιση $\mathbb{E} : \mathbb{P}_r X \longrightarrow X$, $1 \leq r < \infty$, με τύπο*

$$\mathbb{E}(p) = \int_X id_X dp,$$

είναι αφφινική και γραμμική ως προς τη συνέλιξη. Δηλαδή απεικονίζει γεωδαισιακές της μετρικής του W_r σε γραμμικά τμήματα, και για κάθε $p, q \in \mathbb{P}_r X$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(a_*p \oplus b_*q) = a\mathbb{E}(p) + b\mathbb{E}(q),$$

όπου ταυτίζουμε τον $a \in \mathbb{R}$ με την απεικόνιση $X \ni x \mapsto ax \in X$.

Απόδειξη Θα δείξουμε μόνο ότι η $\mathbb{E}$ είναι αφφινική. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από ένα απλό υπολογισμό με μέτρα εικόνα. Έστω $p, q \in \mathbb{P}_1 X$. Όπως ξέρουμε, κάθε W_r-γεωδαισιακή $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}_1 X$ που συνδέει τα $p, q \in \mathbb{P}_r^T$, είναι της μορφής $[0,1] \ni t \overset{\gamma_\pi}{\mapsto} G_{t*}\pi$ για κάποιο $\pi \in \Pi_{d^r}(p,q)$, όπου d είναι η μετρική που επάγεται στον X από το εσωτερικό του γινόμενο και $G_t : X \times X \longrightarrow X$ είναι η απεικόνιση με τύπο $G_t(x,y) = ty + (1-t)x$. Όμως για κάθε $\pi \in \Pi_{d^r}(p,q)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \circ \gamma_\pi(t) &= \int id_X d\gamma(t) = \int id_X dG_{t*}\pi = \int \big(tx + (1-t)y\big) d\pi(x,y) \\
&= t \int x d\pi(x,y) + (1-t) \int y d\pi(x,y) \\
&= t \int id_X dp + (1-t) \int id_X dq = t\mathbb{E}(p) + (1-t)\mathbb{E}(q),
\end{aligned}$$

και άρα η $\mathbb{E}\circ\gamma$ είναι το γεωδαισιακό τμημα στον X που συνδέει τα $\mathbb{E}(p), \mathbb{E}(q)$, για κάθε γεωδαισιακή στον X από το p στο q. $\square$

Ορισμός 9.0.1 Η διασπορά ενός μέτρου $p \in \mathbb{P}_1 X$ είναι ο αριθμός

$$\mathbb{V}(p) = \int_X \|id_X - \mathbb{E}p\|^2 dp = W_2^2(p, \delta_{\mathbb{E}p}).$$

Παρατηρούμε ότι αν $p \in \mathbb{P}_2 X$ τότε

$$\mathbb{V}(p) = \int_X \|id_X - \mathbb{E}p\|^2 dp = \inf_{y\in X} \int_X \|id_X - y\|^2 dp = \inf_{y\in X} W_2^2(p, \delta_y).$$

Με άλλα λόγια, το βαρύκεντρο ενός μέτρου $p \in \mathbb{P}_2 X$ είναι το σημείο του X για το οποίο πιάνεται η ελάχιστη W_2-απόσταση του Wasserstein του p από τον υπόχωρο $X \subseteq \mathbb{P}_2 X$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι αν ο X είναι πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος, τότε μέσω αυτής της οπτικής γωνίας, ορίζεται βαρυκεντρική προβολή $b : \mathbb{P}_1 X \longrightarrow X$ και μέση τιμή $\mathbb{E} : L^1(P; X) \longrightarrow X$, και θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες τους.

9.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες της Βαρυκεντρικής Προβολής και της Μέσης Τιμής

Έστω (X, d) πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Όπως ξέρουμε, η συνάρτηση $d(x, \cdot)^2$ είναι 1-κυρτή. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $p \in \mathbb{P}_2 X$ η συνάρτηση $X \ni z \mapsto \int_X d(x, z)^2 dp(x)$ είναι επίσης 1-κυρτή, και άρα από την πρόταση 3.1.5 το 1-κυρτό συναρτησοειδές $X \ni z \mapsto \int_X d(x, z)^2 dp(x)$ έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου και μπορούμε να ορίσουμε το βαρύκεντρο $b(p)$ του $p \in \mathbb{P}_2 X$ ως

$$b(p) = \operatorname*{argmin}_{z\in X} \int_X d(x, z)^2 dp(x).$$

Ωστόσο, με αυτό τον τρόπο το βαρύκεντρο ορίζεται άμεσα μόνο για μέτρα με πεπερασμένη δεύτερη κεντρική ροπή. Η ιδέα του Lutz Mattner να ελαχιστοποιούμε το συναρτησοειδές $\int \big(d(\cdot, x)^2 - d(x, y)^2\big) dp(x)$ αντί του $\int_X d(x, \cdot)^2 dp(x)$ σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε το βαρύκεντρο απευθείας για μέτρα στον $\mathbb{P}_1 X$.

Πρόταση 9.1.1 *Έστω X $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και έστω $y \in X$. Τότε για κάθε $z \in X$, η συνάρτηση $f_{y,z} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_{y,z}(x) = d(z, x)^2 - d(y, x)^2$ ανήκει στον $B_1(X)$. Για κάθε $p \in \mathbb{P}_1 X$, η συνάρτηση $F_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο*

$$F_y(z) = \int_X f_{y,z}(x) dp(x)$$

είναι 1-κυρτή και άρα υπάρχει μοναδικό σημείο ελαχίστου $z_y = \operatorname{argmin} F_y$ της F_y. Το σημείο αυτό είναι ανεξάρτητο του y· λέγεται το βαρύκεντρο του p και συμβολίζεται με $b(p)$. Επιπλέον, αν $p \in \mathbb{P}_2 X$, τότε $b(p) = \operatorname{argmin}_{z\in X} \int_X d(x, z)^2 dp(x)$.

Απόδειξη Ξεκινάμε αποδεικνύοντας πρώτα ότι $f_{y,z} \in B_1(X)$. Για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|f_{y,z}(x)| &= \big|d(z,x)^2 - d(y,x)^2\big| = \big|d(z,x) - d(y,x)\big|\big(d(z,x) + d(y,x)\big)\\ &\leq d(y,z)\big(d(z,x) + d(y,x)\big) \leq 2d(y,z)d(y,x) + d(y,z)^2,\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι $f_{y,z} \in \mathcal{E}_1(X)$.

