Απειροστικός Λογισμός

1. (15 Μονάδες) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \leq (n+1)\log n - n + 1.$$

2. (15 Μονάδες) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \big(\cos(m!\pi x)\big)^n$$

είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. (15 Μονάδες) Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

4. (15 Μονάδες) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+2) + f(x) - 2f(x+1)) = 0.$$

5. (15 Μονάδες) Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n \log n}.$$

6. (15 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$$\int_0^1 f(tx)\, dx = 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $f \equiv 0$.

7. (15 Μονάδες) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int\int\int_E xyz\; dx\; dy\; dz$$

όπου E το ελλειψοειδές που περιγράφει η ανισότητα

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Γραμμική Άλγεβρα

---

1. (20 Μονάδες) Δείξτε τα ακόλουθα:
Α. Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του.
Β. Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A και x είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε η λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1} και το x είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
Γ. Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, τότε η $a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, $a_i \in \mathbb{K}$, είναι ιδιοτιμή του πίνακα

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Ποιό είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα;

---

2. (20 Μονάδες) **Α.** Δείξτε ότι ο πίνακας $A = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = i^{j-1}$, $i, j = 1, \ldots, n$, είναι αντιστρέψιμος.
Β. Δεδομένου $\alpha \in \mathbb{R}$, βρείτε την βαθμίδα (*rank*) του πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου

$$a_{ij} = 1 + (\alpha - 1)\delta_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

και δ_{ij} ισούται με 1 εάν $i = j$ και 0 εάν $i \neq j$.

---

3. (20 Μονάδες) **Α.** Έστω V διανυσματικός χώρος επάνω από το $\mathbb{R}$ και $T\colon V \to V$ μία γραμμική απεικόνιση, τέτοια ώστε $T^n = 0$ για κάποιο φυσικό $n \geq 2$. Εάν $x \in V$, τότε το σύνολο

$$\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^{n-1}x\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν $T^{n-1}x \neq 0$.
Β. Έστω V διανυσματικός χώρος επάνω από το $\mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ *περιττός*. Εάν τα διανύσματα

$$x_1, \ldots, x_n$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα

$$x_1 + x_2,\ x_2 + x_3, \ldots,\ x_{n-1} + x_n, x_n + x_1.$$

---

4. (20 Μονάδες) Έστω V διανυσματικός χώρος επάνω από το $\mathbb{R}$ και $T\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε τα ακόλουθα:
Α. $T^2 = 0$ αν και μόνο αν $T(V) \subset Ker(T)$ όπου $Ker(T)$ ο πυρήνας της T.
Β. Το σύνολο $Fix(T) = \{x \in V : Tx = x\}$ είναι υπόχωρος του V. Προσδιορίστε το σύνολο $Fix(T) \cap Ker(T)$.

---

5. (20 Μονάδες) Έστω V διανυσματικός χώρος επάνω από το $\mathbb{C}$ και $T\colon V \to V$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $T^3 = I$ όπου $I\colon V \to V$ η ταυτοτική απεικόνιση. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$T_1 = I + T + T^2$$
$$T_2 = I + \omega T + \omega^2 T^2$$
$$T_3 = I + \omega^2 T + \omega T^2$$

όπου ω είναι μία κυβική ρίζα της μονάδας διάφορη του 1. Δείξτε τα ακόλουθα:
Α. Η T είναι $1-1$ και επί.
Β. $V = T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus T_3(V)$.