ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι η ομάδα $GL(2,\mathbb{Z}_2)$ των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{Z}_2$ των ακεραίων $\bmod 2$ είναι ισόμορφη με την συμμετρική ομάδα S_3 των μεταθέσεων των τριών στοιχείων.

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathcal{M}$ η πολλαπλασιαστική υποομάδα των $n\times n$ αντιστρεψίμων πινάκων με στοιχεία ρητούς αριθμούς και $\mathcal{E}=\{A\in\mathcal{M} : \det A=1\}$. Αποδείξτε ότι το $\mathcal{E}$ αποτελεί κανονική υποομάδα της $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}/\mathcal{E}\cong\mathbb{Q}^*$, όπου $\mathbb{Q}^*$ είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών ρητών αριθμών.

Πρόβλημα 3. Όλα τα ερωτήματα του προβλήματος αυτού αναφέρονται αποκλειστικά στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{18}$ των ακεραίων $\bmod 18$, του οποίου τα στοιχεία συμβολίζονται $0,1,\ldots,17$. Τα αποτελέσματα των απαντήσεών σας θα δίνονται, αποκλειστικά, με χρήση αυτών των συμβόλων.
α′) Ποιά στοιχεία είναι αντιστρέψιμα;
β′) Ποιά από τα κλάσματα $\frac{1}{7},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{3},\frac{4}{11}$ έχουν νόημα και, αυτά που έχουν, με ποια στοιχεία του δακτυλίου είναι ίσα;
γ′) Κάντε την ευκλείδεια διαίρεση του πολυωνύμου $f(x)=2x^4+x^3+6x^2+7x+3$ διά του $g(x)=5x^2+3x+2$.

Πρόβλημα 4. (α′). Αν οι a,b είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, ποιος είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $5a+2b$ και $7a+3b$;
(β′) Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαιρέσεως του $5^{1803}+7^{36002}$ δια του 54.

Πρόβλημα 5. Εστω $\mathbb{Z}[x]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής x με συντελεστές στους ακέραιους αριθμούς. Εστω I το ιδεώδες $(x^2+2,6x)$ του $\mathbb{Z}[x]$.
α′) Είναι $I=\mathbb{Z}[x]$;
β′) Είναι το I κύριο ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$;
γ′) Είναι το I μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$;