

Πανεπιστήμιο Κρήτης  
Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα  
των τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών  
Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

Υπολογιστική εκτίμηση σφάλματος για  
Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μεταπτυχιακή εργασία  
Ευάγγελου Προσμίτη

Την επιτροπή κρίσης της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας αποτέλεσαν οι

Γ.Ζουράρης

Θ.Κατσαούνης

Χ.Μακριδάκης.

Ο Χ.Μακριδάκης επέβλεψε την εκπόνησή της.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εκτιμήσεις σφάλματος με χρήση ανακατασκευής</b>	<b>7</b>
1.1	Γραμμικό μοντέλο . . . . .	8
1.1.1	Εκτίμηση του $\hat{U} - U$ . . . . .	12
1.1.2	Εκτιμήσεις σφάλματος ομαλών δεδομένων . . . . .	12
1.1.3	Υπολογιστική εκτίμηση του σφάλματος . . . . .	17
1.2	Μη γραμμικό μοντέλο . . . . .	18
1.2.1	Εκτίμηση του $\hat{U} - U$ . . . . .	19
1.2.2	Υπολογιστική εκτίμηση του σφάλματος . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Εκτιμήσεις σφάλματος με χρήση του δυϊκού προβλήματος</b>	<b>21</b>
2.1	Εκτίμηση σφάλματος . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Εκτιμήσεις σφαλμάτων με χρήση της μεθόδου IDeC</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>εφαρμογές</b>	<b>32</b>
4.1	Γραμμικό μοντέλο . . . . .	32
4.1.1	Ανακατασκευή . . . . .	33
4.1.2	δυϊκό . . . . .	34
4.1.3	IDec . . . . .	35
4.2	Απλό μη γραμμικό σύστημα . . . . .	36
4.2.1	ανακατασκευή . . . . .	36
4.2.2	δυϊκό . . . . .	37

4.2.3	IDeC	38
4.3	IDeC - Ανακατασκευή	40
4.4	Δυϊκό - Crank-Nicolson	42
4.5	Σύστημα Lorenz	43

# Εισαγωγή

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, συνήθων ή μερικών, αποτελεί ένα μεγάλο μέρος των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν από πολλά μαθηματικά μοντέλα και ένα μεγάλο μέρος τους δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί με αναλυτικές μεθόδους. Έτσι, η επίλυσή τους με προσεγγιστικές μεθόδους στον υπολογιστή είναι ένα σημαντικό κεφάλαιο της αριθμητικής ανάλυσης.

Σ' αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την υπολογιστική εκτίμηση του σφάλματος για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Θα υπολογίσουμε δηλαδή, εκ των υστέρων εκτιμήσεις για το σφάλμα που έχουμε κατά την αριθμητική επίλυση των Σ.Δ.Ε. Η διαδικασία αυτή είναι χρήσιμη και αποτελεί την βάση αριθμητικών μεθόδων που προσαρμόζουν αυτόματα το βήμα της διαμέρισής (adaptive methods).

Για τον σκοπό αυτό, θα αναλύσουμε τρεις φιλοσοφίες οι οποίες οδηγούν σε τέτοιου είδους εκτιμήσεις. Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναλύσουμε την μέθοδο της ανακατασκευής, μια ιδέα των Χ.Μακρινδάκη, R.H.Nochetto και Γ.Ακρίβη, βλ.[1]. Με την μέθοδο αυτή ορίζουμε μια συνάρτηση, την ανακατασκευή της λύσης, η οποία σχετίζεται με την αριθμητική μας προσέγγιση και η οποία βοηθάει στο να παράγουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις για το σφάλμα.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση του σφάλματος με την χρήση του δυικού προβλήματος, βλ.[2]. Το δυικό πρόβλημα σχετίζεται με το αρχικό μας και η λύση του χρησιμοποιείται για να παραχθούν οι εκ των υστέρων

εκτιμήσεις που θέλουμε.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναφέρουμε την μέθοδο IDeC , βλ.[3] , μια μέθοδο που βασίζεται στην ιδέα του P.E.Zadunaisky , βλ. [4], για την εκτίμηση του ολικού σφάλματος διακριτοποίησης των μεθόδων Runge-Kutta .

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο θα παραθέσουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα.

# Κεφάλαιο 1

## Εκτιμήσεις σφάλματος με χρήση ανακατασκευής

Ένας βασικός χαρακτήρας των εκ των υστέρων εκτιμήσεων του σφάλματος, σ' αυτό το κεφάλαιο, είναι η *Crank–Nicolson* ανακατασκευή  $\hat{U}$  της αριθμητικής προσέγγισης  $U$ . Η συγκεκριμένη συνάρτηση ικανοποιεί δύο βασικές προϋποθέσεις: (i) είναι ακριβώς υπολογίσιμη και έτσι η διαφορά της με την αριθμητική λύση ελέγχεται εκ των υστέρων και (ii) οδηγεί σε μια κατάλληλη κατα σημείο αναπαράσταση της εξίσωσης του σφάλματος, της ίδιας μορφής με το αρχικό μας πρόβλημα. Έτσι μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση για το σφάλμα της αριθμητικής λύσης ακόμα και σε προβλήματα όπου η πραγματική λύση είναι δύσκολο να βρεθεί αναλυτικά.

Αρχικά, σ' αυτό το κεφάλαιο αναλύουμε την αριθμητική μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε. Έπειτα, ορίζουμε και υπολογίζουμε την ανακατασκευή της προσέγγισης. Χρησιμοποιώντας τεχνικές από την θεωρία των  $\Sigma.\Delta.E$ , παράγουμε τις εκτιμήσεις του σφάλματος και δείχνουμε ότι είναι κατάλληλης τάξης και ότι εξαρτώνται μόνο από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και από τις παραμέτρους της διακριτοποίησης. Τέλος έχουμε την υπολογιστική εκτίμηση του σφάλματος με χρήση της ανακατασκευής.

## 1.1 Γραμμικό μοντέλο

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα

$$(1.1) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), 0 < t < T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

όπου  $A$  ένας πραγματικός, θετικά ορισμένος,  $d \times d$  πίνακας,  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $u^0 \in \mathbb{R}^d$  και έστω  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  μια διαμέριση του  $[0, T]$ ,  $I_n := (t^{n-1}, t^n]$  και  $k_n := t^n - t^{n-1}$ . Στην εργασία αυτή δεν θα ασχοληθούμε με την μελέτη των αριθμητικών μεθόδων που θα χρησιμοποιήσουμε. Για αυτή την ανάλυση βλ.[5].

### Η μέθοδος Crank-Nicolson

Για δοσμένο  $\{v^n\}_{n=0}^N$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\bar{\partial}v^n := \frac{v^n - v^{n-1}}{k_n}, \quad v^{n-\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(v^n + v^{n-1}), \quad n = 1, \dots, N.$$

Οι κομβικές προσεγγίσεις  $U^m \in \mathbb{R}^d$  της μεθόδου στις τιμές  $u^m := u(t^m)$  της λύσης  $u$  του (1.33) ορίζονται ως εξής,

$$(1.2) \quad \bar{\partial}U^n + AU^{n-\frac{1}{2}} = f(t^{n-\frac{1}{2}}), \quad n = 1, \dots, N$$

με  $U^0 := u^0$ . Αφού το σφάλμα  $u^m - U^m$  είναι δεύτερης τάξης, για να εξασφαλίσουμε δεύτερης τάξης προσέγγιση  $U(t)$  του  $u(t)$ , για όλα τα  $t \in [0, T]$ , ορίζουμε την Crank - Nicolson προσέγγιση  $U$  της  $u$  ως μια γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στις τιμές στους κόμβους  $U^{n-1}$  και  $U^n$ ,

$$(1.3) \quad U(t) = U^{n-\frac{1}{2}} + (t - t^{n-\frac{1}{2}})\bar{\partial}U^n, \quad t \in I_n.$$



Ορίζουμε ως υπόλοιπο της  $U$  τη συνάρτηση

$$(1.4) \quad R(t) := U'(t) + AU(t) - f(t), \quad t \in I_n,$$

με  $R(t) \in \mathbb{R}^d$ , δηλαδή την ποσότητα που απέχει η προσεγγιστική λύση  $U$  από το να είναι ακριβής λύση του προβλήματος. Τώρα έχουμε

$$U'(t) + AU(t) = \bar{\partial}U^n + AU^{n-\frac{1}{2}} + (t - t^{n-\frac{1}{2}})A\bar{\partial}U^n, \quad t \in I_n,$$

απ'την οποία,μαζί και με την (1.2),έχουμε,

$$U'(t) + AU(t) = f(t^{n-\frac{1}{2}}) + (t - t^{n-\frac{1}{2}})A\bar{\partial}U^n, \quad t \in I_n,$$

Έτσι,το υπόλοιπο μπορεί να γραφτεί με την ακόλουθη μορφή

$$(1.5) \quad R(t) = (t - t^{n-\frac{1}{2}})A\bar{\partial}U^n + [f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t)], \quad t \in I_n.$$

Προφανώς,το  $R(t)$  είναι μια εκ των υστέρων ποσότητα πρώτης τάξης,ακόμα και στην περίπτωση μιας Σ.Δ.Ε. του τύπου  $u'(t) = f(t)$ . Η μέθοδος Crank-Nicolson είναι δεύτερης τάξης και αφού το σφάλμα  $e := u - U$  ικανοποιεί την  $e' + Ae = -R$ , εφαρμόζοντας ενεργειακές μεθόδους σ' αυτή την εξίσωση οδηγούμαστε αναπόφευκτα σε φράγματα μικρότερης τάξης.