Δείχνουμε τώρα ότι το F_y είναι 1-κυρτό. Έστω, λοιπόν, $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ γεωδαισιακή. Τότε

$$\begin{aligned}F_y(\gamma_t) &= \int_X \big(d(\gamma_t,x)^2 - d(y,x)^2\big)dp(x)\\ &\leq \int_X \Big((1-t)|\gamma_0 x|^2 + t|\gamma_1 x|^2 - |yx|^2\Big)dp(x) - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2\\ &= (1-t)\int_X |\gamma_0 x|^2 - |yx|^2 dp(x) + t\int_X |\gamma_1 x|^2 - |yx|^2 dp(x) - t(1-t)|\gamma_0\gamma_1|^2\\ &= (1-t)F_y(\gamma_0) + tF_y(\gamma_1) - t(1-t)d(\gamma_0,\gamma_1)^2\end{aligned}$$

και άρα το F_y είναι 1-κυρτό.

Έπειτα, παρατηρώντας ότι η $F_y - F_{y'}$ είναι σταθερή για κάθε $y, y' \in X$, εύκολα βλέπουμε ότι το μοναδικό στοιχείο ελαχίστου της F_y είναι ανεξάρτητο του y. Τέλος, για κάθε μέτρο στον $\mathbb{P}_2 X$ αυτός ο νέος ορισμός των βαρύκεντρων συμπίπτει με τον αρχικό. Πράγματι, αν $p \in \mathbb{P}_2 X$, τότε οι συναρτήσεις F_y και $X \ni z \mapsto \int_X d(z,x)^2 dp(x)$ διαφέρουν κατά τη σταθερά $\int_X d(y,x)^2 dp(x)$, το οποίο δείχνει ότι $b(p) = \inf_{z\in X} \int_X d(z,x)^2 dp(x)$. □

Ορισμός 9.1.1 Έστω X $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Η βαρυκεντρική προβολή στον X είναι η απεικόνιση $b : \mathbb{P}_1 X \longrightarrow X$ με τύπο

$$b(p) = \operatorname*{argmin}_{z\in X} \int_X \big(d^2(z,x) - d^2(y,x)\big)dp(x),$$

για κάποιο $y \in X$.

Χρησιμοποιώντας την έννοια των βαρύκεντρων μπορούμε να ορίσουμε τη μέση τιμή τυχαίων μεταβλητών με τιμές σε πλήρεις $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρους.

Ορισμός 9.1.2 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X \in L^1(\Omega; M)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον πλήρη $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρο M. Ορίζουμε τη *μέση τιμή* $\mathbb{E}X = \mathbb{E}_P X$ της X ως $\mathbb{E}X = b(X_* P)$. Έτσι,

$$\mathbb{E}X = \operatorname*{argmin}_{z\in X} \int_X \big(d(z,x)^2 - d(y,x)^2\big)dX_*P(x) = \operatorname*{argmin}_{z\in X} \mathbb{E}_P\big(d(z,X)^2 - d(y,X)^2\big).$$

Η μέση τιμή της X λέγεται, επίσης, το ολοκλήρωμα της X ως προς το P και συμβολίζεται με $\int_\Omega X dP$.

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, αυτή η έννοια ολοκληρώματος συμπεριφέρεται καλά σε σχέση με τα μέτρα εικόνα.

Πρόταση 9.1.2 *Έστω $T : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ μετρήσιμη απεικόνιση και έστω $X : \Omega' \longrightarrow M$ ισχυρά μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές στον πλήρη $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρο M. Τότε $X \in L^1(\Omega', T_*P; M)$ ανν $X \circ T \in L^1(\Omega, P; M)$ και*

$$\int_{\Omega'} X dT_*P = \int_{\Omega} X \circ T dP.$$

Απόδειξη Έστω $x_0 \in M$. Εξ' ορισμού $X \in L^1(\Omega', T_*P; M)$ ανν

$$\int_{\Omega'} d\big(x_0, X(\omega')\big) dT_*P(\omega') < \infty.$$

Όμως $\int_{\Omega'} d\big(x_0, X(\omega')\big) dT_*P(\omega') = \int_{\Omega} d\big(x_0, X \circ T(\omega)\big) dP(\omega)$, και άρα $X \in L^1(\Omega', T_*P; M)$ ανν $X \circ T \in L^1(\Omega, P; M)$. Τότε προφανώς

$$\mathbb{E}_{T_*P} X = b(T_*(X_*P)) = b((X \circ T)_*P) = \mathbb{E}_P(X \circ T),$$

όπως θέλουμε. □

Θα μελετήσουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες της βαρυκεντρικής προβολής $b : \mathbb{P}_1 X \longrightarrow X$ και της μέσης τιμής $\mathbb{E} : L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; X) \longrightarrow X$.

Πρόταση 9.1.3 (Ανισότητα Διασποράς) *Έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Για κάθε $p \in \mathbb{P}_1 X$ και κάθε $o \in X$,*

$$d\big(o, b(p)\big)^2 \leq \int_X \Big(d(o, x)^2 - d\big(b(p), x\big)^2 \Big) dp(x).$$

Απόδειξη Από την προηγούμενη πρόταση ξέρουμε ότι η συνάρτηση $F_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F_y(z) = \int_X \big(d(z, x)^2 - d(y, x)^2 \big) dp(x),$$

είναι 1-κυρτή. Εφαρμόζοντας το αυτό για $y = b(p)$ και για τη γεωδιασιακή $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ που συνδέει τα σημεία $b(p)$ και o και χρησιμοποιώντας το ότι το $b(p)$ είναι το σημείο ελαχίστου της F_y, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_y(\gamma_t) \leq t F_y(o) + (1-t) F_y(b(p)) - t(1-t) d\big(o, b(p)\big)^2 \\ &= t F_y(o) - t(1-t) d\big(o, b(p)\big)^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή, για κάθε $0 < t \leq 1$,

$$(1-t) d\big(o, b(p)\big)^2 \leq \int_X \Big(d(o, x)^2 - d\big(b(p), x\big)^2 \Big) dp(x).$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Ως προς τη μέση τιμή, η ανισότητα της διασποράς παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Πόρισμα 9.1.1 *Έστω M πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας. Τότε για κάθε βασική απεικόνιση $o \in X$ και κάθε ισχυρά μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $X \in L^1(\Omega, P; M)$ έχουμε ότι*

$$d(o, \mathbb{E}X)^2 \leq \mathbb{E}\big(d(o, X)^2 - d(\mathbb{E}X, X)^2 \big).$$

Ειδικότερα, αν $X \in L^2(\Omega, P; M)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}d(o,X)^2 - d(o,\mathbb{E}X)^2.$$

Η αντίστοιχη *ισότητα* στην κλασική περίπτωση $M = \mathbb{R}$ είναι γνωστή από τα πρώτα μαθήματα θεωρίς πιθανοτήτων.

