ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Πρόβλημα 1. Έστω α μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Στην εφαπτομένη σε κάθε σημείο $\alpha(t)$ λαμβάνουμε ένα σημείο $\gamma(t)$, που απέχει σταθερή απόσταση c από το σημείο επαφής. Σχηματίζεται έτσι μια νέα καμπύλη γ, της οποίας την καμπυλότητα συμβολίζουμε κ_γ. Δείξτε οτι ικανοποιείται η σχέση:

$$\kappa_\gamma^2(1+c^2\kappa^2)^3 = c^2\kappa^2\sigma^2(1+c^2\kappa^2) + (\kappa + c\kappa' + c^2\kappa^3)^2$$

όπου κ και σ είναι, αντιστοίχως, η καμπυλότητα και η στρέβλωση (στρέψη) της καμπύλης α.

Πρόβλημα 2. Εάν T είναι η σπείρα (τόρος, σαμπρέλα) και $x : \mathbb{R}^2 \to T$ είναι η παραμέτρηση

$$x(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v,\ (R + r\cos u)\sin v,\ r\sin u)\,,$$

όπου $R > r > 0$, δείξτε οτι η απεικόνιση $F : T \to T$, που ορίζεται από τη σχέση

$$F(x(u,v)) = x(u+v, u-v)\,,$$

είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση επιφανειών.
Εξετάστε εάν η F είναι διαφορομορφισμός (αμφιδιαφόριση).
Περιγράψτε αυτή την απεικόνιση, για παράδειγμα, δίνοντας την εικόνα των μεσημβρινών και των παραλλήλων της σπείρας.

Πρόβλημα 3. Η αλυσσοειδής επιφάνεια εκ περιστροφής M είναι, εξ ορισμού, αυτή που προκύπτει από περιστροφή της καμπύλης

$$y = \cosh x$$

γύρω από τον x-άξονα.
Δείξτε οτι η M είναι επιφάνεια ελαχίστου, και υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss.
Βρείτε τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις της M στο σημείο $p = (0,1,0)$.