### Ανακατασκευή Crank-Nicolson

Για να ανακτήσουμε βέλτιστη τάξη, εισάγουμε την Crank-Nicolson ανακατασκευή  $\hat{U}$  της  $U$ , βλ.[1], ένα συνεχές κατά τμήματα τετραγωνικό πολυώνυμο στον χρόνο  $\hat{U} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  που ορίζεται παρακάτω. Αρχικά, έστω  $\varphi : I_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  η γραμμική παρεμβάλλουσα της  $f$  στους κόμβους  $t^{n-1}$  και  $t^{n-\frac{1}{2}}$ ,

$$(1.6) \quad \varphi(t) := f(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n}(t - t^{n-\frac{1}{2}})[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})], \quad t \in I_n.$$

Επίσης ορίζουμε ένα κατά τμήματα τετραγωνικό πολυώνυμο  $\Phi$  με

$$\Phi(t) := \int_{t^{n-1}}^t \varphi(s)ds, \quad t \in I_n$$

π.χ.

$$(1.7) \quad \Phi(t) = (t - t^{n-1})f(t^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{k_n}(t - t^{n-1})(t^n - t)[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})].$$

Μια σημαντική ιδιότητα της  $\Phi$  είναι ότι

$$(1.8) \quad \Phi(t^{n-1}) = 0, \quad \Phi(t^n) = k_n f(t^{n-\frac{1}{2}}) = \int_{I_n} f(t^{n-\frac{1}{2}}) dt.$$

Τώρα εισάγουμε την Crank-Nicolson ανακατασκευή  $\hat{U}$  της  $U$  ως εξής,

$$(1.9) \quad \hat{U}(t) := U^{n-1} - \int_{t^{n-1}}^t AU(s) ds + \Phi(t) \quad \forall t \in I_n.$$

ή διαφορετικά,

$$\hat{U}'(t) + AU(t) = \varphi(t), \quad t \in I_n.$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα στην (1.9) με την μέθοδο του τραπεζιού, έχουμε

$$(1.10) \quad \hat{U}(t) = U^{n-1} - \frac{1}{2}(t - t^{n-1})A[U(t) + U^{n-1}] + \Phi(t) \quad \forall t \in I_n,$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως εξής,

$$\hat{U}(t) = U^{n-1} - A[(t - t^{n-1})U^{n-1} + \frac{1}{2}(t - t^{n-1})^2 \bar{\partial} U^n] + \Phi(t) \quad \forall t \in I_n.$$

Προφανώς  $\hat{U}(t^{n-1}) = U^{n-1}$ . Επίσης απο τις (1.8) και (1.2), έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{U}(t^n) &= U^{n-1} - k_n A U^{n-\frac{1}{2}} + \Phi(t^n) \\ &= U^{n-1} + k_n [-A U^{n-\frac{1}{2}} + f(t^{n-\frac{1}{2}})] = U^{n-1} + k_n \bar{\partial} U^n = U^n. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση 1.1.1.** (Επιλογή της  $\varphi$ ). Έστω  $\tilde{t} \in I_n$ . Αφού  $f(t) = f(\tilde{t}) + f'(\tilde{t})(t - \tilde{t}) + O(k_n^2)$ ,  $t \in I_n$ , είναι εύκολο να δούμε ότι οι μόνες γραμμικές συναρτήσεις  $\varphi$  που να ικανοποιούν την

$$\sup_{t \in I_n} |f(t) - \varphi(t)| = O(k_n^2)$$

είναι αυτές της μορφής

$$\varphi(t) = f(\tilde{t}) + [f'(\tilde{t}) + O(k_n)](t - \tilde{t}) + O(k_n^2)$$

Προφανώς

$$\int_{I_n} \varphi(t) dt = k_n f(\tilde{t}) + \frac{1}{2} [f'(\tilde{t}) + O(k_n)] (t^n - \tilde{t})^2 - (t^{n-1} - \tilde{t})^2 + O(k_n^3),$$

έτσι, για  $f'(\tilde{t}) \neq 0$ , η απαίτηση  $\int_{I_n} \varphi(t) dt = k_n f(\tilde{t})$  οδηγεί στο  $\tilde{t} = t^{n-\frac{1}{2}}$  και

$$\varphi(t) = f(t^{n-\frac{1}{2}}) + [f'(t^{n-\frac{1}{2}}) + O(k_n)](t - t^{n-\frac{1}{2}}).$$

Επιπλέον, η (1.6) είναι η επιλογή μας διότι για όλες τις γραμμικές συναρτήσεις  $\varphi$  στα  $I_n$  έχουμε  $\int_{I_n} \varphi(t) dt = k_n \varphi(\tilde{t})$  και έτσι η προϋπόθεση από την (1.8),  $\int_{I_n} \varphi(t) dt = k_n f(t^{n-\frac{1}{2}})$ , ικανοποιείται αν και μόνο αν η  $\varphi$  παρεμβάλει την  $f$  στο  $t^{n-\frac{1}{2}}$ . Για να βεβαιωθούμε ότι η  $\varphi(t)$  είναι δεύτερης τάξης προσέγγιση της  $f(t)$ , αφήνουμε την  $\varphi$  να παρεμβάλει την  $f$  σ'ένα επιπλέον σημείο  $t^{n,*} \in [t^{n-1}, t^n]$ . Στην περίπτωση που  $t^{n,*} = t^{n-\frac{1}{2}}$ , η  $\varphi$  είναι το πολυώνυμο Taylor της  $f$  στο  $t^{n-\frac{1}{2}}$ . Παρακάτω θα έχουμε  $t^{n,*} := t^{n-1}$ .

Από τις (4.3) και (1.6), προκύπτει

$$(1.11) \quad \hat{U}'(t) + AU(t) = f(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n} (t - t^{n-\frac{1}{2}}) [f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})], \quad \forall t \in I_n.$$

Έτσι, το υπόλοιπο  $\hat{R}(t)$  της  $\hat{U}$

$$(1.12) \quad \hat{R}(t) := \hat{U}'(t) + A\hat{U}(t) - f(t), \quad t \in I_n,$$

μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= A[\hat{U}(t) - U(t)] \\ &+ \left\{ f(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n} (t - t^{n-\frac{1}{2}}) [f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})] - f(t) \right\}, \quad \forall t \in I_n. \end{aligned}$$

### 1.1.1 Εκτίμηση του $\hat{U} - U$

Σαυτή την παράγραφο θα εκτιμήσουμε την ποσότητα  $\hat{U} - U$  η οποία θα είναι χρήσιμη στην συνέχεια.

Απο την (1.10) έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) - U(t) &= U^{n-1} - U(t) - \frac{1}{2}(t - t^{n-1})A[U(t) + U^{n-1}] + \Phi(t) \\ &= -(t - t^{n-1})\bar{\partial}U^n - \frac{1}{2}(t - t^{n-1})A[U(t) + U^{n-1}] + \Phi(t).\end{aligned}$$

Έτσι, και από την σχέση (1.2)

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) - U(t) &= (t - t^{n-1})[AU^{n-\frac{1}{2}} - f(t^{n-\frac{1}{2}})] - \frac{1}{2}(t - t^{n-1})A[U(t) + U^{n-1}] + \Phi(t) \\ &= -\frac{1}{2}(t - t^{n-1})A[U(t) - U^n] + \Phi(t) - (t - t^{n-1})f(t^{n-\frac{1}{2}}),\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την (1.7), για  $t \in I_n$

$$(1.13) \quad \hat{U}(t) - U(t) = (t - t^{n-1})(t^n - t)\left(\frac{1}{2}A\bar{\partial}U^n - \frac{1}{k_n}[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})]\right),$$

από που αμέσως παρατηρούμε ότι  $\max_{t \in I_n} |\hat{U}(t) - U(t)| = O(k_n^2)$ , αφού και το  $\bar{\partial}U^n$  είναι φραγμένο. Ας γράψουμε τώρα την (1.13) και στην μορφή

$$(1.14) \quad \hat{U}(t) - U(t) = \frac{1}{2}(t - t^{n-1})(t^n - t)(A\bar{\partial}U^n - \rho_{f,n})$$

εδώ  $\rho_{f,n} = \rho_{f,n}^{CN}$  με

$$(1.15) \quad \rho_{f,n}^{CN} := \frac{2}{k_n}[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})]$$

### 1.1.2 Εκτιμήσεις σφάλματος ομαλών δεδομένων

Έστω τα σφάλματα  $e$  και  $\hat{e}$  που ορίζονται ως  $e = u - U$  και  $\hat{e} = u - \hat{U}$ . Απο την (1.11), το αρχικό πρόβλημα και τους παραπάνω ορισμούς εύκολα έχουμε ότι

$$(1.16) \quad \hat{e}'(t) + Ae(t) = R_f(t)$$

με  $R_f = R_f^{CN}$  για την μέθοδο *Crank - Nicolson* να ορίζεται ως

$$(1.17) \quad R_f^{CN} := f(t) - f(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n}(t - t^{n-\frac{1}{2}})[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})], \quad t \in I_n.$$

### Εκτιμήσεις ενέργειας

Εάν πάρουμε στην (1.16) το εσωτερικό γινόμενο με το  $\hat{e}(t)$  έχουμε

$$(1.18) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\hat{e}(t)|^2 + (Ae(t), \hat{e}(t)) = (R_f(t), \hat{e}(t))$$

Τώρα,

$$(Ae(t), \hat{e}(t)) = \frac{1}{2} (\|e(t)\|^2 + \|\hat{e}(t)\|^2 - \|\hat{e}(t) - e(t)\|^2)$$

και

$$(R_f(t), \hat{e}(t)) \leq \|R_f(t)\|_{\star}^2 + \frac{1}{4} \|\hat{e}(t)\|^2$$

έτσι η (1.18) γίνεται

$$(1.19) \quad \frac{d}{dt} |\hat{e}(t)|^2 + \|e(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(t)\|^2 \leq \|\hat{U}(t) - U(t)\|^2 + 2\|R_f(t)\|_{\star}^2.$$

Θυμίζουμε ότι  $\|v\| = |A^{1/2}v|$  και  $\|v\|_{\star} = |A^{-1/2}v|$ .

### Άνω φράγμα

Αφού  $\hat{e}(0) = 0$ , εάν ολοκληρώσουμε την (1.19) από 0 έως  $t \leq T$ , έχουμε

$$(1.20) \quad |\hat{e}(t)|^2 + \int_0^t (\|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2) ds \\ \leq \int_0^t \|\hat{U}(s) - U(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \|R_f(s)\|_{\star}^2 ds.$$

Από την (1.20) εύκολα καταλήγουμε στην

$$(1.21) \quad \max_{0 \leq \tau \leq t} \{|\hat{e}(\tau)|^2 + \int_0^{\tau} (\|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2) ds\} \\ \leq \int_0^t \|\hat{U}(s) - U(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \|R_f(s)\|_{\star}^2 ds.$$

Έστω τώρα το  $\beta$  να είναι

$$(1.22) \quad \beta := \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt = \frac{1}{30}$$

τότε προφανώς

$$\int_{I_n} (t - t^{n-1})^2 (t^n - t)^2 dt = \beta k_n^5.$$

Έτσι, με αυτή την παρατήρηση και από την (1.14) έχουμε

$$(1.23) \quad \int_0^{t^m} \|\hat{U}(t) - U(t)\|^2 dt \leq \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^m k_n^5 (|A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 + \|\rho_{f,n}\|^2).$$

### Κάτω φράγμα

Προφανώς,

$$\|\hat{U}(s) - U(s)\| \leq \|e(s)\| + \|\hat{e}(s)\|$$

και έτσι,

$$(1.24) \quad \|\hat{U}(s) - U(s)\|^2 \leq 3 \left( \|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2 \right)$$

Συνδυάζοντας το πάνω και το κάτω φράγμα έχουμε

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \frac{1}{3} \int_0^t \|\hat{U}(s) - U(s)\|^2 ds &\leq \int_0^t (\|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2) ds \\ &\leq \int_0^t \|\hat{U}(s) - U(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \|R_f(s)\|_*^2 ds. \end{aligned}$$

Παρατηρώντας την (1.20), βλέπουμε ότι το  $|\hat{e}(t)|^2$  κυριαρχείται από το σφάλμα στην νόρμα ενέργειας,  $\int_0^t (\|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2) ds$  και από την μεταβολή των δεδομένων,  $\int_0^t \|R_f(s)\|_*^2 ds$ . Παρακάτω θα εκτιμήσουμε το κάτω φράγμα σαν συνάρτηση των  $U^n$  και των δεδομένων όπως και στο άνω φράγμα στην (1.23). Πρώτα λοιπόν παρατηρούμε ότι η (1.13) γίνεται

$$\|\hat{U}(t) - U(t)\|^2 \geq \frac{1}{4} (t - t^{n-1})^2 (t^n - t)^2 \left( \frac{1}{2} |A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 - \|\rho_{f,n}\|^2 \right)$$