Θεώρημα 9.1.1 *Έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Τότε $b(p) \in \overline{\mathrm{co}(\mathrm{supp}p)}$ για κάθε $p \in \mathbb{P}_1 X$. Ειδικότερα, $b \circ \delta = id_X$.*

Απόδειξη Θέτουμε $K := \overline{\mathrm{co}(\mathrm{supp}p)}$. Αφού ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός και οι γεωδαισιακές στον X εξαρτώνται συνεχώς από τα άκρα τους, το K είναι κυρτό. Έστω π_K η ορθογώνια προβολή στο K. Αρκεί να δείξουμε ότι $b(p) = \pi_K(b(p))$, και γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το $z_0 := \pi_K(b(p))$ είναι το σημείο ελαχίστου του 1-κυρτού συναρτησοειδούς $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(z) = \int_K \big(d^2(z,x) - d^2(y,x)\big)dp(x),$$

για κάποιο $y \in X$. Έστω, λοιπόν, $z \in X$. Αφού το $b(p)$ είναι το σημείο ελαχίστου του F και η π_K είναι συστολή, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
F(z) &\geq F(b(p)) = \int_K \Big(d^2\big(b(p),x\big) - d^2(y,x)\Big)dp(x) \\
&\geq \int_K \big(d^2\big(\pi_K(b(p)), \pi_K(x)\big) - d^2(y,x)\big)\,dp(x) \\
&= \int_K \big(d^2(z_0,x) - d^2(y,x)\big)\,dp(x) = F(z_0),
\end{aligned}$$

και άρα το z_0 είναι το μοναδικό σημείο ελαχίστου του F, όπως θέλαμε. □

Σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα, το βαρύκεντρο ενός μέτρου πιθανότητας p στο γινόμενο δύο πλήρων $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρων εξαρτάται μόνο από τις περιθώριες κατανομές του p.

Λήμμα 9.1.1 *Έστω X_1, X_2 πλήρεις $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώροι και έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1 X$, $p_2 \in \mathbb{P}_1 X_2$. Όπως ξέρουμε ο $X_1 \times X_2$ είναι πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και $\Pi(p_1,p_2) \subseteq \mathbb{P}_1(X_1 \times X_2)$. Έτσι το $b(\pi)$ ορίζεται για κάθε $\pi \in \Pi(p_1,p_2)$, και*

$$b(\pi) = \big(b(p_1), b(p_2)\big).$$

Απόδειξη Έστω $x,y,z \in X_1 \times X_2$. Θέτουμε $w := \big(b(p_1), b(p_2)\big)$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{X_1 \times X_2} d^2(w,x) - d^2(y,x)d\pi(x) = \min_{z \in X_1 \times X_2} \int_{X_1 \times X_2} d^2(z,x) - d^2(y,x)d\pi(x),$$

όπου φυσικά d είναι το ℓ^2 γινόμενο των μετρικών των X_1, X_2.

Αυτό όμως πράγματι ισχύει, αφού για κάθε $z \in X_1 \times X_2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int\limits_{X_1\times X_2} |zx|^2 - |yx|^2 d\pi(x) &= \int\limits_{X_1} |z_1x_1|^2 - |y_1x_1|^2 dp_1(x_1) + \int\limits_{X_2} |z_2x_2|^2 - |y_2x_2|^2 dp_2(x_2) \\ &\geq \int\limits_{X_1} |w_1x_1|^2 - |y_1x_1|^2 dp_1(x_1) + \int\limits_{X_2} |w_2x_2|^2 - |y_2x_2|^2 dp_2(x_2) \\ &= \int\limits_{X_1\times X_2} |wx|^2 - |yx|^2 d\pi(x).\end{aligned}$$

Θεώρημα 9.1.2 (Η ανισότητα του Jensen) *Έστω $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ κάτω ημισυνεχές κυρτό συναρτησοειδές στον πλήρη $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρο X και έστω $p \in \mathbb{P}_1X$. Αν $\int_X \phi^- dp < \infty$, τότε*

$$\phi(b(p)) \leq \int_X \phi(x)dp(x).$$

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση όπου η ϕ είναι φραγμένη από κάτω και p-ολοκληρώσιμη. Πράγματι, έστω $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση στον X τ.ω. $\int_X \phi^- dp < \infty$ και έστω ότι η ανισότητα του Jensen ισχύει για όλες τις φραγμένες από κάτω και p-ολοκληρώσιμες κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν $\int_X \phi^+ dp = \infty$ τότε $\int_X \phi dp = \infty$ και η ανισότητα του Jensen ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι η ϕ είναι p-ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, αν η ϕ είναι p-ολοκληρώσιμη, τότε η ακολουθία $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με τύπο $\phi_k = \psi \vee (-k)$ αποτελείται από κυρτές και φραγμένες από κάτω συναρτήσεις τ.ω. $|\phi_k| \leq |\phi| \in L^1(p)$ και $\phi_k \searrow \psi$. Συνεπώς, αφού από την υπόθεσή μας η ανισότητα του Jensen ισχύει για τις ϕ_k, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\phi(b(p)) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(b(p)) \leq \lim_{k\to\infty} \int_X \phi_k dp = \int_X \phi dp.$$

Περιοριζόμαστε, λοιπόν, στην περίπτωση όπου η ϕ είναι φραγμένη από κάτω και p-ολοκληρώσιμη κάτω ημισυνεχής κυρτή συνάρτηση. Θέτουμε $\hat{X} := X \times \mathbb{R}$ το ℓ^2-γινόμενο των X και $\mathbb{R}$. Έστω $\hat{\phi} := (id_X, \phi) : X \longrightarrow X \times \mathbb{R}$ η διαγώνια απεικόνιση. Αφού $id_X \in L^1(p; X)$ και $\phi \in L^1(p)$, έπεται ότι $\hat{\phi} \in L^1(p; X\times\mathbb{R})$ και άρα $\hat{p} := \hat{\phi}_* p \in \mathbb{P}_1(X\times\mathbb{R})$. Αφού η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής, το επιγράφημα της $\mathrm{epi}(\phi) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,|\, \phi(x) \leq t\}$ είναι κλειστό και άρα

$$\mathrm{supp}\hat{p} \subseteq \overline{\mathrm{Graph}\phi} \subseteq \mathrm{epi}(\phi).$$

