ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
26 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ :

- ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
- ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Τα προτεινόμενα θέματα εντάσσονται σε διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών. Η Εξεταστική Επιτροπή θα επιθυμούσε να ασχοληθείτε με θέματα που ανήκουν σε περισσότερες της μιας περιοχής.

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Άσκηση 1. Δίνεται η ομάδα $G = S_4$ και η υποομάδα

$$H = \{\iota, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}.$$

Να βρείτε τα σύμπλοκα $(12)H$, $(34)H$, και $(1234)H$.

Άσκηση 2.

(1) Να βρείτε όλους τους γεννήτορες της $\mathbb{Z}_{16}$.
(2) Πόσους γεννήτορες έχει η ομάδα $\mathbb{Z}_{1000}$;
(3) Να βρείτε όλους τους γεννήτορες της υποομάδας $< 375 >$ της $\mathbb{Z}_{1000}$.

Άσκηση 3. Δίνεται ομάδα G τάξης 210 και κανονική υποομάδα H που είναι ισόμορφη με την S_3. Να δείξετε ότι, για κάθε $a \in G$, αν $a^6 \in H$ τότε $a \in H$.

Άσκηση 4. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n με την ιδιότητα ότι τα δύο τελευταία ψηφία του $3n+7$ είναι 05.

Άσκηση 5. Να βρείτε το μέγιστο θετικό ακέραιο n με την ιδιότητα ότι το 2^n διαιρεί το $13^{12345} + 7$.

Άσκηση 6. Έστω K ένα σώμα που περιέχει τουλάχιστον n στοιχεία, και $f(x), g(x)$ δύο πολυώνυμα βαθμού $n - 1$ με συντελεστές στο K. Αν, για κάθε $a \in K$, τα στοιχεία $f(a)$ και $g(a)$ του K ισούνται, να δείξετε ότι τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ ισούνται.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Άσκηση 1.

(1) Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία a_{k_n} τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

(2) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p (\ln n)^q},$$

όπου $p, q > 0$.

(3) Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν είναι αληθείς οι παρακάτω συνεπαγωγές.

(α΄) Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β΄) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$ συγκλίνουν.

Άσκηση 2.

(1) Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_n f_n(x) = 0, \text{ για κάθε } x, \text{ και } \int_0^1 f_n \to \infty;$$

(2) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Θέτουμε $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας;

(3) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \sin x^p$, και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g(x) = |\sin x|^p$, όπου $p > 0$.

Άσκηση 3. Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Υποθέτουμε ότι $f(1/n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Άσκηση 4. Αν $A, B \subset \mathbb{R}$ τότε θέτουμε

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

(1) Δείξτε ότι αν το $A \subset \mathbb{R}$ είναι αυθαίρετο και το $G \subset \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό, τότε το $A + G$ είναι ανοιχτό.

(2) Δείξτε ότι αν τα $A, B \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγή, τότε το $A + B$ είναι συμπαγές.

(3) Είναι αλήθεια ότι αν τα $A, B \subset \mathbb{R}$ είναι κλειστά, τότε το $A + B$ είναι κλειστό;

Άσκηση 5. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ κλειστό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Άσκηση 6. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$, όπου $p > 0$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Άσκηση 1. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

για την επίλυση του οποίου χρησιμοποιούμε μια μέθοδο RK $q-$σταδίων

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \tau \\ \hline \mathrm{b} & \end{array}$$

όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q},\ b = (b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^q,\ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \in \mathbb{R}^q$

(1) Δώστε τον ορισμό της *τάξης ακρίβειας* και της *συνέπειας* της μεθόδου.
(2) Έστω $\zeta^{n,i}$, $\zeta^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,i})$. Δείξτε ότι, για μια σταθερά C ανεξάρτητη του h,

$$\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i}| \le Ch,$$

$$\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i}| \le Ch^2 \iff \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i, \quad i = 1, \ldots, q.$$

(3) Δείξτε οτι η μέθοδος RK είναι συνεπής εαν και μόνο εαν $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Άσκηση 2. Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y, \quad t \ge 0,\ \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\lambda < 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

για την επίλυση του οποίου χρησιμοποιούμε την παρακάτω μέθοδο RK:

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \mu & \frac{1}{2} - \mu \\ \frac{1}{4} + \mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ μία παράμετρος.

(1) Υπολογίστε την συνάρτηση $r(z)$.
(2) Δώστε μια έκφραση για το τοπικό σφάλμα δ^n.
(3) Δείξτε οτι η μέθοδος είναι τάξεως τουλάχιστον 2.
(4) Προσδιορίστε το μ έτσι ώστε η μέθοδος να έχει τάξη ακρίβειας 4.