και χρησιμοποιώντας την (1.22), έχουμε

$$(1.26) \quad \int_0^{t^m} \|\hat{U}(s) - U(s)\|^2 ds \geq \frac{\beta}{8} \sum_{n=1}^m k_n^5 |A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 - \frac{\beta}{4} \sum_{n=1}^m k_n^5 \|\rho_{f,n}\|^2.$$

Τελικά, από τις (1.25), (1.23) και (1.26) παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$(1.27) \quad \begin{aligned} & \frac{\beta}{24} \sum_{n=1}^m k_n^5 |A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 - \frac{\beta}{12} \sum_{n=1}^m k_n^5 \|\rho_{f,n}\|^2 \\ & \leq \int_0^{t^m} (\|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2) ds \\ & \leq \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^m k_n^5 (|A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 + \|\rho_{f,n}\|^2) + 2 \int_0^{t^m} \|R_f(s)\|_*^2 ds \end{aligned}$$

Εάν η  $f$  είναι σταθερή, τα άνω και κάτω φράγματα διαφέρουν μόνο κατα μια σταθερά, δηλαδή

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \frac{\beta}{24} \sum_{n=1}^m k_n^5 |A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 & \leq \int_0^{t^m} (\|e(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2) ds \\ & \leq \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^m k_n^5 |A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν η εκτίμηση (1.25) για  $t = t^m$  μπορεί να γραφτεί στην μορφή (1.28) με το να πολλαπλασιάσουμε το κάτω φράγμα με 2 και το άνω με 1/2.

**Λήμμα 1.1.1.** (Ευστάθεια). Έστω  $\{U^n\}_{n=0}^N$  οι προσεγγίσεις της Crank – Nicolson για το (1.33),

$$(1.29) \quad \bar{\partial} U^n + A U^{n-\frac{1}{2}} = \bar{f}^n$$

όπου  $\bar{f}^n = f(t^{n-\frac{1}{2}})$  ή  $\bar{f}^n = \frac{1}{k_n} \int_{I_n} f(s) ds$ . Τότε η ακόλουθη εκτίμηση ισχύει για  $m \leq N$ :

$$(1.30) \quad \sum_{n=1}^m k_n |A^{3/2} \bar{\partial} U^n|^2 + |A^2 U^m|^2 \leq |A^2 U^0|^2 + \sum_{n=1}^m k_n |A^{3/2} \bar{f}^n|^2.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον  $A$  στο σχήμα μας,

$$A\bar{\partial}U^n + A^2U^{n-\frac{1}{2}} = A\bar{f}^n,$$

και παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το  $2k_n A^2(U^n - U^{n-1})$  και έτσι

$$2k_n |A^{3/2}\bar{\partial}U^n|^2 + |A^2U^n|^2 - |A^2U^{n-1}|^2 = 2k_n (A\bar{f}^n, A^2\bar{\partial}U^n).$$

Αθροίζοντας τώρα από  $n = 1$  έως  $m$ , έχουμε

$$\sum_{n=1}^m 2k_n |A^{3/2}\bar{\partial}U^n|^2 + |A^2U^m|^2 = |A^2U^0|^2 + 2 \sum_{n=1}^m k_n (A\bar{f}^n, A^2\bar{\partial}U^n)$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του αριθμητικού γεωμετρικού μέσου και την *Cauchy – Schwarz* παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m 2k_n |A^{3/2}\bar{\partial}U^n|^2 + |A^2U^m|^2 &\leq |A^2U^0|^2 \\ &+ \sum_{n=1}^m k_n |A^{3/2}\bar{f}^n|^2 + \sum_{n=1}^m k_n |A^{3/2}\bar{\partial}U^n|^2 \end{aligned}$$

και έτσι η απόδειξη τελειώνει.  $\square$

Από τις (1.20), (1.23), (1.30) και (1.14) καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.1.1.** (*Εκτιμήσεις σφάλματος*). Έστω  $\{U^n\}_{n=0}^N$  να είναι οι προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος (1.33) από την *Crank – Nicolson*,  $e = u - U$  και  $\hat{e} = u - \hat{U}$ . Η ακόλουθη εκ των υστέρων εκτίμηση ισχύει για  $m \leq N$

$$(1.31) \quad |\hat{e}(t^m)|^2 + \int_0^{t^m} \left( \|e(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \|\hat{e}(s)\|^2 \right) ds \leq \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^m k_n^5 |A^{3/2}\bar{\partial}U^n|^2 + \mathcal{E}[f]$$

με το  $\beta$  από την (1.22) και

$$(1.32) \quad \mathcal{E}[f] := 2 \int_0^{t^m} \|R_f(s)\|_*^2 ds + \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^m k_n^5 \|\rho_{f,n}\|^2$$

με τα  $R_f$  και  $\rho_{f,n}$  από τις (1.17) και (1.15) αντίστοιχα για την μέθοδο των *Crank – Nicolson*



### 1.1.3 Υπολογιστική εκτίμηση του σφάλματος

Έχουμε ορίσει προηγουμένως ότι  $e = u - U$  και  $\hat{e} = u - \hat{U}$ , οπότε αν αντικαταστήσουμε το  $e$  στην σχέση (1.16) με το  $\hat{e} + \hat{U} - U$  παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\hat{e}'(t) + A\hat{e}(t) = -A(\hat{U} - U) + R_f^{CN}$$

με

$$R_f^{CN} := f(t) - f(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n}(t - t^{n-\frac{1}{2}})[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})].$$

Επίσης,  $\hat{e}(0) = 0$ , οπότε καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα της ίδιας μορφής με το αρχικό μας

$$\begin{cases} \hat{e}'(t) + A\hat{e}(t) = -A(\hat{U} - U) + R_f^{CN}, & 0 < t < T \\ \hat{e}(0) = \hat{e}^0 = (0, 0) \end{cases}$$

αλλά με άγνωστη συνάρτηση το  $\hat{e}$  και διαφορετικό δεξί μέλος. Επιλύοντας αυτό το σύστημα πάλι με την ίδια αριθμητική μέθοδο έχουμε την προσέγγιση του  $\hat{e}$  στους κόμβους της διαμέρισής μας. Την ποσότητα  $\hat{U} - U$  την έχουμε υπολογίσει, οπότε παίρνουμε μια εκ των υστέρων εκτίμηση για το σφάλμα μας,  $e \simeq \hat{e} + \hat{U} - U$ .

Στο τελευταίο κεφάλαιο παραθέτουμε και τα αριθμητικά αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας.

## 1.2 Μη γραμμικό μοντέλο

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα

$$(1.33) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = B(t, u(t)), 0 < t < T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

όπου  $A$  ένας πραγματικός, θετικά ορισμένος,  $d \times d$  πίνακας,  $B : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $u^0 \in \mathbb{R}^d$  και έστω  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  μια διαμέριση του  $[0, T]$ ,  $I_n := (t^{n-1}, t^n]$  και  $k_n := t^n - t^{n-1}$ .

### Η μέθοδος Crank-Nicolson

Οι προσεγγίσεις της μεθόδου Crank-Nicolson  $U^m \in \mathbb{R}^d$  στις τιμές της λύσης του (1.33) στους κόμβους  $u^m := u(t^m)$  ορίζονται ως εξής

$$(1.34) \quad \bar{\delta}U^n + AU^{n-\frac{1}{2}} = B(t^{n-\frac{1}{2}}, U^{n-\frac{1}{2}}), \quad n = 1, \dots, N$$

με  $U^0 := u(0)$ . Όπως και πριν, ορίζουμε την Crank-Nicolson προσέγγιση  $U$  της  $u$  παρεμβάλλοντας γραμμικά τις τιμές στους κόμβους  $U^n$  και  $U^{n-1}$ ,

$$(1.35) \quad U(t) = U^{n-\frac{1}{2}} + (t - t^{n-\frac{1}{2}})\bar{\delta}U^n, \quad t \in I_n.$$

### Ανακατασκευή Crank-Nicolson

Έστω η  $b(t) : I_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  να είναι η γραμμική συνάρτηση παρεμβολής του  $B(\cdot, U(\cdot))$  στους κόμβους  $t^n$  και  $t^{n-\frac{1}{2}}$ ,

$$(1.36) \quad \begin{aligned} b(t) &= B(t^{n-\frac{1}{2}}, U^{n-\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{2}{k_n}(t - t^{n-\frac{1}{2}})[B(t^{n-\frac{1}{2}}, U^{n-\frac{1}{2}}) - B(t^{n-1}, U^{n-1})], \quad t \in I_n. \end{aligned}$$

Ορίζουμε πάλι την Crank-Nicolson ανακατασκευή  $\hat{U}$  της  $U$  ως

$$(1.37) \quad \hat{U}(t) = U^{n-1} - A \int_{I_n} U(s)ds + \int_{t^{n-1}}^t b(s)ds, \quad t \in I_n$$

ή αλλιώς

(1.38)

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) = & U^{n-1} - \frac{1}{2}(t - t^{n-1})A[U(t) + U^{n-1}] + (t - t^{n-1})B(t^{n-\frac{1}{2}}, U^{n-\frac{1}{2}}) \\ & + \frac{1}{k_n}(t - t^{n-1})(t^n - t)[B(t^{n-\frac{1}{2}}, U^{n-\frac{1}{2}}) - B(t^{n-1}, U^{n-1})], \quad t \in I_n\end{aligned}$$

### 1.2.1 Εκτίμηση του $\hat{U} - U$

Εάν παραγωγίσουμε την (1.37) έχουμε αμέσως

$$(1.39) \quad \hat{U}'(t) = -AU(t) + b(t), \quad t \in I_n$$

και εκτιμούμε την ποσότητα  $\hat{U} - U$  για  $t \in I_n$

$$(1.40) \quad \hat{U}(t) - U(t) =$$

$$\frac{1}{2}(t - t^{n-1})(t^n - t) \left\{ A\bar{\delta}U^n - \frac{2}{k_n}[B(t^{n-\frac{1}{2}}, U^{n-\frac{1}{2}}) - B(t^{n-1}, U^{n-1})] \right\}, \quad t \in I_n$$

### 1.2.2 Υπολογιστική εκτίμηση του σφάλματος

Όπως και στην περίπτωση του γραμμικού προβλήματος αντικαθιστούμε στην αρχική μας εξίσωση τις σχέσεις  $e = u - U$  και  $\hat{e} = u - \hat{U}$ . Έτσι έχουμε

$$\hat{e}'(t) + \hat{U}'(t) + Au = B(t, u(t))$$

η οποία μέσω της (1.39) γίνεται

$$\hat{e}'(t) + Ae = B(t, u(t)) - b(t).$$

Εάν αντικαταστήσουμε όπου  $e$  το  $\hat{e} + \hat{U} - U$  παίρνουμε

$$\hat{e}'(t) + A\hat{e} = -A\hat{U} - U + B(t, u(t)) - b(t).$$

και επειδή  $\hat{e}(0) = 0$  καταλήγουμε σ'ένα σύστημα όμοιο με το αρχικό μας πρόβλημα

$$\begin{cases} \hat{e}'(t) + A\hat{e}(t) = -A(\hat{U} - U) + B(t, u(t)) - b(t), & 0 < t < T \\ \hat{e}(0) = \hat{e}^0 = (0, 0). \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να δράσουμε ακριβώς όπως στο γραμμικό μοντέλο, διότι στο δεξί μέλος της εξίσωσης υπάρχει η πραγματική λύση, η οποία δεν είναι γνωστή. Γι'αυτό τον λόγο αντικαθιστούμε την  $u$  με  $\hat{e} + \hat{U}$  και το πρόβλημά μας παίρνει την μορφή

$$\begin{cases} \hat{e}'(t) + A\hat{e}(t) = -A(\hat{U} - U) + B(t, \hat{e} + \hat{U}) - b(t), & 0 < t < T \\ \hat{e}(0) = \hat{e}^0 = (0, 0) \end{cases}$$

Το πρόβλημα που καλούμαστε να επιλύσουμε τώρα έχει μοναδικό άγνωστο το  $\hat{e}$ . Με την ίδια αριθμητική μέθοδο παράγουμε την προσέγγιση του  $\hat{e}$  και έτσι μέσω της  $e = \hat{e} + \hat{U} - U$ , οδηγούμαστε σε μία εκ των υστέρων εκτίμηση για το αρχικό μας σφάλμα.