Από την κυρτότητα της ϕ, έχουμε ότι το $\mathrm{epi}(\phi)$ είναι κυρτό και συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση $b(\hat{p}) \in \mathrm{epi}(\phi)$. Όμως από το λήμμα 9.1.1, έχουμε ότι $b(\hat{p}) = (b(p), b(\phi_* p)) = (b(p), \int_X \phi dp)$, και άρα $\phi(b(p)) \leq \int_X \phi dp$. □

Θεώρημα 9.1.3 (Θεμελιώδης Ιδιότητα Συστολής) *Έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Η βαρυκεντρική προβολή $b : \mathbb{P}_1X \longrightarrow X \overset{iso}{=} \delta(X) \subseteq \mathbb{P}_1X$ είναι συστολή, δηλαδή για κάθε $p, q \in \mathbb{P}_1X$ έχουμε ότι*

$$W_1(b(p), b(q)) \leq W_1(p,q).$$

Απόδειξη Ο $X \times X$ είναι πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και η d είναι κυρτή και συνεχής στον $X \times X$. Έτσι για κάθε $\pi \in \Pi(p,q)$, έχουμε από την ανισότητα του Jensen ότι

$$d(b(p), b(q)) = d(b(\pi)) \leq \int_{X \times X} d(x,y) d\pi(x,y).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλα τα σχέδια $\pi \in \Pi(p,q)$ καταλήγουμε στο ζητούμενο.$\square$

Από αυτό έπεται ότι και η μέση τιμή $\mathbb{E} : L^p(\Omega, P; X) \longrightarrow X,\ 1 \leq p < \infty$ είναι συστολή. Πράγματι, αν $f, g \in \mathbb{E} : L^p(\Omega; X)$, τότε

$$d(\mathbb{E}f, \mathbb{E}g) = d\big(b(f_*P), b(g_*P)\big) \leq W_p(f_*P, g_*P) \leq d_{L^p(\Omega;X)}(f,g).$$

Ορισμός 9.1.3 Έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και έστω $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X. Ορίζουμε επαγωγικά μία νέα ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων $s_n \in X$ ως εξής·

$$s_1 := x_1 \quad \text{και} \quad s_n := [s_{n-1}, x_n]\left(\frac{1}{n}\right).$$

Το σημείο s_n συμβολίζεται με $\frac{1}{n}\overrightarrow{\sum\limits_{i=1,\ldots,n}} x_i$ και λέγεται επαγωγικός μέσος των $x_1, \ldots, x_n$.

Παρατηρήσεις

1. Εν γένει, εκτός κι αν ο X είναι επίπεδος, το σημείο $\frac{1}{n}\overrightarrow{\sum\limits_{i=1,\ldots,n}} x_i$ εξαρτάται από τις μεταθέσεις των x_i.

2. Αν οι X, Y είναι πλήρεις $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώροι και η $\phi : X \longrightarrow Y$ είναι αφφινική απεικόνιση, τότε

$$\phi\Big(\frac{1}{n}\overrightarrow{\sum_{i=1,\ldots,n}} x_i\Big) = \frac{1}{n}\overrightarrow{\sum_{i=1,\ldots,n}} \phi(x_i).$$

Θεώρημα 9.1.4 (Νόμοι Μεγάλων Αριθμών) *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Έστω $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών στον $L^2(\Omega, X)$. Τότε*

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{\sum_{i=1,\ldots,n}} X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}X_1$$

στον $L^2(\Omega, X)$ και κατά πιθανότητα. (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)

Αν, επιπλέον, $X_i \in L^\infty(\Omega, X)$ τότε

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{\sum_{i=1,\ldots,n}} X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}X_1$$

P-σ.π. (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)

Απόδειξη Θέτουμε $S_n := \frac{1}{n} \overrightarrow{\sum\limits_{i=1,\dots,n}} X_i$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$E_n := \mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, S_n) \leq \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1), \tag{9.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι απλώς ο ορισμός της διασποράς. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για τον n, και χρησιμοποιώντας την NPC-ανισότητα, την ανισότητα της διασποράς, το ότι οι X_i είναι ισόνομες και ανεξάρτητες και την επαγωγική υπόθεση, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
E_n &= \mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, S_{n+1}) = \mathbb{E}d^2\left(\mathbb{E}X_1, [S_n, X_{n+1}]\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&\leq \frac{n}{n+1}\mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, S_n) + \frac{1}{n+1}\mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, X_{n+1}) - \frac{n}{(n+1)^2}\mathbb{E}d^2(S_n, X_{n+1}) \\
&\leq \frac{n}{n+1}\mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, S_n) + \frac{1}{n+1}\mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, X_{n+1}) \\
&- \frac{n}{(n+1)^2}\Big(\mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_{n+1}, S_n) + \mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_{n+1}, X_{n+1})\Big) \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \mathbb{E}d^2(\mathbb{E}X_1, S_n) + \frac{1}{(n+1)^2}\mathbb{V}(X_1) \\
&\leq \left(\frac{n^2}{n(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{n+1}\mathbb{V}(X_1),
\end{aligned}$$

όπως θέλουμε. Φυσικά αυτό αποδεικνύει τη σύγκλιση $S_n \longrightarrow \mathbb{E}X_1$ στον L^2 και κατά πιθανότητα.

(β) Πριν αποδείξουμε ότι $S_n \longrightarrow \mathbb{E}X_1$ P-σ.β., θα αποδείξουμε ότι $S_{n^2} \xrightarrow{\sigma.\pi.} \mathbb{E}X_1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ανισότητα του Markov και την (9.1) έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(d(S_{n^2}, \mathbb{E}X_1) > \varepsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}d^2(S_{n^2}, \mathbb{E}X_1) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}(X_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli, έπεται ότι $P\left(\limsup_n \left\{\omega \,\middle|\, d(S_{n^2}(\omega), \mathbb{E}X_1) > \varepsilon\right\}\right) = 0$, δηλαδή ότι $S_{n^2} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}X_1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $X_1 \in L^\infty(\Omega; X)$, ας πούμε $d(X_1, z) \leq R$ P-σ.π. για κάποιο $z \in X$ και κάποιο $R \in \mathbb{R}$. Αφού οι μπάλες στον X είναι κυρτές, έπεται επαγωγικά ότι $d(S_n, z) \leq R$ P-σ.β. για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$d(S_n, S_{n+1}) \leq \frac{1}{n+1}d(S_n, X_{n+1}) \leq \frac{2R}{n+1}$$

