ΘΕΜΑΤΑ ΛΟΓΙΚΗΣ - ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Πρόβλημα 1. Έστω ότι το X είναι σύνολο και τα A, B, C υποσύνολά του. Έστω συνάρτηση $f : X \to X$, τέτοια ώστε $f[A \cap B] \subset C$ και $f[A \cup B] \subset A$.

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αποδείξτε είτε αυτήν είτε την άρνησή της: (α′) $f[A] \cup f[B] \subset A$ (β′) $f[A] \cap f[B] \subset C$.

Πρόβλημα 2. Ένας διμελής λογικός σύνδεσμος, συμβολιζόμενος με K, ορίζεται ως εξής: Αν a και b είναι προτασιακοί τύποι, ο προτασιακός τύπος aKb παίρνει την τιμή αληθείας Ψ (ΨΕΥΔΗΣ) όταν οι a και b παίρνουν συγχρόνως την τιμή Α (ΑΛΗΘΗΣ) ή συγχρόνως την τιμή Ψ, ενώ ο aKb παίρνει παίρνει την τιμή αληθείας Α σε όλες τις άλλες περιπτώσεις. Εξετάστε αν αληθεύει ή όχι ο ισχυρισμός:

> *Κάθε προτασιακός τύπος κατασκευασμένος από μεταβλητές και τους συνηθισμένους λογικούς συνδέσμους είναι λογικώς ισοδύναμος με ένα τύπο που κατασκευάζεται μόνο με τη χρήση μεταβλητών και του συνδέσμου K.*

Αποδείξτε τους ισχυρισμούς σας.

Πρόβλημα 3. Ζωγραφίστε δύο ομόκεντρες περιφέρειες με κέντρο Κ. Στην εξωτερική σημειώστε δεξιόστροφα τα σημεία Α,Β, Γ, Δ. Στην εσωτερική σημειώστε δεξιόστροφα τα Ε,Ζ,Η,Θ. Ενώστε τα εξής ζεύγη σημείων με γραμμές: Α και Ε, Β και Ζ, Γ και Η, Δ και Θ. Ενώστε κάθε ένα από τα Ε και Η με το Κ. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τρόπος να ξεκινήσει κανείς από ένα από τα προαναφερθέντα σημεία, να περάσει από καθένα από τα άλλα σημεία ακριβώς μία φορά και να επιστρέψει στο αρχικό σημείο, ακολουθώντας πάντα γραμμές του σχήματος.

Πρόβλημα 4. (α′) Ποιος είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των προγραμμάτων της γλώσσας προγραμματισμού FORTRAN; Δώστε σύντομη αιτιολόγηση.
(β′) Ποιος είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των συναρτήσεων από το σύνολο των ρητών αριθμών στον εαυτό του; Δώστε σύντομη αιτιολόγηση.
(γ′) Μία συνάρτηση f από το σύνολο των ρητών αριθμών στον εαυτό του ονομάζεται *υπολογίσιμη* όταν υπάρχει ένα πρόγραμμα FORTRAN το οποίο, δεδομένου οποιουδήποτε ρητού αριθμού $\dfrac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, το πρόγραμμα υπολογίζει την τιμή $f(\frac{a}{b})$. Αποδείξτε είτε την παρακάτω πρόταση είτε την άρνησή της:

Κάθε συνάρτηση από το σύνολο των ρητών στον εαυτό του είναι υπολογίσιμη.