## Κεφάλαιο 2

# Εκτιμήσεις σφάλματος με χρήση του δυϊκού προβλήματος

Σ αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μία άλλη προσέγγιση της εκ των υστέρων εκτίμησης του σφάλματος. Αρχικά θα αναλύσουμε την αριθμητική μέθοδο που θα εφαρμόσουμε στο πρόβλημά μας και έπειτα θα ορίσουμε το δυϊκό πρόβλημα. Το δυϊκό πρόβλημα, το οποίο προκύπτει από το αρχικό, θα μας φανεί χρήσιμο στο να καταλήξουμε στις εκ των υστέρων εκτιμήσεις που επιθυμούμε για το σφάλμα

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), 0 < t < T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

με τις ίδιες υποθέσεις του κεφαλαίου 1 το οποίο το γράφουμε στην μορφή

$$(2.1) \quad u'(t) = g(u(t)), 0 < t \leq T, u(0) = u^0,$$

όπου  $g(u(t)) = f(t) - Au(t)$ ,  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

## Η μέθοδος backward Euler

Για την αριθμητική λύση του (2.1) έχουμε : Έστω  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots < t_N = T$  μια διακριτοποίηση του χρόνου με βήμα  $k_n = t_n - t_{n-1}$  και τα αντίστοιχα διαστήματα  $I_n = (t_{n-1}, t_n]$ . Η μέθοδος backward Euler θα μας δώσει τις προσεγγίσεις  $U(t_n)$  σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο

$$(2.2) \quad U(t_n) = U(t_{n-1}) + k_n g(U(t_n)),$$

και  $U(0) = u^0$

## 2.1 Εκτίμηση σφάλματος

### Η μέθοδος backward Euler

Έστω η συνάρτηση  $U(t)$  η οποία ορίζεται στο  $[0, T]$  και σχετίζεται με τις τιμές της προσεγγιστικής λύσης στους κόμβους  $U(t_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  ως εξής

$$U(t) = U(t_n), \quad t \in (t_{n-1}, t_n].$$

Δηλαδή, η  $U(t)$  είναι μια αριστερά συνεχής συνάρτηση, κατά τμήματα σταθερή στο  $[0, T]$  και ίση με  $U(t_n)$  στο  $I_n$  και έτσι έχει ένα άλμα από το όριο από τα αριστερά  $U(t_{n-1}^-) = U(t_{n-1})$  στο όριο από τα δεξιά  $U(t_{n-1}^+) = U(t_n)$  στον χρόνο  $t = t_{n-1}$ . Τώρα γράφουμε την backward Euler στην μορφή

$$U(t_n) = U(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(U(t)) dt,$$

ή διαφορετικά

$$(2.3) \quad U(t_n) \cdot v = U(t_{n-1}) \cdot v + \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(U(t)) \cdot v dt,$$

για κάθε  $v \in \mathbb{R}^d$  και με την τελεία να συμβολίζει το βαθμωτό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^d$ . Αυτή η μέθοδος αναφέρεται και ως  $dG(0)$ , η *discontinuous Galerkin* τάξης

μηδέν, που αντιστοιχεί στο να προσεγγίζεται η ακριβής λύση  $u(t)$  από μια καταμήματα σταθερή συνάρτηση  $U(t)$  η οποία ικανοποιεί την συνθήκη ορθογωνιότητας Galerkin (2.3).

Η γενική μέθοδος  $dG(q)$  παίρνει την μορφή (2.3), με τον περιορισμό της λύσης  $U(t)$  σε κάθε χρονικό διάστημα  $I_n$  και με την συνάρτηση test  $v$  σε κάθε χρονικό διάστημα  $I_n$  να είναι πολυώνυμο βαθμού  $q$ .

Τώρα θα παράγουμε μια εκ των υστέρων εκτίμηση του σφάλματος, με σκοπό να ελέγχουμε το γινόμενο του σφάλματος  $e(T) = (u - U)(T)$  στον τελικό χρόνο  $T$  με ένα διάνυσμα  $\psi$ , όπου υποθέτουμε ότι το  $\psi$  είναι κανονικοποιημένο έτσι ώστε  $\|\psi\| = 1$ . Εδώ, με  $\|\cdot\|$  συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα στον  $\mathbb{R}^d$ . Ακολούθως εισάγουμε το γραμμικοποιημένο δυϊκό πρόβλημα, βλ.[2], το οποίο τρέχει αντίθετα στον χρόνο,

$$(2.4) \quad -\phi'(t) = B^\top(t)\phi(t), \quad 0 \leq t < T, \quad \phi(T) = \psi,$$

με

$$B(t) = \int_0^1 g'(su(t) + (1-s)U(t))ds,$$

όπου  $u(t)$  είναι η ακριβής λύση,  $U(t)$  η προσεγγιστική,  $g'$  η Ιακωβιανή της  $g$  και με  $\top$  συμβολίζουμε τον ανάστροφο. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -B(t)(U(t) - u(t)) &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u}(su(t) + (1-s)U(t))ds(u - U) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}(su(t) + (1-s)U(t))ds \\ &= g(u(t)) - g(U(t)) \end{aligned}$$

Ξεκινάμε με την ταυτότητα

$$e(T) \cdot \psi = e(T) \cdot \psi + \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} e \cdot (-\phi' - B^\top \phi) dt,$$

και ολοκληρώνουμε κατα μέρη σε κάθε διάστημα  $(t_{n-1}, t_n)$  για να πάρουμε την αναπαράσταση του σφάλματος :

$$e(T) \cdot \psi = \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} (e' - Be) \cdot \phi \, dt - \sum_{n=1}^N (U(t_n) - U(t_{n-1})) \cdot \phi(t_{n-1}),$$

όπου οι τελευταίοι όροι προκύπτουν από τα άλματα της  $U(t)$  στους κόμβους  $t = t_{n-1}$ . Έχουμε λοιπόν ότι η  $u$  λύνει την διαφορική εξίσωση  $u' - g(u) = 0$  και ότι  $U' = 0$  σε κάθε χρονικό διάστημα  $(t_{n-1}, t_n)$ , έτσι

$$e' - Be = u' - g(u) - U' + g(U) = -U' + g(U) = g(U)$$

στο διάστημα  $(t_{n-1}, t_n)$  αλλά και

$$e(T) \cdot \psi = - \sum_{n=1}^N (U(t_n) - U(t_{n-1})) \cdot \phi(t_{n-1}) + \int_0^T g(U) \cdot \phi \, dt.$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα Galerkin (2.3) με  $v = \bar{\phi}_n$ , την μέση τιμή της  $\phi$  στο  $I_n$ , συνάγεται

$$e(T) \cdot \psi = - \sum_{n=1}^N (U(t_n) - U(t_{n-1})) \cdot (\phi(t_{n-1}) - \bar{\phi}_n) + \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(U) \cdot (\phi - \bar{\phi}_n) \, dt.$$

Μέχρι τώρα

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} g(U) \cdot (\phi - \bar{\phi}_n) \, dt = 0,$$

διότι η  $g(U(t))$  είναι σταθερή στο  $(t_{n-1}, t_n]$  και η αναπαράσταση του σφάλματος παίρνει την μορφή

$$e(T) \cdot \psi = - \sum_{n=1}^N (U(t_n) - U(t_{n-1})) \cdot (\phi(t_{n-1}) - \bar{\phi}_n).$$

Τελικά, από την εκτίμηση

$$\|\phi(t_{n-1}) - \bar{\phi}_n\| \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\phi'(t)\| \, dt,$$



παίρνουμε την ακόλουθη εκ των υστέρων εκτίμηση σφάλματος για την μέθοδο  $dG(0)$

$$(2.5) \quad |e(T) \cdot \psi| \leq S_c(T, \psi) \max_{1 \leq n \leq N} \|U(t_n) - U(t_{n-1})\|,$$

όπου  $S_c(T, \psi)$ , ορίζεται ως

$$(2.6) \quad S_c(T, \psi) = \int_0^T \|\phi'(t)\| dt.$$

Μεγιστοποιώντας ως προς  $\psi$  με  $\|\psi\| = 1$ , έχουμε εκ των υστέρων έλεγχο της ευκλείδειας νόρμας του σφάλματος  $e(T)$ :

$$(2.7) \quad \|e(T)\| \leq S_c(T) \max_{1 \leq n \leq N} \|U(t_n) - U(t_{n-1})\|,$$

με

$$(2.8) \quad S_c(T) = \max_{\|\psi\|=1} S_c(T, \psi)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$(2.9) \quad \|e(T)\| \leq S_c(T) \max_{0 \leq t \leq T} \|k(t)R(U(t))\|,$$

όπου  $k(t) = k_n = t_n - t_{n-1}$  για  $t \in (t_{n-1}, t_n]$ , και  $R(U(t)) = (U(t_n) - U(t_{n-1}))/k_n = f(U(t_n))$  το υπόλοιπο το οποίο παίρνουμε εάν βάλουμε την διακριτή λύση στην διαφορική εξίσωση.

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε την εκτίμηση (2.5) είναι

$$(2.10) \quad |e(T) \cdot \psi| \leq \int_0^T k(t)R(U(t))\|\phi'(t)\| dt,$$

όπου τώρα η λύση του δυϊκού υπάρχει ως βάρος σε ένα ολοκλήρωμα ως προς τον χρόνο που περιέχει το υπόλοιπο  $R(U(t))$ . Μεγιστοποιώντας ως προς  $k(t)R(U(t))$  και ολοκληρώνοντας την  $\|\phi'(t)\|$  παίρνουμε την αρχική εκτίμηση (2.9).