P-σ.β. και συνεπώς για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ με $n^2 \leq k < (n+1)^2$ έχουμε ότι

$$d(S_{n^2}, S_k) \leq \sum_{i=n^2+1}^{k} d(S_{i-1}, S_i) \leq 2R\sum_{i=n^2+1}^{k}\frac{1}{i} \leq \frac{k-n^2}{n^2}2R \leq \frac{4}{n}R$$

P-σ.β. Έτσι, αν το $\omega \in \Omega$ είναι τ.ω. $S_{n^2}(\omega) \longrightarrow \mathbb{E}X_1$, τότε επίσης $S_k(\omega) \longrightarrow \mathbb{E}X_1$ και άρα αφού $S_{n^2} \longrightarrow \mathbb{E}X_1$ P-σ.β., έπεται ότι $S_n \longrightarrow \mathbb{E}X_1$ P-σ.β. όπως θέλαμε. □

Ο ακόλουθός χαρακτηρισμός τον αφφινικών απεικονίσεων χρησιμεύει στο να ελέγξουμε αν η μέση τιμή είναι αφφινική.

Πρόταση 9.1.4 *Έστω $\phi : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο πλήρων $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρων. Η ϕ είναι αφφινική ανν το διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 X & \xrightarrow{\phi_*} & \mathbb{P}_1 Y \\ \Big\downarrow b & & \Big\downarrow b \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

μετατίθεται.

Απόδειξη ($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε πρώτα ότι το παραπάνω διάγραμμα μετατίθεται και θα δείξουμε ότι η ϕ είναι αφφινική. Έστω $xy : [0,1] \longrightarrow X$ η γεωδαισιακή από το $x \in X$ στο $y \in X$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\phi \circ xy = \phi(x)\phi(y)$ για κάθε $x, y \in X$. Έστω, λοιπόν, $x, y \in X$. Παρατηρήστε ότι η γεωδαισιακή xy δίνεται από τον τύπο $t \mapsto b\big((1-t)\delta_x + t\delta_y\big)$. Πράγματι, το $z_t := b\big((1-t)\delta_x + t\delta_y\big)$ είναι το σημείο ελαχίστου του 1-κυρτού συναρτησοειδούς $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(z) = \int_X d^2(z,w)d\big((1-t)\delta_x + t\delta_y\big)(w) = (1-t)d^2(z,x) + td^2(z,y).$$

Όμως από το θεώρημα 9.1.1, ξέρουμε ότι $z_t \in xy$ και άρα

$$\begin{aligned} F(z_t) &= \min_{0\le s\le 1} \big\{(1-t)d^2(x, xy_s) + td^2(xy_s, y)\big\} \\ &= d^2(x,y) \min_{0\le s\le 1} \big\{(1-t)s^2 + t(1-s)^2\big\}. \end{aligned}$$

Το ελάχιστο πιάνεται για $s = t$ και άρα $z_t = xy_t$, όπως θέλαμε. Τώρα, αφού το διάγραμμα μετατίθεται, για κάθε $0 \le t \le 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(xy_t) &= \phi\left(b\big((1-t)\delta_x + t\delta_y\big)\right) \\ &= b\big((1-t)\delta_{\phi(x)} + t\delta_{\phi(y)}\big) = \phi(x)\phi(y)_t. \end{aligned}$$

($\Longrightarrow$) Αφού ο $\mathbb{P}_\infty X$ είναι πυκνός στον $\mathbb{P}_1 X$ και η ϕ είναι συνεχής, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $p \in \mathbb{P}_\infty X$. Έστω, λοιπόν, $p \in \mathbb{P}_\infty X$. Θέτουμε $\mathbf{X} := \prod_{i=1}^\infty X$ το αριθμήσιμο καρτεσιανό γινόμενο του X με τον εαυτό του, $P := \otimes_{i=1}^\infty p$ και θεωρούμε το χώρο πιθανότητας $\Omega := (\mathbf{X}, P)$. Έστω $X_i : \Omega \longrightarrow X$ οι προβολές με τύπο $X^i\big((x_j)_{j=1}^\infty\big) = x_i$. Οι X_i είναι προφανώς ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_{i*}P = p$. Επιπλέον, αφού $p \in \mathbb{P}_\infty X$ έχουμε ότι $X_i \in L^\infty(\Omega; X)$ και αφού η ϕ είναι Lipschitz έπεται ότι $\phi \circ X_i \in L^\infty(\Omega; Y)$. Έτσι από το νόμο των μεγάλων αριθμών, τη συνέχεια και την αφφινικότητα της ϕ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi\big(b(p)\big) &= \phi(\mathbb{E}X_1) = \phi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \overrightarrow{\sum_{i=1,\dots,n}} X_i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \overrightarrow{\sum_{i=1,\dots,n}} \phi \circ X_i \\ &= \mathbb{E}(\phi \circ X_1) = b\big(\phi_*(p)\big), \end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Η πρόταση 9.1.4 μας δίνει τον ακόλουθο χαρακτηρισμό των πλήρων $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρων για τους οποίους η μέση τιμή $\mathbb{E} : L^2(\Omega; X) \longrightarrow X$ είναι αφφινική για κάθε χώρο πιθανότητας Ω.

Πρόταση 9.1.5 *Έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και έστω $1 < p < \infty$. Η μέση τιμή $\mathbb{E} : L^p(\Omega; X) \longrightarrow X$ είναι αφφινική για κάθε χώρο πιθανότητας Ω ανν η απεικόνιση $H_t : X \times X \longrightarrow X$ με τύπο $H_t(x, y) = [x, y](t)$ είναι αφφινική για κάθε $0 \leq t \leq 1$.*

Συνδυάζοντας αυτή την πρόταση με τις προτάσεις 3.3.6 και 5.4.4 παίρνουμε το ακόλουθο, με μία έννοια αρνητικό, αποτέλεσμα για την αφφινικότητα της μέσης τιμής.

Πρόταση 9.1.6 *Έστω X πλήρης και γεωδαισιακά πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Η απεικόνιση της μέσης τιμής $\mathbb{E} : L^p(\Omega; X) \longrightarrow X$ είναι αφφινική για κάθε χώρο πιθανότητας Ω ανν ο X είναι χώρος* Hilbert.

