Κοινο Μεταπτυχιακο Προγραμμα

των τμηματων

Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Εισαγωγικές Εξετάσεις της 26ης Ιουλίου 2002

Απειροστικός Λογισμός

1. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$.

2. Η αναδρομική ακολουθία (a_n) ορίζεται από τις σχέσεις $a_1 = 0, a_2 = 1$ και για $n \geq 3$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$. Αποδείξτε ότι είναι συγκλίνουσα και έχει όριο το $2/3$.
   Υπόδειξη: Η ακολουθία χωρίζεται σε δύο μονότονες υπακολουθίες.

3. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$, $x>0$.

4. Υπάρχει a τέτοιο ώστε η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{\ln|x|}{x} & \text{αν } x\neq 0\\ a & \text{αν } x=0\end{cases}$$
   να είναι συνεχής στο 0; Σχεδιάστε την $f(x)$.

5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{dx}$.

6. Αν $a>0$, αποδείξτε ότι $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+a)\mathrm{dx}-\ln \mathrm{a} < \frac{1}{\mathrm{a}}$.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{dy}\mathrm{dx}$.

8. Βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $xy+yz+zx$ υπό τη δέσμευση $x^2+y^2+z^2=1$.

9. Έστω η καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τη σχέση $x^2-y^2=(x-2y)(x^2+y^2)$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(1,0)$ της καμπύλης.

10. Βιομηχανία χρειάζεται για τη συσκευασία κάποιου προϊόντος της χάρτινα κουτιά κυλινδρικού σχήματος χωρητικότητος 1 λίτρου. Κατά την κατασκευή των κουτιών, οι κυκλικές βάσεις αποκόπτονται από χάρτινη λωρίδα, ενώ οι παράπλευρες επιφάνειες από διαφορετική χάρτινη λωρίδα. Η χαρτοβιομηχανία, που εφοδιάζει τον κατασκευαστή των κουτιών με τις χάρτινες λωρίδες, μπορεί να παραδώσει τις λωρίδες με όσο ακριβώς πλάτος επιθυμεί ο κατασκευαστής. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού (ακτίνα βάσης και ύψος) για να είναι όσο το δυνατόν οικονομικότερη η κατασκευή;

Γραμμική Άλγεβρα

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (α′) Βρείτε μια βάση για τον χώρο λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα συντελεστών A. (β′) Βρείτε την πλήρη λύση του μη ομογενούς συστήματος με πίνακα συντελεστών A και στήλη σταθερών όρων (δεξιά μέλη των εξισώσεων) B.

2. Αν
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
   και ξέρουμε ότι το γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις, πόσες λύσεις έχει το ομογενές γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & b & 3 \end{pmatrix} \; ;$$

3. (α′) Διαγωνιοποιείστε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (β′) Υπολογίστε τον πίνακα A^n για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n.

4. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y, 2y-z)$ και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $g(x,y) = (x+y, 3x-y, x, -2y)$. Υπολογίστε τους πίνακες των απεικονίσεων αυτών, καθώς και τον πίνακα της σύνθεσής τους h, χωρίς να υπολογίσετε την h. Ποια είναι η διάσταση της εικόνας της h και ποια η διάσταση του χώρου των διανυσμάτων, τα οποία μέσω του h απεικονίζονται στο μηδενικό διάνυσμα;

5. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες πάνω από το $\mathbb{R}$.

6. Έστω A μη μηδενικός τετραγωνικός πίνακας, για τον οποίον υπάρχει ακέραιος $k \geq 2$ τέτοιος ώστε $A^k = O$. Αποδείξτε ότι ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

7. Λύστε την παρακάτω εξίσωση, δίχως να υπολογίσετε τις ορίζουσες που εμφανίζονται:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$