## Η μέθοδος Crank-Nicolson

Την μέθοδο Crank-Nicolson την αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το δυϊκό πρόβλημα (2.4) παραμένει το ίδιο, αλλά οι εκτιμήσεις του σφάλματος που παράγουμε παραπάνω δεν ισχύουν γι' αυτή την μέθοδο διότι χρησιμοποιούμε ιδιότητες της backward Euler .

Έστω λοιπόν  $U_{CN}$  να είναι το διάνυσμα της προσεγγιστικής λύσης του (2.1) που παίρνουμε από την μέθοδο Crank-Nicolson και έστω  $U$  να είναι ένα πολυώνυμο παρεμβολής της  $U_{CN}$ . Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής που πήραμε και στο πρώτο κεφάλαιο.

Για την εκτίμηση του σφάλματος έχουμε

$$\begin{aligned} e(T) \cdot \psi &= e(T) \cdot \psi - e(0) \cdot \phi(0) + \int_0^T e \cdot (-\phi' - B^\top \phi) ds \\ &= [e(t) \cdot \phi(t)]_0^T - \int_0^T e \cdot \phi' ds - \int_0^T e \cdot B^\top \phi ds \\ &= \int_0^T e' \cdot \phi ds - \int_0^T Be \cdot \phi ds \\ &= \int_0^T (e' - Be) \cdot \phi ds \end{aligned}$$

και από την σχέση

$$e' - Be = u' - g(u) - U' + g(U) = -U' + g(U)$$

έχουμε

$$(2.11) \quad e(T) \cdot \psi = \int_0^T (-U' + g(U)) \cdot \phi ds$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας την σχέση (1.5)

$$(2.12) \quad e(T) \cdot \psi = \int_0^T R \cdot \phi ds$$

Όπως είδαμε, το  $R(t)$  είναι μια εκ των υστέρων ποσότητα πρώτης τάξης και έτσι καταλήγουμε σε μια εκ των υστέρων εκτίμηση του σφάλματος.

Εάν θέλουμε να συνδυάσουμε την ιδέα της ανακατασκευής με αυτά που αναλύουμε σ' αυτό το κεφάλαιο, η διαδικασία έχει ως εξής:

Έχουμε δει ότι το  $\hat{e}$  είναι μία καλή προσέγγιση του  $e$ . Εάν βγάλουμε λοιπόν μία εκτίμηση για το  $\hat{e}$ , αυτή θα είναι καλή εκτίμηση και για το πραγματικό σφάλμα της μεθόδου.

Μπορούμε να ορίσουμε το δυϊκό πρόβλημα και αντί τον πίνακα  $B$  να έχουμε τον πίνακα  $\hat{B}$  ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$\hat{B}(t) = \int_0^1 g'(su(t) + (1-s)\hat{U}(t))ds,$$

έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} -\hat{B}(t)(\hat{U}(t) - u(t)) &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u}(su(t) + (1-s)\hat{U}(t))ds(u - \hat{U}) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}(su(t) + (1-s)\hat{U}(t))ds \\ &= g(u(t)) - g(\hat{U}(t)) \end{aligned}$$

Για την εκτίμηση του σφάλματος ξεκινάμε πάλι με την ταυτότητα

$$\begin{aligned} \hat{e}(T) \cdot \psi &= \hat{e}(T) \cdot \psi - \hat{e}(0) \cdot \phi(0) + \int_0^T \hat{e} \cdot (-\phi' - \hat{B}^\top \phi)ds \\ &= [\hat{e}(t) \cdot \phi(t)]_0^T - \int_0^T \hat{e} \cdot \phi' ds - \int_0^T \hat{e} \cdot \hat{B}^\top \phi ds \\ &= \int_0^T \hat{e}' \cdot \phi ds - \int_0^T \hat{B} \hat{e} \cdot \phi ds \\ &= \int_0^T (\hat{e}' - \hat{B} \hat{e}) \cdot \phi ds \end{aligned}$$

και από την σχέση

$$\hat{e}' - \hat{B} \hat{e} = u' - g(u) - \hat{U}' + g(\hat{U}) = -\hat{U}' + g(\hat{U})$$

έχουμε

$$(2.13) \quad \hat{e}(T) \cdot \psi = \int_0^T (-\hat{U}' + g(\hat{U})) \cdot \phi ds$$

Από την σχέση (1.12), η (2.13) γίνεται

$$(2.14) \quad \hat{e}(T) \cdot \psi = \int_0^T \hat{R} \cdot \phi ds$$

και έτσι, αφού έχουμε εκτιμήσει την ποσότητα  $\hat{R}$  καταλήγουμε σε μία εκ των υστέρων εκτίμηση του σφάλματος.

Τέλος, εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε άλλο πολυώνυμο παρεμβολής θα πρέπει να έχουμε μία αντίστοιχη εκτίμηση της ποσότητας  $-U' + g(U)$ .

## Κεφάλαιο 3

# Εκτιμήσεις σφαλμάτων με χρήση της μεθόδου IDeC

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μια μέθοδο που στηρίζεται στην ιδέα του Zadunaisky , βλ. [4], για την εκτίμηση του ολικού σφάλματος διακριτοποίησης των μεθόδων Runge-Kutta .

Με την μέθοδο αυτή, για να εκτιμήσουμε το σφάλμα που έχουμε στην διακριτοποίηση των μοντέλων που αναφέραμε στα προηγούμενα κεφάλαια, κατασκευάζουμε ένα άλλο πρόβλημα, το λεγόμενο γειτονικό πρόβλημα. Το γειτονικό πρόβλημα έχει ως ακριβή λύση ένα πολυώνυμο που παρεμβάλλει την λύση του αρχικού μας προβλήματος και έτσι μπορούμε να γνωρίζουμε το σφάλμα του. Τέλος με το σφάλμα του γειτονικού προβλήματος εκτιμούμε το αρχικό σφάλμα που έχουμε.

Αναλυτικότερα, η μέθοδος έχει ως εξής:

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$(3.1) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), & t \in (0, 1] \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την προσεγγιστική λύση,  $u_h^{[0]} := u_h$ , που έχουμε

από την έμμεση *Euler* στο πλέγμα  $\Delta_h, h = \frac{1}{mN_1} = \frac{1}{N}$  και συμβολίζουμε  $p^{[0]}(t) = p_i^{[0]}(t), t \in J_i, i = 0, \dots, N_1 - 1$ , το κατα τμήματα πολυώνυμο βαθμού  $m$  που παρεμβάλλει τις τιμές της  $u_h^{[0]}$ ,

$$p_i^{[0]}(t_j) = u_j^{[0]}, j = im, \dots, (i+1)m, i = 0, \dots, N_1 - 1.$$

Χρησιμοποιώντας την παρεμβάλλουσα συνάρτηση, βλ.[3], κατασκευάζουμε ένα γειτονικό πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με το αρχικό και λύνεται ακριβώς από την  $p^{[0]}(t)$ :

$$(3.2) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) + d^{[0]}(t), & t \in (0, 1] \\ u(0) = p^{[0]}(0) = u^0 \end{cases}$$

όπου

$$d^{[0]}(t) := p^{[0]'}(t) + Ap^{[0]}(t) - f(t).$$

Τώρα λύνουμε το γειτονικό πρόβλημα με την ίδια αριθμητική μέθοδο και παίρνουμε μια προσεγγιστική λύση  $p_h^{[0]}$  για την  $p^{[0]}(t)$ . Αυτό σημαίνει ότι για την λύση του γειτονικού προβλήματος (3.2) γνωρίζουμε το ολικό σφάλμα το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε το άγνωστο σφάλμα του αρχικού προβλήματος (3.1):

$$(3.3) \quad \varepsilon_h = R_h(u) - u_h \approx \delta_h^{[0]} := R_h(p^{[0]}) - p_h^{[0]} = u_h^{[0]} - p_h^{[0]}.$$

όπου  $R_h(x)$  είναι η προβολή του  $x$  στους κόμβους της διαμέρισής μας.

Ο P.E.Zadunaisky διατύπωσε το ακόλουθο επιχείρημα για να δουλεύει αυτή η μέθοδος: Εάν οι τιμές  $u_h$  είναι καλές προσεγγίσεις των τιμών της ακριβούς λύσης στα σημεία της διαμέρισης, τότε η συνάρτηση  $p_{[0]}(t)$  είναι καλή προσέγγιση της λύσης  $u(t)$ . Συνεπώς, το υπόλοιπο  $d^{[0]}(t)$  είναι μικρό και το γειτονικό πρόβλημα (3.2) με το αρχικό πρόβλημα (3.1) είναι κοντά. Αυτό σημαίνει ότι το ολικό σφάλμα της λύσης του (3.2) είναι κοντά στο ολικό σφάλμα της λύσης του (3.1) και έτσι η εκτίμηση (3.3) θα μας δώσει πληροφορίες για το μέγεθος του.

Έχοντας την εκτίμηση για το ολικό σφάλμα της λύσης  $u_h^{[0]}$  μπορούμε να βελτιώσουμε την λύση μας θέτοντας

$$u_h^{[1]} = u_h^{[0]} + \delta_h^{[0]} = u_h^{[0]} + (R_h(p^{[0]}) - p_h^{[0]}).$$

Χρησιμοποιούμε αυτές τις τιμές για να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση παρεμβολής  $p^{[1]}(t)$  απαιτώντας  $p_i^{[1]}(t_j) = u_j^{[1]}$ ,  $j = im, \dots, (i+1)m$ ,  $i = 0, \dots, N_1 - 1$ , και το αντίστοιχο υπόλοιπο να είναι

$$d^{[1]}(t) := p^{[1]'}(t) + Ap^{[1]}(t) - f(t).$$

Έτσι το επόμενο γειτονικό πρόβλημα είναι

$$(3.4) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) + d^{[1]}(t), & t \in (0, 1] \\ u(0) = p^{[0]}(0) = u^0 \end{cases}$$

και το λύνουμε πάλι με την ίδια μέθοδο, για να πάρουμε την προσέγγιση  $p_h^{[1]}$  η οποία χρησιμοποιείται για να διορθώσουμε την βασική μας λύση :

$$u_h^{[2]} = u_h^{[0]} + \delta_h^{[1]} = u_h^{[0]} + (R_h(p^{[1]}) - p_h^{[1]}).$$

Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί αντιστοίχως.

Το ότι η μέθοδος συγκλίνει, βλ. [],, το γνωρίζουμε μόνο για την μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε. Στις εφαρμογές που κάναμε εφαρμόσαμε την IDeC και με την μέθοδο Crank-Nicolson και διαπιστώσαμε, πειραματικά, ότι συγκλίνει .

Τέλος, το πώς μπορούμε να συνδυάσουμε αυτή την μέθοδο με την ιδέα της ανακατασκευής το αναλύουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

# Κεφάλαιο 4

## εφαρμογές

Σ' αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζουμε και συγκρίνουμε τις παραπάνω ιδέες για την εκ των υστέρων εκτίμηση του σφάλματος στην αριθμητική επίλυση συστημάτων Σ.Δ.Ε. Αρχικά θα ασχοληθούμε με ένα απλό γραμμικό σύστημα Σ.Δ.Ε. και έπειτα με ένα μη γραμμικό.