Πρόταση 9.1.7 *Έστω X πλήρης και γεωδαισιακά πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος. Η βαρυκεντρική προβολή $b : \mathbb{P}_1^T X \longrightarrow X$ είναι αφφινική ανν ο X είναι χώρος* Hilbert.

Απόδειξη Πράγματι, όπως ξέρουμε οι καμπύλες της μορφής $[0, 1] \mapsto (1 - t)\mu + t\nu$ είναι γεωδαισιακές της μετρικής W_1 του Wasserstein. Από αυτό έπεται ότι αν η βαρυκεντρική προβολή είναι αφφινική τότε και η απεικόνιση των μέσων του X είναι αφφινική, από όπου, από την πρόταση 5.4.4, έπεται το ζητούμενο. □

Το ζήτημα του αν η βαρυκεντρική προβολή $b : \mathbb{P}_r^T X \longrightarrow X$, $1 < r < \infty$ είναι αφφινική δεν είναι τόσο απλό. Πράγματι, έστω X πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος με απεικόνιση μέσων m. Το ότι η b είναι αφφινική συνεπάγεται ότι $b(m_*\pi) = m(b(\pi))$, *μόνο* για εκείνα τα μέτρα $\pi \in \mathbb{P}(X \times Y)$ τα οποία είναι βέλτιστα σχέδια μεταφοράς μεταξύ των περιθώριων κατανομών τους, το οποίο δεν συνεπάγεται ότι η m είναι αφφινική. Έτσι δεν μπορούμε να καταλήξουμε στα αντίστοιχα συμπεράσματα που καταλήξαμε στην περίπτωση της μέσης τιμής $\mathbb{E}$ και της βαρυκεντρικής προβολής $b : \mathbb{P}_1^T X \longrightarrow X$. Ωστόσο, σύμφωνα με το ακόλουθο παράδειγμα, η διακλάδωση γεωδαισιακών στον X δεν επιτρέπει στη βαρυκεντρική προβολή $b : \mathbb{P}_r^T \longrightarrow X$ να είναι αφφινική.

<u>Παράδειγμα</u>

1. Έστω X τρίποδας με τμήματα ίδιου μήκους. Η βαρυκεντρική προβολή $b : \mathbb{P}_r^T X \longrightarrow X$ δεν είναι αφφινική για κάθε $1 \leq r < \infty$.

Απόδειξη. Έστω o το κοινό αρχικό σημείο των τμημάτων του τρίποδα και έστω x, y, z τα τελικά σημεία τους. Θέτουμε $\mu = \delta_x$, $\nu = \frac{1}{2}(\delta_y + \delta_z) \in \mathbb{P}_r^T X$. Το μοναδικό σχέδιο από το μ στο ν είναι το $\pi = \delta_x \otimes \left(\frac{1}{2}(\delta_y + \delta_z)\right) = \frac{1}{2}(\delta_{(x,y)} + \delta_{(x,z)})$. Έτσι από το χαρακτηρισμό των γεωδαισιακών στον $\mathbb{P}_r^T X$, η καμπύλη $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{P}_r^T X$ με τύπο $\gamma(t) = \frac{1}{2}(\delta_{[x,y]_t} + \delta_{[x,z]_t})$ είναι γεωδαισιακή στον $\mathbb{P}_r^T X$. Όπως, όμως, μπορεί να ελέγξει ο αναγνώστης,

$$b(\gamma_t) = \begin{cases} [x, o](2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ o, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

η οποία δεν είναι γεωδαισιακή στον X.

Δίνουμε, τέλος, διάφορους χαρακτηρισμούς της μη-θετικής καμπυλότητας για πλήρεις μετρικούς χώρους μέσω μέτρων πιθανότητας σε αυτούς τους χώρους. Π.χ., η ανισότητα της διασποράς χαρακτηρίζει τους πλήρεις $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρους.

Πρόταση 9.1.8 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο (X,d) είναι πλήρης $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος.*

(β) *Για κάθε μέτρο πιθανότητας $q \in \mathbb{P}_2 X$ υπάρχει μοναδικό σημείο $z_q \in X$ τ.ω. για κάθε $z \in X$*

$$d^2(z, z_q) \leq \int_X d^2(z,x)dq(x) - \int_X d^2(z_q, z)dq(x). \tag{9.2}$$

(γ) *Για κάθε μέτρο πιθανότητας $q \in \mathbb{P}X$*

$$\mathbb{V}(q) \leq \frac{1}{2}\int_X \int_X d^2(x,y)dq(x)dq(y).$$

(δ) *Ο (X,d) είναι χώρος μήκους και για κάθε $x,y,z,w \in X$ και κάθε $s,t \in [0,1]$*

$$s(1-s)|xz|^2+t(1-t)|yw|^2 \leq st|xy|^2+(1-s)t|yz|^2+s(1-t)|xw|^2+(1-s)(1-t)|zw|^2.$$

Απόδειξη (α)$\Longrightarrow$(β) Είναι απλά η ανισότητα διασποράς, με $z_q = b(q)$.
(β)$\Longrightarrow$(α) Αφού ο X είναι πλήρης, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x,y \in X$ υπάρχει $m \in X$ τ.ω. για κάθε $z \in X$,

$$|zm|^2 \leq \frac{1}{2}|zx|^2 + \frac{1}{2}|zy|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2.$$

Έστω, λοιπόν, $x,y \in X$. Θέτουμε $q := \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y \in \mathbb{P}_2 X$. Έστω $m \in X$ το σημείο που δίνεται από το (β) για το οποίο ισχύει η (9.2). Τότε, από την (9.2) έπεται ότι για κάθε $z \in X$,

$$\begin{aligned}|zm|^2 &\leq \frac{1}{2}|zx|^2 + \frac{1}{2}|zy|^2 - \frac{1}{2}|mx|^2 - \frac{1}{2}|my|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}|zx|^2 + \frac{1}{2}|zy|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει από την τριγωνική ανισότητα και τη στοιχειώδη ανισότητα $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r+b^r)$, $a,b \geq 0$, $r \geq 1$.
(β)$\Longrightarrow$(γ) Αν $\mathbb{V}(q) = +\infty$, τότε $q \notin \mathbb{P}_2 X$ και άρα η ζητούμενη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο ως $+\infty = +\infty$. Αν $\mathbb{V}(q) < \infty$ τότε ολοκληρώνοντας την (9.2) ως προς το $z \in X$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_X \int_X d^2(z,x)dq(x)dq(z) &\geq \int_X d^2(z,z_q)dq(z) + \int_X d^2(z_q,x)dq(x) \\ &= 2\int_X d^2(z,z_q)dq(z) \geq 2\mathbb{V}(q).\end{aligned}$$