Άσκηση 3. Έστω $u \in \mathbb{R}^n$ μη-μηδενικό. Θεωρούμε τον πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$P = I - 2\frac{uu^T}{u^T u}.$$

(1) Για δοσμένο $x \in \mathbb{R}^n$ μη-μηδενικό κατασκευάστε u τέτοιο ώστε Px είναι πολλαπλάσιο του $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Ποια είναι η τιμή του Px σε αυτή τη περίπτωση;
(2) Δείξτε ότι $det(I + xy^T) = 1 + x^T y,\ x, y \in \mathbb{R}^n$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε κατάλληλο πίνακα P)

Άσκηση 4. Δείξτε οτι υπάρχουν βάρη $w_1,\ w_2,\ w_3$ τέτοια ώστε ο τύπος ολοκλήρωσης

$$Q(f) := w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1),$$

$f \in C^1[0, 1]$ να ολοκληρώνει ακριβώς στο $[0, 1]$ πολυώνυμα μέχρι και δευτέρου βαθμού ακριβώς. Έστω

$$R(f) := \int_0^1 f(x)\,dx - Q(f).$$

Προσδιορίστε μια σταθερά c τέτοια ώστε

$$\forall f \in C^3([0, 1]),\ \exists \xi \in [0, 1] \quad R(f) = cf^{(3)}(\xi)$$

Άσκηση 5. Έστω $f \in C^{n+1}[a, b],\ x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ ανά δύο διάφορα μεταξύ τους σημεία, και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$.

(1) Δώστε μια έκφραση για την διαφορά $f(x) - p(x)$.
(2) Έστω $L_i(x),\ i = 0, \ldots, n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange της f στα $x_0, \ldots, x_n$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον τύπο του $L_i(x)$ δείξτε ότι $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

(3) Έστω $p_1(x)$ το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $(x_\ell, f(x_\ell))$, $(x_r, f(x_r))$, $x_\ell < x_r$. Δείξτε ότι

$$\max_{x_\ell \le x \le x_r} |f(x) - p_1(x)| \le \frac{K}{8}(x_\ell - x_r)^2 \qquad K = \max_{x_\ell \le \xi \le x_r} |f''(\xi)|$$

(4) Για να προσεγγίσουμε το $\log x$ στο διάστημα $[1, 2]$ χωρίζουμε το διάστημα σε N ίσα υποδιαστήματα $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, N$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ προσεγγίζουμε το $\log x$ με το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία x_j, x_{j+1}. Ποιο πρέπει να είναι το N έτσι ώστε το μέγιστο σφάλμα σε όλο το διάστημα $[1, 2]$ να μην ξεπερνά το 10^{-4} ;

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Εστω $f : [\,0,\ \infty\,) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 1$ και

$$tf(t) < f'(t) < 2tf(t), \qquad t > 0.$$

Αποδείξτε πως ισχύει

$$e^{\frac{t^2}{2}} < f(t) < e^{t^2}, \qquad t > 0.$$

Άσκηση 2. Αποδείξτε πως δεν υπάρχει ομαλή συνάρτηση $f : [\,0,\ \infty\,) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και

$$f'(t) = 2 + \sin t + f^2(t), \qquad t > 0.$$

Άσκηση 3. Αποδείξτε πως η μηδενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + \frac{x}{2}(2x^2 + y^2) \\ y' &= -2x - y + \frac{y}{2}(2x^2 + y^2) \end{aligned}$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση.

Άσκηση 4. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δοθείσα διαφορίσιμη συνάρτηση. Να λυθεί το πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{gathered} u_t(x,t) + (x + t)\, u_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Άσκηση 5. Να λυθεί το πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad -1 \le x \le 1, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = \sin^3\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi. \end{gathered}$$

Άσκηση 6. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των ομαλών λύσεων του προβλήματος Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, && 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0, && t > 0, \\ &u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = 0, && t > 0, \\ &u(x,0) = \phi(x), && 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Άσκηση 1. Έστω X, Y δυο ανεξάρτητες, θετικές, ακέραιες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}[Y = k] = \frac{1}{2^k},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τις πιθανότητες

$$\mathbb{P}[\min\{X, Y\} \leq n], \quad \text{και} \quad \mathbb{P}[X = Y].$$

Άσκηση 2. Ένας πραγματικός αριθμός X επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $(0, 1)$. Στη συνέχεια ένας δεύτερος αριθμός Y επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $(X, 1)$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y.

Άσκηση 3. Έστω ότι η διακριτή 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(i, j) = \frac{c}{n(n+1)}, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, j \end{array}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$ σταθερές. Βρείτε την c και υπολογίστε τις δεσμευμένες μέσες τιμές

$$\mathbb{E}[X \,|\, j], \quad \mathbb{E}[Y \,|\, i],$$

για $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 4. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με παραμέτρους θ και λ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $X + Y = n$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\left(n, \dfrac{\theta}{\theta + \lambda}\right)$.

Άσκηση 5. Ένας ασφαλιστικός οργανισμός ασφαλίζει τα αυτοκίνητα μιας εταιρείας μεταφορών. Τα τελευταία n χρόνια ένας «τυπικός» οδηγός της εταιρείας είχε $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ατυχήματα το χρόνο. Οι αναλογιστές του οργανισμού έχουν εκτιμήσει ότι σε περίπτωση ατυχήματος, η συνολική ζημιά του αυτοκινήτου είναι $c_0 X$ ευρώ, όπου c_0 είναι μια σταθερά, και η X μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Περιγράψτε μια ορθολογική και πιθανοθεωρητικά αποδεκτή μέθοδο εκτίμησης του ετήσιου ασφάλιστρου.