### 4.1 Γραμμικό μοντέλο

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:  
να βρεθεί  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  που να ικανοποιεί:

$$(4.1) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

όπου  $u^0 = (1, 1)$ ,  $T = 10$  και  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$



### 4.1.1 Ανακατασκευή

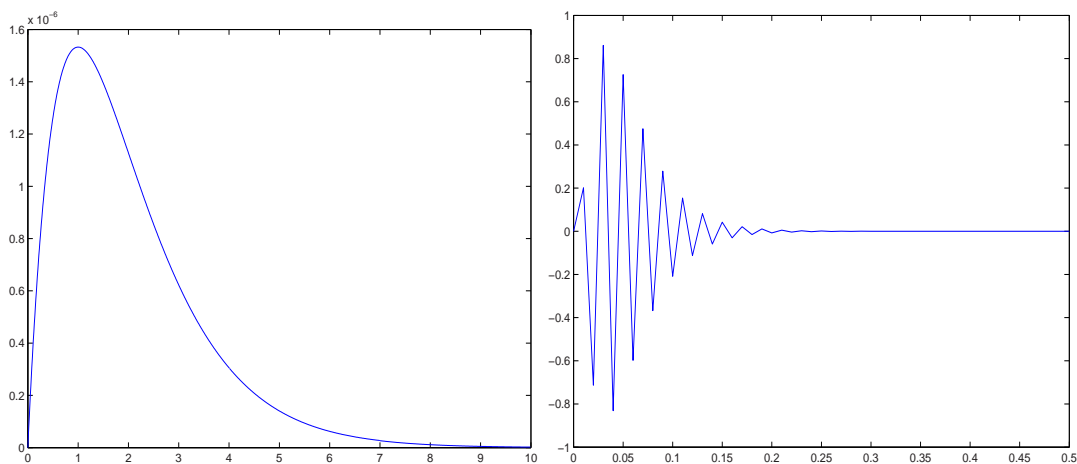
Αρχικά, λύνουμε το (4.1) με την μέθοδο Crank-Nicolson . Προσεγγίζουμε το πραγματικό σφάλμα  $e = u - U$  από την σχέση  $e = \hat{e} + \hat{U} - U$ , όπου  $u$  η πραγματική λύση του παραπάνω προβλήματος,  $U$  η γραμμική παρεμβολή της προσέγγισης που έχουμε από την αριθμητική μέθοδο,  $\hat{U}$  η ανακατασκευή της  $U$  και  $\hat{e} = u - \hat{U}$ .

Το  $\hat{e}$  το προσεγγίζουμε επιλύοντας το παρακάτω σύστημα πάλι με την μέθοδο Crank-Nicolson .

$$\begin{cases} \hat{e}'(t) + A\hat{e}(t) = A(\hat{U} - U), & 0 < t < 10 \\ \hat{e}(0) = \hat{e}^0 = (0, 0) \end{cases}$$

το οποίο προκύπτει από το (4.1) εάν αντικαταστήσουμε την  $u$  από τις σχέσεις  $e = u - U$  και  $e = \hat{e} + \hat{U} - U$ .

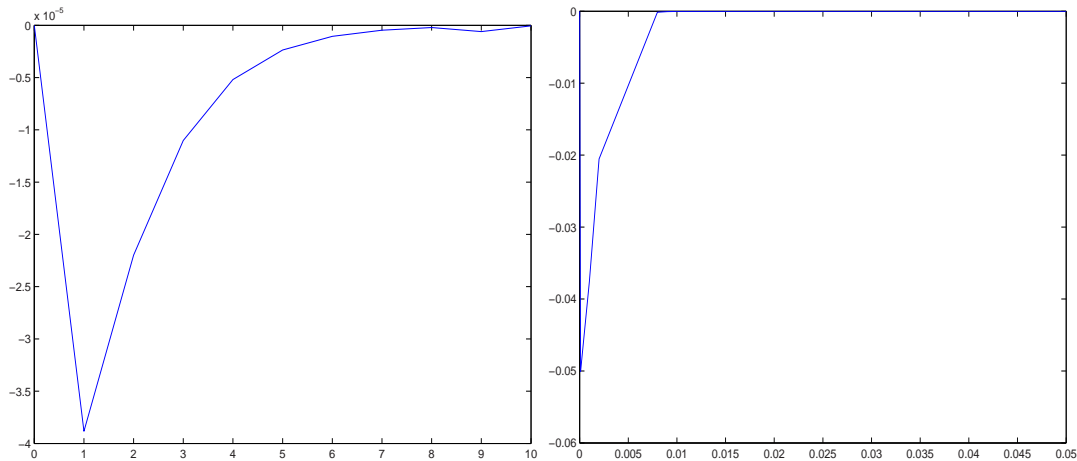
Στα παρακάτω γραφήματα επαληθεύεται ότι το  $\hat{e}$  είναι μια καλή προσέγγιση του πραγματικού σφάλματος  $e = u - U$



Σχήμα 4.1: Στο αριστερό γράφημα εμφανίζεται η διαφορά του προσεγγιστικού σφάλματος μείον το πραγματικό για την πρώτη συνιστώσα της λύσης μας και στο δεξιά για την δεύτερη.

### 4.1.2 Δυϊκό

Στο ίδιο σύστημα εφαρμόσαμε την ιδέα του δευτέρου κεφαλαίου. Αυτή η μέθοδος υστερεί υπολογιστικά των άλλων δυο, διότι οδηγεί στην εκτίμηση του σφάλματος για μια μόνο χρονική στιγμή. Έτσι για να έχουμε μια καλή εκτίμηση για το σφάλμα πρέπει να επιλύσουμε αρκετά δυϊκά προβλήματα.



Σχήμα 4.2: Στο αριστερό γράφημα εμφανίζεται η διαφορά του προσεγγιστικού σφάλματος μειον το πραγματικό για την πρώτη συνιστώσα της λύσης μας και στο δεξιά για την δεύτερη.

Επιλύουμε το (4.1) με την έμμεση Euler . Έπειτα κατασκευάζουμε το δυϊκό πρόβλημα όπως στην (2.4) με αρχική συνθήκη  $\psi = (1, 0)$  όταν ελέγχουμε το σφάλμα της πρώτης συνιστώσας της λύσης και  $\psi = (0, 1)$  όταν ελέγχουμε το σφάλμα της δεύτερης. Επιλύουμε το δυϊκό πρόβλημα πάλι με την έμμεση Euler , για διάφορους τελικούς χρόνους και προσεγγίζουμε το σφάλμα σε κάθε τελικό χρόνο από την σχέση

$$e(T) \cdot \psi = - \sum_{n=1}^N (U(t_n) - U(t_{n-1})) \cdot (\phi(t_{n-1}) - \bar{\phi}_n)$$

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε δέκα κόμβους της διαμέρισης, λύνουμε δέκα δυϊκά

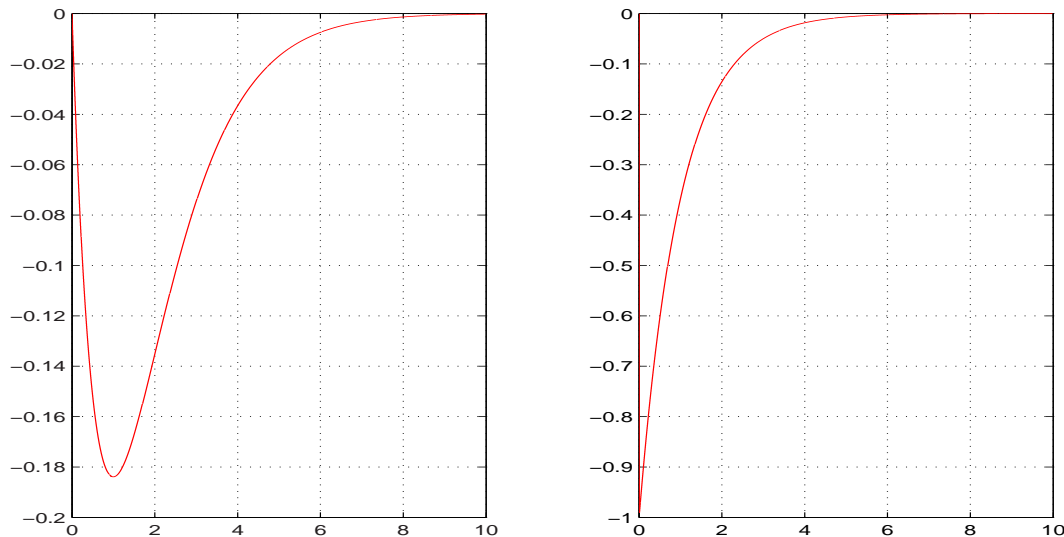
προβλήματα και προσεγγίζουμε το σφάλμα για κάθε συνιστώσα της λύσης από την παραπάνω σχέση.

### 4.1.3 IDec

Τέλος, για την μέθοδο του τρίτου κεφαλαίου επιλύουμε πάλι το (4.1) με την έμμεση Euler και παράγουμε την προσεγγιστική λύση  $\{U^n\}_{n=1}^N$ . Θεωρούμε ένα τετραγωνικό πολυώνυμο της μορφής

$$p(t) = U^{n-1} + \frac{U^n - U^{n-1}}{k_n}(t - (n-1)k_n) + \frac{\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k_n} - \frac{U^n - U^{n-1}}{k_n}}{k_n}(t - (n-1)k_n)(t - nk_n)$$

που παρεμβάλλει την προσεγγιστική μας λύσης στους κόμβους  $U^{n-1}, U^n, U^{n+1}$ .



Σχήμα 4.3: Στο αριστερό γράφημα εμφανίζεται η διαφορά του προσεγγιστικού σφάλματος με τον πραγματικό για την πρώτη συνιστώσα της λύσης μας και στο δεξιά για την δεύτερη.

Έπειτα, όπως αναλύουμε στο κεφάλαιο 3, κατασκευάζουμε το γειτονικό πρόβλημα που λύνεται ακριβώς από το  $p(t)$  και προσεγγίζουμε το σφάλμα του

(4.1) από το σφάλμα του γειτονικού προβλήματος.

Αυτή η μέθοδος, αντίθετα με αυτήν του δευτέρου κεφαλαίου, έχει την ίδια πολυπλοκότητα με την ανακατασκευή, χρειάζεται την επίλυση δύο συστημάτων Σ.Δ.Ε. για να καταλήξουμε στην εκτίμηση του σφάλματος.