(γ)$\Longrightarrow$(δ) Δείχνουμε πρώτα ότι ο X είναι χώρος μήκους. Έστω, λοιπόν, $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το μέτρο $q := \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y \in \mathbb{P}_2 X$. Αφού $\mathbb{V}(q) = \inf_{z \in X} \int_X d^2(z,u)dq(u)$, υπάρχει $z \in X$ τ.ω. $\int_X d^2(z,u)dq(u) \leq \mathbb{V}(q) + \varepsilon$. Τότε από το (γ) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}d^2(z,x) + \frac{1}{2}d^2(z,y) &= \int_X d^2(z,u)dq(u) \leq \mathbb{V}(q) + \varepsilon \\
&\leq \frac{1}{2}\int_X \int_X d^2(u,v)dq(u)dq(v) + \varepsilon \leq \frac{1}{4}d^2(x,y) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

το οποίο, αφού ο X είναι πλήρης, δείχνει ότι ο X είναι χώρος μήκους.

Δείχνουμε τώρα ότι ο X ικανοποιεί την ανισότητα του (δ). Έστω λοιπόν $x, y, z, w \in X$ και $s, t \in [0,1]$. Θεωρούμε το μέτρο $q := \frac{1}{2}\big(s\delta_x + t\delta_y + (1-s)\delta_z + (1-t)\delta_w\big)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το (γ), υπάρχει $z_\varepsilon \in X$ τ.ω.

$$\int_X d^2(z_\varepsilon, u)dq(u) \leq \frac{1}{2}\int_X \int_X d^2(u,v)dq(u)dq(v) + \varepsilon. \tag{9.3}$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα στην (9.3) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big(st|xy|^2 + s(1-s)|xz|^2 + s(1-t)|wx|^2 + t(1-s)|zy|^2 + t(1-t)|wy|^2 + (1-s)(1-t)|zw|^2\Big) + \varepsilon \\
&\qquad \geq \frac{1}{2}\Big(s|z_\varepsilon x|^2 + t|z_\varepsilon y|^2 + (1-s)|z_\varepsilon z|^2 + (1-t)|z_\varepsilon w|^2\Big) \\
&\qquad \geq \frac{1}{2}\Big(s(1-s)|xz|^2 + t(1-t)|yw|^2\Big),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την τριγωνική ανισότητα και την τετριμμένη ανισότητα $t(1-t)(a+b)^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έπεται το ζητούμενο.

(δ)$\Longrightarrow$(α) Αφού ο X είναι χώρος μήκους, δεδομένων $x, y \in X$ και $0 < s < 1$, υπάρχει $m_s \in X$ τ.ω.

$$d^2(x, m_s) + d^2(m_s, y) \leq \frac{1}{2}d^2(x,y) + s^2.$$

Τότε για κάθε $p \in X$, εφαρμόζοντας την ανισότητα του (δ) για $t = \frac{1}{2}$, $x = p$, $y = x$, $z = m$ και $w = y$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
s(1-s)|pm_s|^2 &\leq \frac{s}{2}|px|^2 + \frac{1-s}{2}|m_s x|^2 + \frac{1-s}{2}|m_s y|^2 + \frac{s}{2}|py|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2 \\
&\leq \frac{s}{2}|px|^2 + \frac{s}{2}|py|^2 - \frac{s}{4}|xy|^2 + \frac{(1-s)s^2}{2}
\end{aligned}$$

Αν δείξουμε ότι η οικογένεια $(m_s)_{0<s<1}$ είναι Cauchy καθώς $s \longrightarrow 0$, τότε από την πληρότητα του X υπάρχει $m \in X$ τ.ω. $m_s \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} m$ και άρα παίρνοντας το όριο καθώς $s \longrightarrow 0$ στην παραπάνω ανισότητα, καταλήγουμε στην NPC-ανισότητα. Η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$(I_s) \qquad |pm_s|^2 \leq \frac{1}{1-s}\Big(\frac{1}{2}|px|^2 + \frac{1}{2}|py|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2\Big) + \frac{s}{2}.$$

Εφαρμόζοντας την (I_s) για $p = x$ και $p = y$ και προσθέτοντας τις προκύπτουσες ανισότητες παίρνουμε ότι

$$(M_s) \qquad \frac{1}{2}|xm_s|^2 + \frac{1}{2}|ym_s|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2 \leq \frac{s}{2} + \frac{s|xy|^2}{4(1-s)}.$$

Συνεπώς, αν $0 < r, s < 1$, τότε εφαρμόζοντας την (I_r) για $p = m_s$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |m_s m_r|^2 &\leq \frac{1}{1-r}\Big(\frac{1}{2}|m_s x|^2 + \frac{1}{2}|m_s y|^2 - \frac{1}{4}|xy|^2\Big) + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{1}{1-r}\Big(\frac{s}{2} + \frac{s|xy|^2}{4(1-s)}\Big) + \frac{r}{2} \overset{r,s\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι η $(m_s)_{0<s<1}$ είναι οικογένεια Cauchy και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

9.2 Παραδείγματα

1. Χώροι Hilbert

Έστω X χώρος Hilbert. Τότε $b(p) = \int_X id_X dp$ για κάθε $p \in \mathbb{P}_1 X$.

Απόδειξη. Θέτουμε $w := \int_X id_X dp$. Από τους ορισμούς το $b(p)$ είναι το μοναδικό σημείο ελαχίστου του 1-κυρτού συναρτησοειδούς $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(z) = \int_X (\|x - z\|^2 - \|x\|^2)dp(x).$$

Η F όμως είναι παραγωγίσιμη με $\nabla F(z) = 2(w - z) \in X$ και, άρα, αφού η F έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου και $\nabla F(z) = 0$ ανν $z = w$, έπεται ότι το w είναι το μοναδικό σημείο ελαχίστου της F, δηλαδή $b(p) = \int_X id_X dp$, όπως θέλαμε.

2. Πολλαπλότητες Riemann

Έστω (M, g) πλήρης, απλά συνεκτική, n-διάστατη πολλαπλότητα Riemann καμπυλότητας ≤ 0 και έστω $p \in \mathbb{P}_1 M$. Τότε $z = b(p)$ ανν

$$\int_M \nabla d_x^2(z) dp(x) = 0,$$

όπου $d_x : M \longrightarrow [0, \infty)$ είναι η απεικόνιση με τύπο $d_x(z) = d(z, x)$.

9.3 Βαρυκεντρικές Συστολές

Ορισμός 9.3.1 Έστω X πλήρης μετρικός χώρος. Μία βαρυκεντρική συστολή στον X είναι μία απεικόνιση $\beta : \mathbb{P}_1^T X \longrightarrow X$ τ.ω.

(α) $\beta \circ \delta = Id_X$,

(β) $W_1(\beta(p), \beta(q)) \leq W_1(p, q)$ για κάθε $p, q \in \mathbb{P}_1^T X$.

Αν υπάρχει βαρυκεντρική συστολή στον X, τότε ο X είναι γεωδαισιακός χώρος. Για κάθε ζευγάρι σημείων $x_0, x_1 \in X$, η καμπύλη $[0,1] \ni t \mapsto x_t := \beta((1-t)\delta_{x_0} + t\delta_{x_1}) \in X$ είναι γεωδαισιακή μεταξύ των x_0, x_1. Για κάθε x_0, x_1, y_0, y_1, η συνάρτηση $t \mapsto d(x_t, y_t)$ είναι κυρτή. Ειδικότερα, η γεωδαισιακή $t \mapsto x_t$ εξαρτάται συνεχώς από τα άκρα της. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητα η μοναδική γεωδαισιακή που συνδέει τα x_0, x_1. Αν ο X είναι μονοσήμαντα γεωδαισαικός, τότε η ύπαρξη βαρυκεντρικής συστολής στον X συνεπάγεται ότι ο X έχει καμπυλότητα ≤ 0 με την έννοια του Busemann.

Πρόταση 9.3.1 *Έστω M πλήρης, απλά συνεκτική πολλαπλότητα* Riemann. *Υπάρχει βαρυκεντρική συστολή στην M ανν η M έχει καμπυλότητα ≤ 0.*

Απόδειξη Αν η M έχει καμπυλότητα ≤ 0, αφού είναι απλά συνεκτική, έπεται από το θεώρημα Cartan-Hadamard ότι είναι $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρος και, αφού είναι πλήρης, επιδέχεται βαρυκεντρική συστολή. Αντίστροφα, αν η M επιδέχεται βαρυκεντρική συστολή, τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε κυρτό και κλειστό $M_0 \subseteq M$. Επιλέγοντας το M_0 αρκετά μικρό, έπεται από το θεώρημα του Whitehead ότι ο M_0 είναι μονοσήμαντα γεωδαισιακός. Σύμφωνα με τη συζήτηση που προηγήθηκε, από αυτό έπεται ότι ο M_0, και άρα και η M, έχει καμπυλότητα ≤ 0 με την έννοια του Busemann. Όπως ξέρουμε, όμως, για πολλαπλότητες Riemann, αυτό ισοδυναμεί με το ότι οι καμπυλότητες τομής της M είναι όλες ≤ 0. $\square$

Σύμφωνα με την ακόλουθη κατασκευή, κάθε βαρυκεντρική συστολή ορίζει μία ακολουθία διαφορετικών βαρυκεντρικών συστολών. Έτσι η βαρυκεντρική συστολή που κατασκευάσαμε στους πλήρεις $\overline{\mathrm{CAT}}(0)$-χώρους δεν είναι η μοναδική βαρυκεντρική συστολή. Η κατασκευή αυτή έχει ως εξής: Έστω X πλήρης μετρικός χώρος με βαρυκεντρική συστολή $\beta : \mathbb{P}_1^T X \longrightarrow X$ και έστω $m : X \times X \longrightarrow X$ η απεικόνιση των μέσων η οποία επάγεται από τη β, δηλαδή $m(x,y) = \beta(\frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y)$. Ορίζουμε μία απεικόνιση $M : \mathbb{P}_1^T X \longrightarrow \mathbb{P}_1^T X$ με τύπο $M(p) = m_*(p \otimes p)$. Η απεικόνιση αυτή είναι συστολή ως προς τη μετρική του Wasserstein W_1. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $\beta_n : \mathbb{P}_1^T X \longrightarrow X$ με τύπο $\beta_n(p) = \beta\big(M^n(p)\big)$, είναι βαρυκεντρική συστολή.

Βιβλιογραφία

[1] Σημειώσεις Κυρτής Ανάλυσης. Απόστολος Γιαννόπουλος, Σουζάνα Παπαδοπούλου. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών, 2000.

[2] Heinz Bauer. *Probability theory and elements of measure theory.* Academic Press, 1981.

[3] Patrick Billingsley. Weak convergence of measures: Applications in probability, 1971.

[4] Sergei Ivanov Dmitri Burago, Yuri Burago. *A Course in Metric Geometry*, τόμος 33 στο *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 2001.

[5] R.M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2002.

[6] Yu. Burago G. Perel'man, M. Gromov. A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below. *Russian Math. Surveys*, 47:1–58, 1992.

[7] Jurgen Jost. Equilibrium maps between metric spaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2:173–204, 1997.

[8] Stefano Lisini. *Absolutely continuous curves in* Wasserstein *spaces with applications to continuity equation and to nonlinear diffusion equations.* Διδακτορική Διατριβή , Universita Degli Studi di Pavia, 2005.

[9] Giuseppe Savare Luigi Ambrosio, Nicola Gigli. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures.* Lectures in Mathematics. Birkhauser, 2005.

[10] Andre Haefliger Martin R. Bridson. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, τόμος 319 στο *A Series of Comprehensive Studies of Mathematics.* Springer, 1999.

[11] McCann. A convexity principle for interacting gases. *Adv. Math.*, 128:153–179, 1997.

[12] R. Schoen N. Korevaar. Sobolev spaces and harmonic spaces for metric space targets. *Comm. Anal. Geom.*, 1:561–569, 1993.

[13] Shin Chi OHTA. Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces. Preprint, 2006.

[14] Alexander Lytchak Petra Hitzelberger. Spaces with many affine functions, november, arxiv:math.mg/0511583 v1, 2005.

[15] K. T. Sturm. On the geometry of metric measure spaces. *Acta Math.*, 196:133–177, 2006.

[16] K.T. Sturm. Proabability measures on metric spaces of nonposistive curvature. *Contemporary Mathematics*, 338:357–390, 2003.

[17] Cedric Villani. Optimal transport, old and new. Unpublished notes, χ.χ.

[18] Cedric Villani. *Topics in Optimal Transportation*, τόμος 58 στο *Graduate Studies in Mathemetics*. American Mathematical Society, 2003.