## 4.2 Απλό μη γραμμικό σύστημα

Έστω το ακόλουθο σύστημα

$$(4.2) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + B(u), & 0 < t < 10 \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

$$\text{όπου } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1u_1 \\ -u_1u_2 \end{bmatrix}.$$

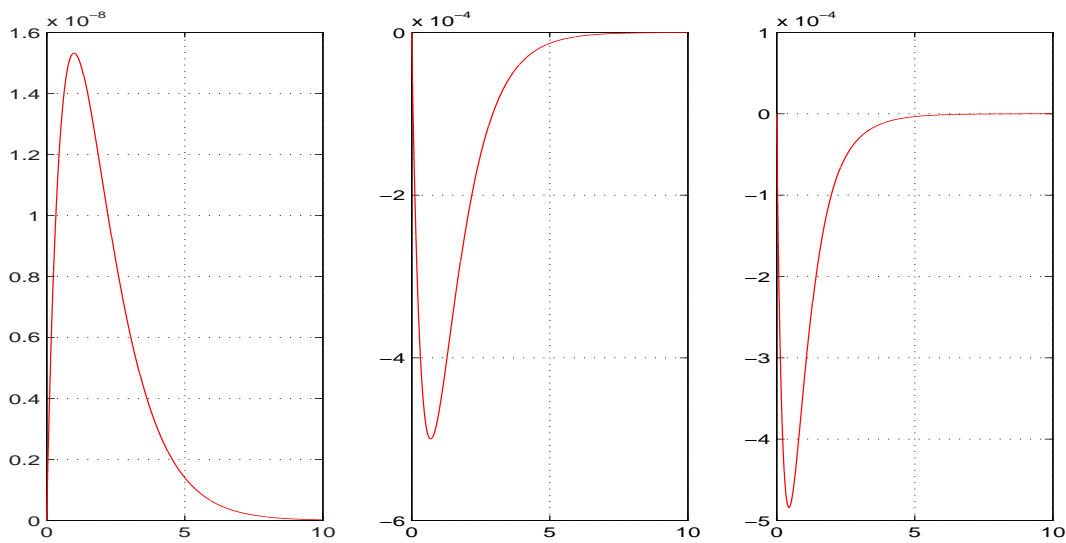
Με αρχική συνθήκη  $u^0 = (1, 1, 1/2)$ . Το παραπάνω σύστημα έχει λύση το διάνυσμα  $u(t) = (e^{-t}, e^{-2t}, \frac{1}{2}e^{-3t})$

### 4.2.1 ανακατασκευή

Αρχικά, λύνουμε το παραπάνω σύστημα με την μέθοδο Crank-Nicolson . Προσεγγίζουμε το πραγματικό σφάλμα  $e = u - U$  από την σχέση  $e = \hat{e} + \hat{U} - U$ , όπου  $u$  η πραγματική λύση του παραπάνω προβλήματος,  $U$  η προσέγγιση που έχουμε από την αριθμητική μέθοδο,  $\hat{U}$  η ανακατασκευή της  $U$  και  $\hat{e} = u - \hat{U}$ .

Το  $\hat{e}$  το προσεγγίζουμε επιλύοντας το παρακάτω σύστημα πάλι με την μέθοδο Crank-Nicolson .

$$\begin{cases} \hat{e}'(t) = A\hat{e}(t) + A(\hat{U}(t) - U(t)) + B(\hat{e}(t) + \hat{U}(t)) - B(U(t)), & 0 < t < 10 \\ \hat{e}(0) = \hat{e}^0 = (0, 0, 0) \end{cases}$$



Σχήμα 4.4: Στα παραπάνω γραφήματα εμφανίζεται η διαφορά του προσεγγιστικού σφάλματος μινον το πραγματικό για κάθε συνιστώσα της λύσης αντίστοιχα.

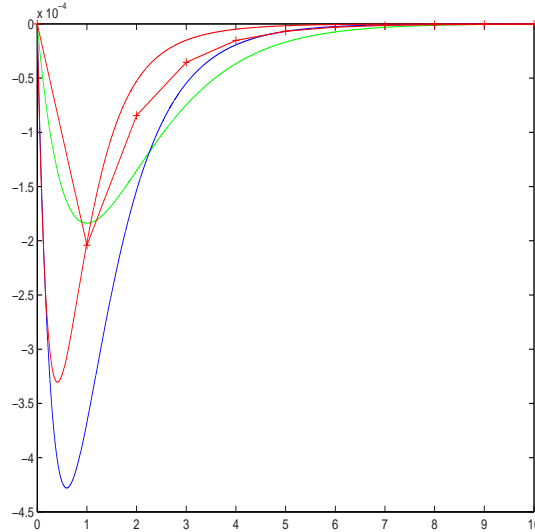
#### 4.2.2 δυϊκό

Ακολουθώντας επιλύουμε το (4.3) με την έμμεση Euler . Έπειτα κατασκευάζουμε το δυϊκό πρόβλημα όπως στην (2.4) με αρχική συνθήκη  $\psi = (1, 0, 0)$  όταν ελέγχουμε το σφάλμα της πρώτης συνιστώσας της λύσης,  $\psi = (0, 1, 0)$  όταν ελέγχουμε το σφάλμα της δεύτερης και  $\psi = (0, 0, 1)$ . Επιλύουμε το δυϊκό πρόβλημα πάλι με την έμμεση Euler , για διάφορους τελικούς χρόνους και προσεγγίζουμε το σφάλμα σε κάθε τελικό χρόνο από την σχέση

$$e(T) \cdot \psi = - \sum_{n=1}^N (U(t_n) - U(t_{n-1})) \cdot (\phi(t_{n-1}) - \bar{\phi}_n)$$

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε δέκα κόμβους της διαμέρισής, λύνουμε δέκα δυϊκά προβλήματα και προσεγγίζουμε το σφάλμα για κάθε συνιστώσα της λύσης από τον παραπάνω τύπο.

Στο παρακάτω γράφημα παρατηρούμε ότι η επιλογή της αρχικής συνθήκης στα δυϊκά προβλήματα, σκοτώνει την μη γραμμικότητα του μοντέλου μας. Αυτό βέβαια δεν είναι γενικό, είναι μια ιδιαιτερότητα του προβλήματος που έχουμε επιλέξει.



Σχήμα 4.5: Στο παραπάνω γράφημα εμφανίζονται το σφάλμα κάθε συνιστώσας της λύσης καθώς και η προσέγγισή τους, η οποία είναι η μη ομαλή καμπύλη .

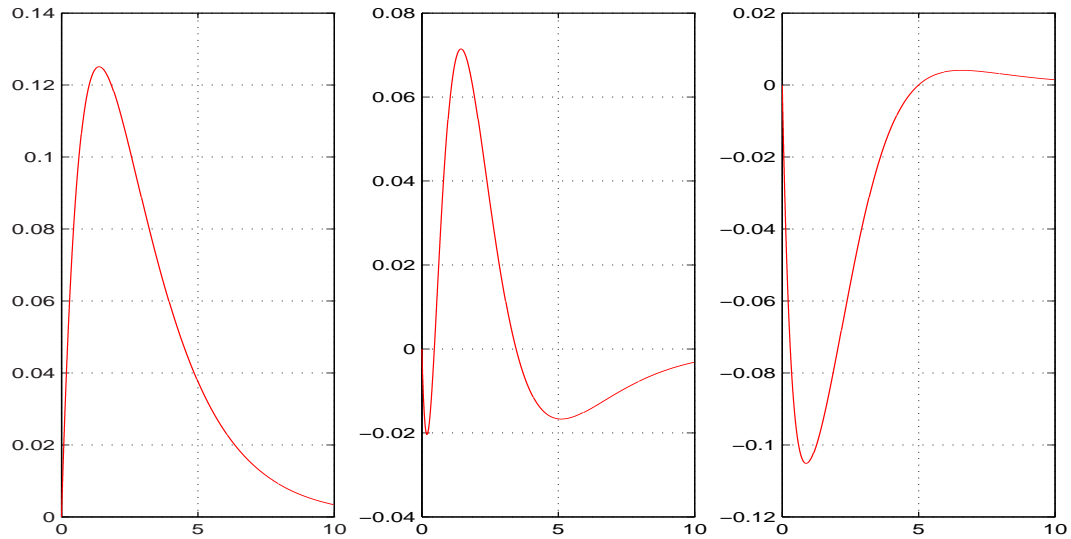
### 4.2.3 IDeC

Τέλος, για την μέθοδο IDeC επιλύουμε πάλι το (4.1) με την έμμεση Euler και παράγουμε την προσεγγιστική λύση  $\{U^n\}_{n=1}^N$ . Θεωρούμε ένα τετραγωνικό πολυώνυμο της μορφής

$$p(t) = U^{n-1} + \frac{U^n - U^{n-1}}{k_n} (t - (n-1)k_n) + \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k_n} - \frac{U^n - U^{n-1}}{k_n} (t - (n-1)k_n)(t - nk_n)$$

που παρεμβάλλει την προσεγγιστική μας λύσης στους κόμβους  $U^{n-1}, U^n, U^{n+1}$ . Έπειτα, κατασκευάζουμε το γειτονικό πρόβλημα που λύνεται ακριβώς από το

$p(t)$  και προσεγγίζουμε το σφάλμα του (4.1) από το σφάλμα του γειτονικού προβλήματος.



Σχήμα 4.6: Στα παραπάνω γραφήματα εμφανίζεται η διαφορά του προσεγγιστικού σφάλματος μινον το πραγματικό για κάθε συνιστώσα της λύσης αντίστοιχα.

### 4.3 IDeC - Ανακατασκευή

Τέλος κάναμε ένα "πείραμα", συνδυάσαμε τις ιδέες του πρώτου και του τρίτου κεφαλαίου για την απλή περίπτωση του γραμμικού μοντέλου.

Έστω λοιπόν το ακόλουθο πρόβλημα,

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

$$\text{όπου } u^0 = (1, 1), T = 10 \text{ και } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την προσεγγιστική λύση,  $u_h^{[0]} := u_h$ , που έχουμε από την *Crank - Nicolson* στο πλέγμα  $\Delta_h, h = \frac{T}{mN_1} = \frac{T}{N}$  και συμβολίζουμε  $p^{[0]}(t)$ , το κατα τμήματα πολυώνυμο βαθμού 2 που παρεμβάλλει τις τιμές της  $u_h^{[0]}$  στους κόμβους της διαμέρισης,

$$p_i^{[0]}(t_j) = u_j^{[0]}, j = im, \dots, (i+1)m, i = 0, \dots, N_1 - 1.$$

Αυτό το πολυώνυμο, το παίρνουμε να είναι η ανακατασκευή της προσεγγιστικής μας λύσης, η οποία ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο να είναι

$$p^{[0]}(t) = \hat{U}(t) := U^{n-1} - \int_{t^{n-1}}^t AU(s)ds \quad \forall t \in I_n.$$

όπου

$$U(t) = u_h^{n-\frac{1}{2}} + (t - t^{n-\frac{1}{2}}) \bar{\partial} u_h^n$$

η γραμμική παρεμβολή της  $u_h$  στα σημεία  $u_h^{n-1}$  και  $u_h^n$

Χρησιμοποιώντας την παρεμβάλλουσα συνάρτηση, κατασκευάζουμε ένα γειτονικό πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με το αρχικό και λύνεται ακριβώς από την  $p^{[0]}(t)$  :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = d^{[0]}(t), & 0 < t < T \\ u(0) = p^{[0]}(0), \end{cases}$$



όπου

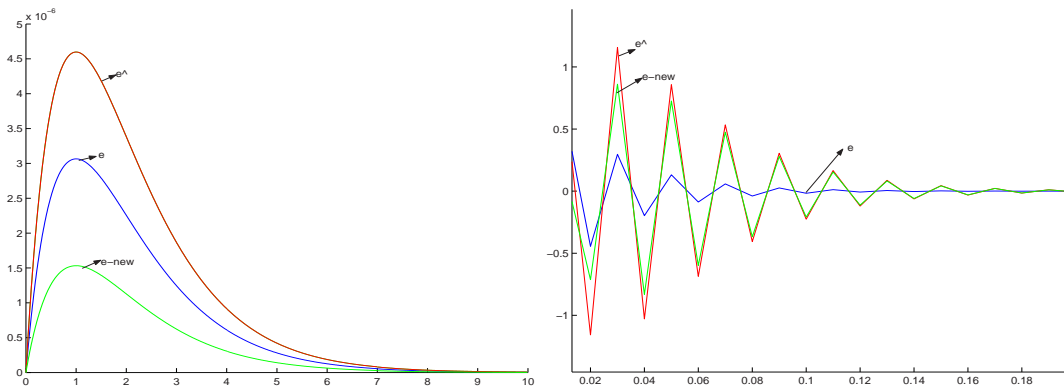
$$\begin{aligned} d^{[0]}(t) &:= p^{[0]'}(t) + Ap^{[0]}(t) = \hat{U}'(t) + A\hat{U}(t) \\ &= A(\hat{U} - U) \end{aligned}$$

Τώρα λύνουμε το γειτονικό πρόβλημα με την ίδια αριθμητική μέθοδο και παίρνουμε μια προσεγγιστική λύση  $p_h^{[0]}$  για την  $p^{[0]}(t)$ . Αυτό σημαίνει ότι για την λύση του γειτονικού προβλήματος γνωρίζουμε το ολικό σφάλμα το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε το άγνωστο σφάλμα του αρχικού προβλήματος :

$$\varepsilon_h = R_h(u) - u_h \approx \delta_h^{[0]} := R_h(p^{[0]}) - p_h^{[0]} = u_h^{[0]} - p_h^{[0]}.$$

Έχοντας την εκτίμηση για το ολικό σφάλμα της λύσης  $u_h^{[0]}$  μπορούμε να βελτιώσουμε την λύση μας θέτοντας

$$u_h^{[1]} = u_h^{[0]} + \delta_h^{[0]} = u_h^{[0]} + (R_h(p^{[0]}) - p_h^{[0]}).$$



Σχήμα 4.7: Στο αριστερό γράφημα εμφανίζονται τα σφάλματα για την πρώτη συνιστώσα της λύσης μας και στο δεξιά για την δεύτερη.

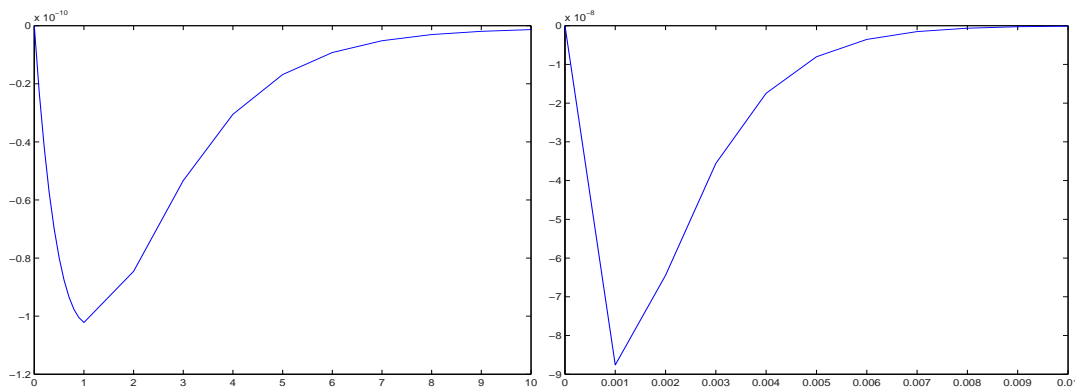
Παραπάνω βλέπουμε το σφάλμα της βελτιωμένης λύσης,  $e - new$ , της εκτίμησης που έχουμε από το πρώτο κεφάλαιο  $\hat{e}$ , και του αρχικού σφάλματος που έχουμε από την Crank-Nicolson,  $e$ .

## 4.4 Δυϊκό - Crank-Nicolson

Εδώ λύνουμε πάλι το γραμμικό μοντέλο, αλλά αυτή την φορά με την μέθοδο Crank-Nicolson . Λύνουμε το δυϊκό πρόβλημα με την έμμεση Euler με τις ίδιες αρχικές συνθήκες όπως και πριν, έτσι ώστε να ελέγχουμε το σφάλμα της κάθε συνιστώσας της λύσης. Έπειτα υπολογίζουμε το σφάλμα από την σχέση (2.14) χρησιμοποιώντας την μέθοδο του τραπεζίου και την εκτίμηση (1.5) για το υπόλοιπο. Αναλυτικότερα η σχέση για το σφάλμα γίνεται ως εξής

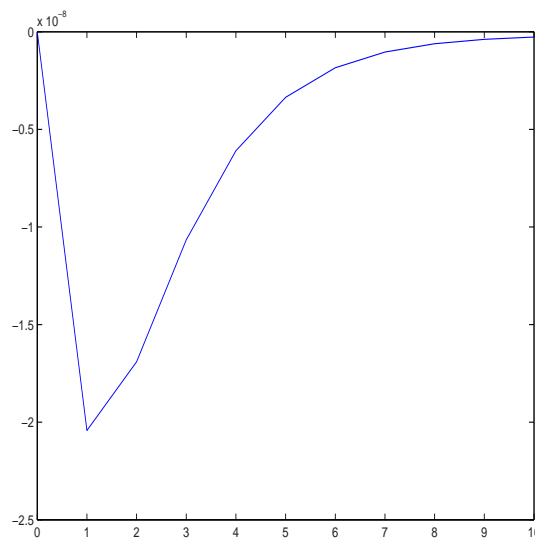
$$e(T) \cdot \psi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} k_n \left[ \frac{1}{2} A(U^n - U^{n-1}) \cdot (\phi(t^n) - \phi(t^{n-1})) \right]$$

Παρακάτω έχουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα έπειτα από την λύση 20 δυϊκών προβλημάτων.



Σχήμα 4.8: Στο παραπάνω γράφημα εμφανίζεται η προσέγγιση του σφάλματος για την πρώτη συνιστώσα της λύσης, αριστερά και για την δεύτερη στα δεξιά.

Τέλος, λύνουμε το μη γραμμικό μοντέλο με την παραπάνω διαδικασία. Παίρνουμε μία εκτίμηση του σφάλματος και για τις τρεις συνιστώσες του προβλήματος. Αυτό συμβαίνει διότι οι αρχικές συνθήκες στα δυϊκά προβλήματα που επιλύουμε σκοτώνουν τους μη γραμμικούς όρους του μοντέλου μας.



Σχήμα 4.9: Στο παραπάνω γράφημα εμφανίζεται η προσέγγιση του σφάλματος για το μη γραμμικό μοντέλο .

## 4.5 Σύστημα Lorenz

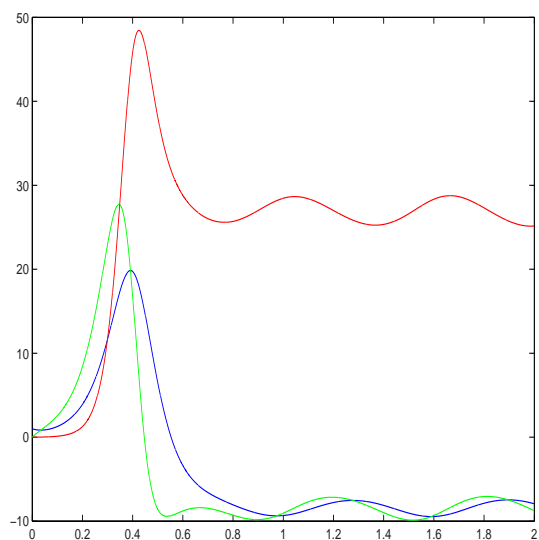
Τέλος, κάναμε μια εφαρμογή της μεθόδου της ανακατασκευής και αυτής του δευτέρου κεφαλαίου με την Crank-Nicolson στο σύστημα Lorenz .

Το μαθηματικό μοντέλο έχει ως εξής,

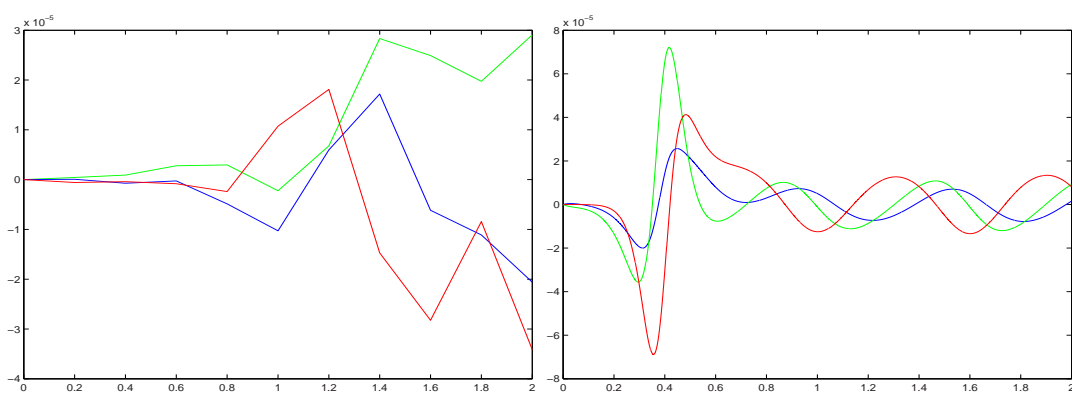
$$(4.3) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + B(u), & 0 < t < 2 \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

$$\text{όπου } A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} \text{ και } B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1 u_3 \\ u_1 u_2 \end{bmatrix}.$$

Με αρχική συνθήκη  $u^0 = (1, 0, 0)$ . Παρακάτω εμφανίζονται τα γραφήματα της λύσης του συστήματος, καθώς και της προσέγγισης του σφάλματος που έχουμε από τις δύο μεθόδους.



Σχήμα 4.10: Στο παραπάνω γράφημα εμφανίζεται η προσέγγιση της λύσης του συστήματος Lorenz .



Σχήμα 4.11: Στο παραπάνω γράφημα εμφανίζεται αριστερά η προσέγγιση του σφάλματος για κάθε συνιστώσα από την διαδικασία της ανακατασκευής και δεξιά από το δυϊκό πρόβλημα.

# Βιβλιογραφία

- [1] G. Akrivis, C. Makridakis, and R. Nochetto. A posteriori error estimates for the crank-nicolson method for parabolic equations. *Math. Comp.*, 75(254):511–531, 2005.
- [2] K. Eriksson, C. Johnson, and A. Logg. Adaptive computational methods for parabolic problems. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2004.
- [3] O. Koch and E. Weinmuller. Iterated defect correction for the solution of singular initial value problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(6):1784–1799, 2001.
- [4] P.E.ZADUNAISKY. On the estimation of errors propagated in the numerical integration of ordinary differential equations. *Numer. Math.*, 27:21–39, 1976.
- [5] V. Vidar Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.